



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

# OPERADORES AUTOADJUNTOS Y SU RELACIÓN CON LA MECÁNICA CUÁNTICA

TESIS:

PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

REYNALDO CASTANEIRA RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS:

M.C. LUZ DEL CARMEN ÁLVAREZ MARÍN

CO-DIRECTOR:

DR. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.  
MARZO DE 2010

a mis padres:  
Reynaldo Castaneira González  
Francisca G. Ramírez Pérez

# Prefacio

En esta tesis se hace una presentación de los espacios con producto interior que nos permite llegar a formular algunas de las propiedades de los operadores lineales auto-adjuntos y no acotados, para mostrar finalmente su utilidad como herramienta matemática en la mecánica cuántica.

Temática: Este trabajo de tesis esta desarrollado en las siguientes áreas de la matemática: Algebra Lineal y Análisis Funcional, y del área de Física: Mecánica Cuántica.

Un espacio con producto interior es un espacio vectorial con una estructura adicional derivada del concepto de producto interior. El producto interior induce un aspecto geométrico a los espacios vectoriales, ya que se puede hablar de longitud de un vector, ángulo entre dos vectores y por consiguiente de ortogonalidad de vectores. El estudio de los espacios con producto interior es de gran importancia, pues de ellos se derivan distintos conceptos importantes, que hoy en día tienen diferentes aplicaciones. A los espacios con producto interior suele llamárseles también espacios pre-Hilbert. Si el espacio es completo con respecto a la norma inducida por el producto interior [6] entonces recibe el nombre de espacio de Hilbert. Es bien sabido que todo espacio con producto interior de dimensión finita es un espacio de Hilbert [6], y por tal razón, las nociones geométricas que allí se tienen, se tratan de extrapolar a los espacios de Hilbert de dimensión infinita. los espacios de Hilbert proporcionan gran parte de la base teórica de la Mecánica Cuántica. Mencionaremos aquí, que los espacios de Hilbert proporcionan gran parte de la base teórica la Mecánica Cuántica y muchos de los conceptos de esta teorá están dados en términos de operadores lineales auto-adjuntos y no acotados. Como veremos adelante, un operador es una aplicación lineal de un espacio vectorial en si mismo. Un caso particular de operadores son los operadores auto adjuntos, estos entes matemáticos comparten muchas propiedades de los números reales y se ven a veces como una generalización de estos.

Estudiar a los operadores es de gran importancia por las distintas aplicaciones que tienen en otras ramas y ciencias como por ejemplo en la Teoría de Aproximación, en Optimización, Ecuaciones Diferenciales y en la mencionada mecánica Cuántica, por citar algunas.

La mecánica cuántica surgió en la última década del siglo XIX cuando se revelan dificultades para explicar con las leyes de la Física clásica (y con sus conceptos), el comportamiento de ciertos sistemas cuando éstos eran sometidos a un análisis basado en las propiedades de los

átomos o moléculas que las constituyen, esto es, los sistemas atómicos no pueden ser descritos usando la misma teoría que se usa para estudiar el comportamiento de los cuerpos macroscópicos como son los planetas, los automóviles, etc, esto se debe a que es imposible determinar al mismo tiempo la posición e ímpetu de cualquier partícula, siempre existe una incertidumbre que no puede ser ignorada (principio de Heisenberg). Esta situación llevó a sugerir una nueva dinámica de estas partículas que forman el microcosmos. En 1901, se comenzó a dar explicaciones de estas dificultades, el físico alemán Max Planck supuso la existencia del cuanto de energía con el fin de derivar una fórmula para la dependencia de la frecuencia observada con la energía emitida por un cuerpo negro. Einstein, en 1905, explico de manera sencilla y directa las características de la emisión fotoeléctrica. Bohr, Sommerfeld, Wilson, Broglie, Schrödinger, Heisenberg, entre otros, trabajaron para la formulación matemática de la mecánica cuántica no relativista.

Situados en este contexto, los objetivos de este trabajo son:

- 1) Estudiar a los espacios con producto interior, incluyendo algunos temas y resultados que consideramos importantes, ya sea por sus aplicaciones a la misma teoría, a la mecánica cuántica o por la belleza de los mismos. El estudio de estos temas se hace con un enfoque y profundidad distintos con el que se estudiaron en la licenciatura.
- 2) Estudiar a los operadores lineales auto-adjuntos en espacios euclideos y unitarios, dando algunos resultados sobre ellos.
- 3) Mostrar la aplicación de los operadores auto-adjuntos en la Mecánica cuántica.

El desarrollo de este trabajo se hace en tres capítulos los cuales son designados de la siguiente manera:

El Capítulo 1 lo asignamos al estudio de productos internos, sus representaciones y propiedades especiales. Analizaremos algunos espacios particulares dotados de un producto interno, así como también veremos el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt y formas bilineales en el espacio de funciones.

En el Capítulo 2 tratamos los espacios euclidianos y unitarios, en los cuales introduciremos los términos de ángulo y distancia sobre estos espacios. Aquí se presentan los operadores ortogonales y unitarios, en particular analizamos con más detalle a los operadores auto-adjuntos.

El Capítulo 3 lo dedicamos a la presentación de las leyes de la mecánica cuántica y la modelación matemática de sus postulados, teniendo como objetivo principal el estudio de los operadores auto-adjuntos de la mecánica cuántica. Y finalmente mostramos el ejemplo más importante de esta rama de la Física, importante en el sentido de ser uno de los pocos ejemplos que pueden resolverse explícitamente: el oscilador armónico, presentándolo en ambas formulaciones, la clásica y la cuántica.

Por otro lado, en este espacio quiero agradecer a mis directores de tesis, M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín y Dr. Rolando Jiménez Benítez (IMATE-UNAM) por la dedicación brindada durante el desarrollo de este trabajo. Mi agradecimiento también para mis sinodales, M.C. Vulfrano Tochiuitl Bueno, M.C. José Luciano Moyotl Coyomani y Dr. Jesús Fernando Tenorio Arvide por sus consejos y aportaciones a esta tesis. A todos mis maestros que durante mi estancia en esta institución me compartieron de su conocimiento.



# Índice general

<b>Prefacio</b>	<b>III</b>
<b>1. Espacios con producto interno</b>	<b>1</b>
1.1. Productos internos	1
1.2. Representación matricial y simetría	2
1.3. Ortogonalidad	4
1.4. Isometrías de espacios	5
1.5. Espacios particulares	6
1.5.1. Espacios ortogonales unidimensionales	7
1.5.2. Espacio Hermitiano unidimensional	8
1.5.3. Espacios simplécticos unidimensionales	9
1.5.4. Espacios simplécticos bidimensionales	9
1.6. Descomposición de espacios de dimensión finita	10
1.7. Invariantes de espacios métricos	12
1.8. Bases ortogonales y ortonormales	14
1.9. Formas cuadráticas	15
1.9.1. Reducción de una forma cuadrática a una suma de cuadrados	16
1.10. Algoritmo de ortogonalización y polinomios ortogonales	19
1.10.1. Algoritmo de Ortogonalización de Gram-Schmidt	19
1.11. Conjuntos ortogonales en el espacio de funciones	20
1.11.1. Polinomios trigonométricos	21
1.11.2. Polinomios de Legendre	22
1.11.3. Polinomios de Hermite	24
<b>2. Operadores</b>	<b>27</b>
2.1. Espacios Euclidianos	27
2.1.1. Ángulos y distancias en espacios euclidianos	29
2.1.2. Método de mínimos cuadrados	31
2.2. Espacios Unitarios	32
2.2.1. Ángulos en espacios unitarios	36
2.2.2. Distancias en espacios unitarios	36
2.3. Operadores ortogonales y unitarios	37
2.4. Operadores adjuntos y auto-adjuntos	42

2.4.1.	Operadores adjuntos en espacios con una forma bilineal . . . . .	42
2.5.	Operadores auto-adjuntos y productos internos . . . . .	44
<b>3.</b>	<b>Conceptos básicos de Mecánica Cuántica</b>	<b>47</b>
3.1.	El principio de incertidumbre de Heisenberg . . . . .	48
3.2.	Desarrollo de las leyes de la mecánica cuántica . . . . .	49
3.2.1.	El aspecto ondulatorio de las partículas . . . . .	49
3.2.2.	Complementariedad y el principio de correspondencia . . . . .	49
3.3.	Ecuación de Schrödinger para la partícula libre . . . . .	50
3.4.	Modelación matemática de los postulados de la mecánica cuántica . . . . .	50
3.4.1.	Valores promedio y el principio de incertidumbre . . . . .	52
3.4.2.	Operadores auto-adjuntos en la Mecánica Cuántica . . . . .	54
3.4.3.	Energía observable y la evolución temporal del sistema . . . . .	55
3.4.4.	Energía espectral y estados estacionarios de un sistema . . . . .	56
3.5.	Oscilador armónico . . . . .	56
3.5.1.	Oscilador armónico clásico . . . . .	56
3.5.2.	Oscilador armónico cuántico . . . . .	58
	<b>Conclusiones</b>	<b>65</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>66</b>



# Capítulo 1

## Espacios con producto interno

En este primer capítulo tratamos primordialmente el concepto de producto interno, sus propiedades y representaciones más comunes. Una vez definido el concepto de producto interno estudiaremos otros conceptos como ortogonalidad y ortonormalidad los cuales están determinados completamente por el producto interno que se esté trabajando. En este capítulo también se estudian formas bilineales y cuadráticas, así como el algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt para posteriormente estudiar formas bilineales en el espacio de funciones. Para mejor comprensión de este capítulo, se requiere conocer algunos conceptos básicos de álgebra lineal, como campo, espacio vectorial, bases, dimensión, transformaciones lineales [4].

### 1.1. Productos internos

En esta sección sólo se dará la definición de función multilinear y la definición de producto interno que más adelante veremos que es un caso particular de función multilinear.

**Definición 1.1.1.** Sean  $L_1, L_2, \dots, L_n$  y  $M$  espacios lineales sobre un campo arbitrario  $\mathbb{K}$ . Una función

$$f: L_1 \times L_2 \times \dots \times L_n \longrightarrow M$$

es llamada *función multilinear* si cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} f(l_1, \dots, l_i + l'_i, l_{i+1}, \dots, l_n) &= f(l_1, \dots, l_i, l_{i+1}, \dots, l_n) + f(l_1, \dots, l'_i, l_{i+1}, \dots, l_n) \\ y \quad f(l_1, \dots, \alpha l_i, l_{i+1}, \dots, l_n) &= \alpha f(l_1, \dots, l_i, l_{i+1}, \dots, l_n) \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Es decir, la función es lineal para cualquiera de los argumentos  $l_i \in L_i$  como argumento principal, mientras  $l_j \in L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $j \neq i$  se mantienen fijos.

En el caso de que  $M = \mathbb{K}$  la función multilinear es llamada *funcional multilinear* o *forma multilinear*.

Un *operador* es un caso particular de la Definición 1.1.1 cuando  $n = 1$  y  $M = L_1$ .

# CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

## 1.2. REPRESENTACIÓN MATRICIAL Y SIMETRÍA

---

**Definición 1.1.2.** Sea  $L$  un espacio complejo. El espacio complejo conjugado  $\bar{L}$  es el conjunto  $L$  con la misma estructura de grupo aditivo, pero con una nueva multiplicación por escalar  $a * l$  dada por:

$$a * l = \bar{a} * l, \text{ para todo } a \in \mathbb{C} \text{ y } l \in L.$$

**Notación:** Denotaremos por  $\mathcal{L}(L, M)$  al conjunto de funciones lineales de  $L$  a  $M$  y por  $L^*$  al conjunto de funciones lineales de  $L$  a  $\mathbb{K}$ .

En particular estamos interesados en funciones bilineales,  $L \times L \rightarrow \mathbb{K}$ .

**Definición 1.1.3.** Un producto interno del espacio  $L$  es una función bilineal  $g : L \times L \rightarrow \mathbb{K}$ , y para  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $g : L \times \bar{L} \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $\bar{L}$  es el espacio conjugado complejo de  $L$ .

El producto interno  $L \times \bar{L} \rightarrow \mathbb{C}$  es más conocido como una *función sesquilineal*, esto es,  $g : L \times \bar{L} \rightarrow \mathbb{C}$ : lineal con respecto al primer argumento y semilineal con respecto al segundo argumento, es decir,  $g(\alpha l_1, \beta l_2) = \alpha \bar{\beta} g(l_1, l_2)$ .

## 1.2. Representación matricial y simetría

En la construcción de la prueba de la siguiente proposición se establece una forma de representar productos internos sobre algún espacio con ciertas condiciones por medio de matrices Gram las cuales definimos a continuación.

**Definición 1.2.1.** Sean  $(L, g)$  un espacio lineal de dimensión finita con producto interno  $g$  y  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base fija de  $L$ . La matriz  $G = (g(e_i, e_j))$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , es llamada la matriz Gram de la base  $\beta$  con respecto a  $g$ .

**Proposición 1.2.1.** Existe una biyección entre productos internos (bilineales o sesquilineales) sobre espacios de dimensión  $n$  con una base y matrices de  $n \times n$ .

*Demostración.* Sean  $L$  un espacio de dimensión finita y  $\beta = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base fija de él,  $\Lambda = \{g \mid g : L \times L \rightarrow \mathbb{K} \text{ producto interno}\}$  y  $M_{n \times n}(\mathbb{K})$  las matrices de  $n \times n$  sobre el campo  $\mathbb{K}$ . Ahora, si tomamos  $G = (g(e_i, e_j))$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} g(\vec{x}, \vec{y}) &= g\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g(e_i, e_j) \\ &= [\vec{x}]_{\beta}^t G [\vec{y}]_{\beta}. \end{aligned}$$

# CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

## 1.2. REPRESENTACIÓN MATRICIAL Y SIMETRÍA

donde la matriz  $G$  es la matriz Gram de la base  $\beta$  con respecto a  $g$ .

Por otro lado, la función  $F : \Lambda \longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{K})$  dada por  $F(g) = (g(e_i, e_j))$  es una biyección. En efecto,  $F$  es inyectiva, pues si  $F(g_1) = F(g_2)$  entonces

$$g_1(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x}]_{\beta}^t (g_1(e_i, e_j)) [\vec{y}]_{\beta} = [\vec{x}]_{\beta}^t (g_2(e_i, e_j)) [\vec{y}]_{\beta} = g_2(\vec{x}, \vec{y}).$$

Probemos que  $F$  es sobreyectiva. Sea  $G = (g_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  entonces la función  $g : L \times L \longrightarrow \mathbb{K}$  definida por  $g(\vec{x}, \vec{y}) = [\vec{x}]_{\beta}^t (g_{ij}) [\vec{y}]_{\beta}$  es un producto interno y además  $F(g) = G$ , pues,

$$g(e_i, e_j) = (0, 0, \dots, 1_i, \dots, 0)(g_{ij})(0, 0, \dots, 1_j, \dots, 0)^t = g_{ij}$$

así  $F$  es sobreyectiva y por lo tanto  $F$  es biyectiva. De manera análoga se demuestra para el caso sesquilineal. ■

Ahora veamos que relación podemos establecer entre productos internos sobre un espacio lineal  $L$  y el conjunto de funciones lineales de  $L$  al campo  $\mathbb{K}$  donde esté definido ( $L^*$ ). Sea  $g : L \times L \longrightarrow \mathbb{K}$  un producto interno, entonces a cada vector  $l \in L$  le asociamos una función  $g_l : L \longrightarrow \mathbb{K}$  dada por

$$g_l(m) = g(l, m), m \in L.$$

Esta función  $g_l$  es lineal en el caso bilineal y antilineal en el caso sesquilineal, esto es,  $g_l \in L^*$ , o respectivamente  $g_l \in \bar{L}^*$  para todo  $l$ .

Más aún, la función

$$\begin{aligned} \tilde{g} : L &\longrightarrow L^* \text{ o } L \longrightarrow \bar{L}^* : \\ l &\longrightarrow g_l = \tilde{g}(l) \end{aligned}$$

es lineal y define de manera única a  $g$  de acuerdo a la fórmula

$$g(l, m) = (\tilde{g}(l), m)$$

donde los paréntesis externos de la derecha indican la función bilineal  $L^* \times L \longrightarrow \mathbb{K}$  o  $L^* \times L \longrightarrow \mathbb{C}$ .

Por otro lado, en nuestro estudio, son de gran importancia propiedades especiales de los productos internos que nos permiten una clasificación de ellos. Una de estas propiedades es la propiedad de simetría, una permutación del argumento en un producto interno  $g$  define un nuevo producto interno  $g^t$ :

$$g^t(l, m) = g(m, l).$$

Pero en el caso sesquilineal esta operación también cambia la posición de linealidad y sesquilinealidad de los argumentos; entonces para que no suceda esto es conveniente estudiar  $\bar{g}^t$ :

$$\bar{g}^t(l, m) = \overline{g(m, l)}.$$

En  $\bar{g}^t$  el argumento lineal pasará a ocupar la primera posición, mientras que el argumento semilineal ocupará la segunda posición .

Las operaciones  $g \longrightarrow g^t$  o  $g \longrightarrow \bar{g}^t$  se pueden describir en términos de matrices Gram: las operaciones correspondientes son  $G \longrightarrow G^t$  o  $G \longrightarrow \bar{G}^t$ , respectivamente (esto es asumiendo que  $g, g^t$  y  $\bar{g}^t$  están escritas en términos de alguna base  $\beta$  de  $L$ ), en efecto:

$$\begin{aligned} g^t(\vec{x}, \vec{y}) &= g(\vec{y}, \vec{x}) = [\vec{y}]_{\beta}^t G [\vec{x}]_{\beta} = ([\vec{y}]_{\beta}^t G [\vec{x}]_{\beta})^t = [\vec{x}]_{\beta}^t G^t [\vec{y}]_{\beta}. \\ \bar{g}^t(\vec{x}, \vec{y}) &= \overline{g(\vec{y}, \vec{x})} = \overline{[\vec{y}]_{\beta}^t G [\vec{x}]_{\beta}} = (\overline{[\vec{y}]_{\beta}^t G [\vec{x}]_{\beta}})^t = [\vec{x}]_{\beta}^t \bar{G}^t [\vec{y}]_{\beta}. \end{aligned}$$

Nosotros nos interesaremos exclusivamente con productos internos que satisfacen una de las condiciones especiales de simetría relativa a esta operación:

1.  $g^t = g$ , este producto interno es llamado *simétrico* u *ortogonal*, y la geometría de espacios con un producto interno simétrico es llamada *Geometría ortogonal*. Los productos internos simétricos son definidos por matrices simétricas Gram  $G$ .
2.  $g^t = -g$ , este producto interno es llamado *antisimétrico* o *simpléctico*, y la correspondiente geometría es llamada *Geometría simpléctica*, a estos productos les corresponden matrices Gram antisimétricas.
3.  $\bar{g}^t = g$ , tales productos internos son llamados *Hermitianos simétricos* o simplemente *Hermitianos* y las correspondientes geometrías son llamadas *Geometrías Hermitianas*, a ellos corresponden las matrices Gram Hermitianas. Notemos que si seguimos la condición  $\bar{g}^t = g$  es decir  $\bar{g}(l, l) = g(l, l)$  para todo  $l \in L$ , entonces, todo valor de  $g(l, l)$  es real.

Con esto nos damos cuenta de cómo la propiedad de simetría relativa nos caracteriza completamente el producto interno y con ellos las correspondientes geometrías.

## 1.3. Ortogonalidad

Ahora analizaremos el concepto de ortogonalidad, el cual nos será muy útil en las siguientes definiciones y caracterizaciones de ciertos espacios.

**Definición 1.3.1.** *Sea  $(L, g)$  un espacio lineal con un producto interno, los vectores  $l_1, l_2 \in L$  son ortogonales (relativos de  $g$ ), si  $g(l_1, l_2) = 0$ .*

*Los subespacios  $L_1, L_2 \subset L$  se dice que son ortogonales si  $g(l_1, l_2) = 0$  para todo  $l_1 \in L_1$  y  $l_2 \in L_2$ .*

La principal razón de utilizar sólo productos internos con alguna de las propiedades de simetría mencionadas en la sección 1.2 es porque la propiedad de ortogonalidad de vectores (o subespacios) es simétrico con respecto a estos vectores (o subespacios), en efecto:

Si  $g^t = \pm g$  o  $g^t = \bar{g}$ , entonces

$$g(l, m) = 0 \Leftrightarrow \pm g^t(l, m) = 0. \Leftrightarrow g(m, l) = 0.$$

De manera análoga en el caso Hermitiano.

**Definición 1.3.2. a)** *El kernel o núcleo de un producto interno  $g$  en un espacio  $L$  es el conjunto de todos los vectores  $l_0 \in L$  tal que  $l_0$  es ortogonal a todo vector  $l$  en  $L$  y lo denotaremos por  $\ker(g)$ .*

**b)** *El producto interno  $g$  es no degenerado si el kernel de  $g$  es trivial, esto es, sólo consiste del vector cero. En caso contrario  $g$  se llama degenerado.*

**c)** *El espacio  $(L, g)$  es degenerado si  $g$  es degenerado.*

**Proposición 1.3.1.** *El kernel de un producto interno  $g$  coincide con el kernel de la función lineal  $\tilde{g} : L \rightarrow L^*$  ( $L \rightarrow \bar{L}^*$ ).*

*Demostración.* En efecto,  $l_0 \in \ker(g)$  si y sólo si  $g(l_0, l) = 0$ , para todo  $l \in L$ , o equivalentemente,  $g_{l_0}(l) = g(l_0, l) = 0$ , para todo  $l \in L$ , es decir,  $l_0 \in \ker(\tilde{g})$ . ■

Por lo tanto, de la no degeneración de la forma  $g$  puede especificar el isomorfismo  $L \rightarrow L^*$  (o  $\bar{L}^*$ ).

**Definición 1.3.3.** *El rango del producto interno  $g$  se define como la dimensión de la imagen de  $\tilde{g}$ , o como el rango de la matriz Gram  $G$  en alguna base.*

## 1.4. Isometrías de espacios

Cuando estudiamos espacios lineales con producto interno nos podemos hacer ciertas preguntas como: ¿Habrá una relación entre estos espacios y sus productos internos?, y si existe, ¿cuál es esta relación?. Bueno, pues en esta sección definimos la relación de isometría la cual está ligada fuertemente con los productos internos de los espacios lineales y aunque abordaremos brevemente esta sección nos será de gran utilidad.

**Definición 1.4.1.** *Sean  $(L_1, g_1)$  y  $(L_2, g_2)$  dos espacios lineales con producto interno. Diremos que  $f$  es una isometría entre los espacios  $L_1$  y  $L_2$ , si es un isomorfismo lineal ( $f : L_1 \cong L_2$ ) que preserva los productos internos, esto es,*

$$g_1(l, l') = g_2(f(l), f(l')) \quad \text{para todo } l, l' \in L_1.$$

Diremos que dos espacios son *isométricos*, si existe una isometría entre ellos. Las isometrías tienen propiedades importantes de las cuales algunas se muestran en los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 1.4.1.** *La identidad es una isometría.*

**Ejemplo 1.4.2.** *La composición de isometrías es una isometría.*

*Demostración.* Sean  $(L_1, g_1)$ ,  $(L_2, g_2)$  y  $(L_3, g_3)$  espacios lineales con producto interno y  $f_1 : L_1 \rightarrow L_2$ ,  $f_2 : L_2 \rightarrow L_3$  dos isometrías, entonces  $f_2 \circ f_1 : L_1 \rightarrow L_3$  y además

$$\begin{aligned} g_3(f_2 \circ f_1(l), f_2 \circ f_1(l')) &= g_3(f_2(f_1(l)), f_2(f_1(l'))) \\ &= g_2(f_1(l), f_1(l')) \\ &= g_1(l, l') \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f_2 \circ f_1$  es una isometría. ■

**Ejemplo 1.4.3.** *La inversa de una isometría es una isometría.*

*Demostración.* Sea  $f$  una isometría de  $(L_1, g_1)$  a  $(L_2, g_2)$ , es decir,

$$g_1(l, l') = g_2(f(l), f(l')) \quad \text{para todo } l, l' \in L_1$$

Por otro lado,  $f^{-1} : L_2 \rightarrow L_1$  existe y es un isomorfismo, entonces para cada  $m, m' \in L_2$  se cumple:

$$\begin{aligned} g_2(m, m') &= g_2(f(f^{-1}(m)), f(f^{-1}(m'))) \\ &= g_1(f^{-1}(m), f^{-1}(m')). \end{aligned}$$

De aquí que  $f^{-1}$  es una isometría. ■

Como consecuencia directa de las propiedades mostradas con los ejemplos, tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 1.4.1.** *Sea  $ISO((L, g)) = \{f : L \rightarrow L \mid f \text{ isometría}\}$ , entonces  $\langle ISO((L, g)), \circ, \rangle$  es un grupo.*

## 1.5. Espacios particulares

Dedicaremos un poco de atención al estudio de algunos espacios particulares, los cuales son de dimensión 1 ó 2 y que están dotados de alguno de los productos internos (ortogonal, simplectico o Hermitiano) con el fin de observar cómo están caracterizados sus productos internos tanto en el campo real como en el campo complejo, y que posteriormente nos servirán cuando hallamos la descomposición de un espacio como suma de estos espacios particulares.

### 1.5.1. Espacios ortogonales unidimensionales

Sea  $(L, g)$  un espacio lineal sobre  $\mathbb{K}$  con un producto interno ortogonal  $g$  y  $\dim L = 1$ . Tratemos de ver como es su producto interno, para esto elegimos un vector  $l$  no cero en  $L$ .

Si  $g(l, l) = 0$  entonces  $g \equiv 0$ , esto es  $g$  es degenerado e igual a cero.

Si  $g(l, l) = a \neq 0$ , entonces para cualquier  $x \in \mathbb{K}$ ,  $g(xl, xl) = ax^2$ , de manera que todos los valores de  $g(l, l)$  con  $l \neq 0 \in L$  forman en el grupo multiplicativo  $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$  del campo  $\mathbb{K}$ , una clase lateral con respecto al subgrupo que consiste de cuadrados, es decir,  $\{ax^2 | x \in \mathbb{K}^*\} \in \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$  [4]. Esta clase lateral caracteriza completamente la no degeneración del producto interno isométrico en el espacio unidimensional  $L$ .

**Proposición 1.5.1.** *Para  $(L_1, g_1)$  y  $(L_2, g_2)$  no degenerados, dos clases laterales coinciden si y sólo si  $L_1$  y  $L_2$  son isométricos.*

*Demostración.* Supongamos que dos clases laterales coinciden, es decir,  $g_1(l_1, l_1) = ax^2$  y  $g_2(l_2, l_2) = ay^2$ , donde  $l_i \in L_i$ . La función  $f : L_1 \rightarrow L_2$  dada por  $f(l_1) = y^{-1}xl_2$  define una isometría de  $L_1$  a  $L_2$ . En efecto,  $f$  es inyectiva pues si  $f(l) = f(l')$ , esto es,  $y^{-1}xl_2 = y^{-1}x'l_2$  entonces  $x_l = x_{l'}$  y  $g_1(l, l) = ax_l^2 = g_1(l', l')$ , de aquí se tiene que  $l = l'$ .

Ahora probemos que  $f$  es sobreyectiva. Sea  $l \in L_2$ , entonces  $l = \alpha l_2$  para algún  $\alpha \in \mathbb{K}$ , y si tomamos  $x_l = y\alpha$  obtenemos  $l = y^{-1}x_l l_2$  y

$$g_1\left(\frac{x_l}{y}l_1, \frac{x_l}{y}l_1\right) = \frac{x_l^2}{y^2}ax^2 = ax_l^2$$

y por lo tanto  $f\left(\frac{x_l}{y}l_1\right) = y^{-1}x_l l_2 = l$ .

Finalmente probemos que efectivamente,

$$g_2(f(l^1), f(l^2)) = g_1(l^1, l^2) \quad \text{para } l^1, l^2 \in L_1 \text{ arbitrarios}$$

Sean  $l^1, l^2 \in L_1$  arbitrarios, si  $g_1(l^1, l^1) = ax_1^2$ ,  $g_1(l^2, l^2) = ax_2^2$ , entonces  $l^1 = \frac{x_1}{x}l_1$ ,  $l^2 = \frac{x_2}{x}l_1$  y además cumple que:

$$\begin{aligned} g_2(f(l^1), f(l^2)) &= g_2(y^{-1}x_1 l_2, y^{-1}x_2 l_2) \\ &= y^{-1}x_1 y^{-1}x_2 g_2(l_2, l_2) \\ &= (y^{-1})^2 y^2 a x_1 x_2 \\ &= a x_1 x_2 \\ &= \frac{x_1}{x} \frac{x_2}{x} a x^2 \\ &= g_1\left(\frac{x_1}{x}l_1, \frac{x_2}{x}l_1\right) \\ &= g_1(l^1, l^2) \end{aligned}$$

y por lo tanto,  $L_1$  y  $L_2$  son isométricos.

La condición necesaria es inmediata. ■

# CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

## 1.5. ESPACIOS PARTICULARES

---

Ahora, como las clases de  $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$  son las que caracterizan al producto interno, entonces para cuando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  y  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 &= \{a(\mathbb{R}^*)^2 | a \in \mathbb{R}^*\} \\ &= \{a(\mathbb{R}^*)^2 | a \in \mathbb{R}^*, a > 0\} \cup \{a(\mathbb{R}^*)^2 | a \in \mathbb{R}^*, a < 0\} \\ &= \{(1)(\mathbb{R}^*)^2\} \cup \{(-1)(\mathbb{R}^*)^2\} \\ &= \{\pm 1\}\end{aligned}$$

y  $\mathbb{C}^* = (\mathbb{C}^*)^2$ . Por lo que se tienen los siguientes casos particulares:

Cualquier espacio ortogonal unidimensional sobre  $\mathbb{R}$  es isométrico al espacio coordenado unidimensional con uno de los tres productos:  $xy$ ,  $-xy$ ,  $0$ .

Cualquier espacio ortogonal unidimensional sobre  $\mathbb{C}$  es isométrico al espacio coordenado con uno de los dos productos internos:  $xy$ ,  $0$ .

### 1.5.2. Espacio Hermitiano unidimensional

Consideremos  $(L, g)$  un espacio lineal sobre  $\mathbb{C}$  con un producto interno Hermitiano  $g$  y  $\dim L = 1$ . Entonces de igual manera que en el caso ortogonal el objetivo es ver cómo es explícitamente  $g$ .

La degeneración de  $g$  es equivalente a que  $g \equiv 0$ , si por otra parte, la forma  $g$  es no degenerada, entonces el conjunto de valores de  $g(l, l)$  para vectores no cero  $l \in L$  es la clase lateral del subgrupo  $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}^* | x > 0\}$  en el grupo  $\mathbb{C}^*$ , pues  $g(al, al) = a\bar{a}g(l, l) = |a|^2g(l, l)$  y  $|a|^2$  (módulo de  $a$ ) corre a través de todos los valores en  $\mathbb{R}_+^*$ , cuando  $a \in \mathbb{C}$ . Por otro lado, cualquier número complejo  $z$  no cero está representado de manera única en la forma  $re^{i\phi}$ , donde  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , mientras  $e^{i\phi}$  es el círculo unitario complejo, el cual es denotado por

$$\mathbb{C}_1^* = \{z \in \mathbb{C}^* | |z| = 1\}.$$

En el lenguaje de grupos esto define una descomposición directa  $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}_1^*$  y un isomorfismo  $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}_1^*$  [4], en otras palabras, cada elemento complejo distinto de cero puede ser representado como un elemento del círculo unitario multiplicado por un escalar, e inversamente para cada clase lateral puede tomarse su representante en el círculo unitario de manera única. Así la no degeneración de la forma sesquilineal es clasificada por números complejos con módulo unitario. Sin embargo, no hemos tomado completamente las propiedades Hermitianas requeridas, entonces agregando la propiedad  $g(l, l) = g(\bar{l}, l)$ , esto es, los valores son reales, por esta razón las formas Hermitianas corresponden sólo a los números  $\pm 1 \in \mathbb{C}_1^*$  como en el caso ortogonal sobre  $\mathbb{R}$ .

En conclusión:

Cualquier espacio Hermitiano unidimensional sobre  $\mathbb{C}$  es isométrico al espacio coordenado unidimensional con uno de los tres productos internos:  $x\bar{y}$ ,  $-x\bar{y}$ ,  $0$ .

---



### 1.5.3. Espacios simplécticos unidimensionales

Antes de empezar con el análisis de estos espacios, recordemos qué es la característica de un campo que posteriormente utilizaremos.

**Definición 1.5.1.** Sea  $\mathbb{K}$  un campo. La característica de  $\mathbb{K}$  ( $Carac(\mathbb{K})$ ) se define como el siguiente número positivo (cuando existe)

$$\min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \underbrace{a + a + \cdots + a}_n = 0, \forall a \in \mathbb{K}\right\}.$$

Si no existe este número diremos que el campo tiene característica 0.

Ahora sea  $(L, g)$  un espacio lineal sobre  $\mathbb{K}$  con un producto interno simpléctico  $g$  y  $\dim L = 1$ . En este caso cualquier forma antisimétrica en un espacio unidimensional sobre un campo con característica  $\neq 2$  es igual a cero. En efecto,

$$\begin{aligned} g(l, l) = -g(l, l) &\Rightarrow 2g(l, l) = 0 \Rightarrow g(l, l) = 0 \\ g(al, bl) = abg(l, l) &= 0 \Rightarrow g \equiv 0. \end{aligned}$$

En lo que respecta a la característica igual a 2, la condición de antisimetría  $g^t(l, m) = -g(l, m)$ , que en este caso es equivalente a la condición de simetría  $g(l, m) = g(m, l)$ , pues,

$$g(l, m) - g(l, m) = g(l, m) + g^t(l, m) = 0.$$

de manera que sobre estos campos una geometría simpléctica es igual a una geometría ortogonal.

### 1.5.4. Espacios simplécticos bidimensionales

Para espacios simplécticos unidimensionales no se obtuvo mucha información sobre su producto interno, entonces nos interesamos en ver qué pasa en dimensión 2 ya que más adelante se muestra que son los únicos de dimensión 2 que se utilizan en este trabajo.

Sea  $(L, g)$  un espacio bidimensional con una forma antisimétrica  $g$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  con característica  $\neq 2$ . Si  $g$  es degenerado, entonces es un producto nulo. En efecto, sea  $l \neq 0$  un vector tal que  $g(l, m) = 0$  para todo  $m \in L$ , y  $\{l, l'\}$  una base de  $L$ . Como  $Carac(\mathbb{K}) \neq 2$   $g(l', l') = g(l, l) = 0$ , entonces para cualquier  $a, b, a', b' \in \mathbb{K}$  tenemos

$$\begin{aligned} g(al + a'l', bl + b'l') &= abg(l, l) + ab'g(l, l') - a'bg(l, l') + a'b'g(l', l') \\ &= 0 \end{aligned}$$

por lo tanto  $g \equiv 0$ .

Ahora sea  $g$  no cero y por tanto no degenerado, existe un par de vectores  $e_1, e_2$  tal que  $g(e_1, e_2) = a \neq 0$  e incluso con  $a = 1$ : ( $g(a^{-1}e_1, e_2) = a^{-1}a = 1$ ). Sea  $g(e_1, e_2) = 1$  entonces los vectores  $e_1$  y  $e_2$  son linealmente independientes y por tanto forman una base de  $L$ . En coordenadas relativas de esta base el producto interno  $g$  se escribe de la forma

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.6. DESCOMPOSICIÓN DE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA**

---

$$g(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

y su matriz Gram es

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente tenemos el siguiente resultado:

Cualquier espacio simpléctico bidimensional sobre un campo de característica  $\neq 2$  es isométrico al espacio coordenado  $\mathbb{K}^2$  con el producto interno  $x_1y_2 - x_2y_1$  o cero.

## 1.6. Descomposición de espacios de dimensión finita

El propósito de esta sección es la clasificación de espacios ortogonales, Hermitianos y simplécticos, todos de dimensión finita.

Sea  $(L, g)$  un espacio con producto interno y sea  $L_0$  un subespacio de  $L$ . La restricción de  $g$  a  $L_0$  es un producto interno en  $L_0$ . Llamaremos a  $L_0$  *no degenerado* si la restricción de  $g$  a  $L_0$  es no degenerada e *isotrópica* si la restricción de  $g$  a  $L_0$  es igual a cero. Todo esto tiene sentido siempre y cuando  $L$  sea no degenerado, entonces la restricción de  $g$  a un subespacio no trivial  $L_0$  puede ser degenerada o cero. Por ejemplo:

1. En el caso simpléctico todo subespacio unidimensional es degenerado.
2. En un espacio ortogonal  $\mathbb{R}^2$  con el producto  $x_1y_1 - x_2y_2$  el subespacio generado por el vector  $(1, -1)$  es degenerado.

**Definición 1.6.1.** *El complemento ortogonal del subespacio  $L_0 \subset L$  es el conjunto*

$$L_0^\perp = \{l \in L \mid g(l_0, l) = 0 \text{ para todo } l_0 \in L_0\}$$

claramente  $L_0^\perp$  es un subespacio lineal de  $L_0$ .

**Proposición 1.6.1.** *Sea  $(L, g)$  un espacio de dimensión finita.*

- a) *Si el subespacio  $L_0 \subset L$  es no degenerado, entonces  $L = L_0 \oplus L_0^\perp$ ,  $\oplus$  denota la suma directa*
- b) *Si ambos subespacios  $L_0$  y  $L_0^\perp$  son no degenerados entonces  $(L_0^\perp)^\perp = L_0$ .*

*Demostración.* **a)** Sea  $\tilde{g} : L \rightarrow L^*$  ( $\bar{L}^*$ ) la función asociada con  $g$ . Denotaremos por  $\tilde{g}_0$  a la restricción de  $\tilde{g}$  a  $L_0$ ,  $\tilde{g}_0 : L_0 \rightarrow L^*$  ( $\bar{L}^*$ ), si  $L_0$  es no degenerado entonces  $\ker(\tilde{g}_0) = 0$ , pues  $l_0 \in \ker(\tilde{g}_0)$  entonces  $\tilde{g}_0(l_0) = g_{l_0} = 0$ , esto implica que,  $g_{l_0}(m) = g(l_0, m) = 0$  para todo  $m \in L$ , en particular para todo  $m \in L_0$ , así  $l_0 = 0$ . De aquí que cuando  $l_0$  se mueve a través de  $L_0$ , las formas lineales  $g(l_0, *)$  son funciones de segundo argumento sobre  $L$  o  $\bar{L}$  que se mueven en un espacio de dimensión  $\dim L_0$  de formas lineales. Ahora como  $L_0^\perp$  es la intersección de los núcleos de estas formas, entonces

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.6. DESCOMPOSICIÓN DE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA**

---

$$\dim L_0 + \dim L_0^\perp = \dim L$$

Por otro lado, de la no degeneración de  $L_0$  se sigue que  $L_0 \cap L_0^\perp = \{0\}$  porque  $L_0 \cap L_0^\perp$  es el kernel de la restricción de  $g$  a  $L_0$ . Por esta razón, la suma  $L_0 \oplus L_0^\perp$  es una suma directa, [4], además es de igual dimensión que  $L$ , por lo tanto  $L_0 \oplus L_0^\perp = L$ .

- b) De la definición es claro que  $L_0 \subset (L_0^\perp)^\perp$ . Por otro lado si  $L_0$  y  $L_0^\perp$  son no degenerados, entonces de (a)

$$\dim(L_0^\perp)^\perp = \dim L - \dim L_0^\perp = \dim L_0$$

y por tanto  $(L_0^\perp)^\perp = L_0$ . ■

**Teorema 1.6.1.** *Sea  $(L, g)$  un espacio de dimensión finita (sobre un campo con característica  $\neq 2$ ) ortogonal (Hermitiano o simpléctico). Entonces existe una descomposición de  $L$  como suma directa de subespacios ortogonales a pares*

$$L = L_1 \oplus \dots \oplus L_m,$$

*estos subespacios son unidimensionales en el caso ortogonal y Hermitiano y unidimensional degenerado o bidimensional no degenerado en el caso simpléctico.*

*Demostración.* El caso que  $\dim L = 1$  es trivial. Sea  $\dim L \geq 2$ , si  $g$  es cero, entonces nada hay que probar, basta con tomar cada  $L_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) como el generado de un elemento  $e_i \in \{e_1, \dots, e_m\}$  base de  $L$ . Si  $g$  no es cero, entonces en el caso simpléctico existe un par de vectores  $l_1, l_2 \in L$  tal que  $g(l_1, l_2) \neq 0$ ; en tal caso (por sección 1.5.4) el subespacio  $L_0$  generado por  $l_1, l_2$  es no degenerado y por a) de la Proposición 1.6.1  $L = L_0 \oplus L_0^\perp$ . Aplicando de nuevo esta descomposición para  $L_0^\perp$  de manera inductiva obtendremos la descomposición deseada de  $L$ .

En el caso ortogonal y Hermitiano probemos la existencia de un subespacio unidimensional no degenerado  $L_0$ , lo cual se sigue de la no trivialidad de  $g$ . Después de esto,  $L$  se puede representar como  $L = L_0 \oplus L_0^\perp$  y aplicamos los argumentos anteriores a  $L_0^\perp$ , esto es, inducción sobre la dimensión de  $L_0^\perp$  y así obtendremos la representación deseada. En efecto, supongamos que  $g(l, l) = 0$  para todo  $l \in L$ , entonces para todo  $l_1, l_2 \in L$  se tiene que

$$0 = g(l_1 + l_2, l_1 + l_2) = g(l_1, l_1) + 2g(l_1, l_2) + g(l_2, l_2) = 2g(l_1, l_2)$$

o

$$0 = g(l_1 + l_2, l_1 + l_2) = g(l_1, l_1) + 2\text{Reg}(l_1, l_2) + g(l_2, l_2) = 2\text{Reg}(l_1, l_2)$$

donde  $\text{Reg}(l_1, l_2)$  es la parte real de  $g(l_1, l_2)$ .

En el caso ortogonal se sigue de manera inmediata que  $g(l_1, l_2) = 0$ . En el caso Hermitiano sólo tenemos que  $\text{Reg}(l_1, l_2) = 0$ , esto es,  $g(l_1, l_2) = ia$   $a \in \mathbb{R}$ . Pero si  $a \neq 0$ , entonces

$$0 = \text{Reg}((ia)^{-1}l_1, l_2) = \text{Re}(ia)^{-1}g(l_1, l_2) = 1$$

lo cual no puede ser, así que  $g \equiv 0$ , lo cual es una contradicción. ■

En sí, la descomposición en suma directa ortogonal de un espacio, no indica que sea única, excepto para los casos triviales de dimensión 1 (o 2 en el caso simpléctico).

Sobre campos generales, en el caso de una geometría ortogonal, la colección de invariantes  $a_i \in \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$  que caracterizan la restricción de  $g$  al espacio unidimensional  $L_i$ , que también no es único. Por lo tanto, la clasificación de espacios ortogonales, depende fuertemente de las propiedades del campo.

## 1.7. Invariantes de espacios métricos

Sea  $(L, g)$  un espacio con producto interno. Supongamos que  $n = \dim L$ ,  $r_0 = \dim L_0$ , donde  $L_0$  es el kernel de la forma  $g$ .

Introduciremos dos invariantes adicionales, refiriéndonos a la geometría ortogonal, para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , y a la geometría Hermitiana:  $r_+$  y  $r_-$ , el número de subespacios unidimensionales positivos y negativos en la descomposición de  $L$  como suma ortogonal directa del Teorema 1.6.1.

Obviamente,  $r_0 \leq n$  y  $n = r_0 + r_+ + r_-$  para geometrías Hermitianas y ortogonales sobre  $\mathbb{R}$ . La tripleta  $(r_0, r_+, r_-)$  es llamada *signatura* del espacio. Cuando  $r_0 = 0$ ,  $(r_+, r_-)$  es también llamada *signatura*.

**Teorema 1.7.1. a)** *Los espacios simplécticos sobre un campo arbitrario, así como los espacios ortogonales sobre  $\mathbb{C}$  están determinados salvo isometrías por dos enteros  $n, r_0$ , estos son, las dimensiones del espacio y del kernel del producto interno.*

**b)** *Los espacios ortogonales sobre  $\mathbb{R}$  y los espacios Hermitianos sobre  $\mathbb{C}$  están determinados salvo isometrías por la signatura  $(r_0, r_+, r_-)$ , la cual no depende de la descomposición ortogonal.*

*Demostración. a)* Sea  $(L, g)$  un espacio ortogonal o simpléctico sobre  $\mathbb{C}$ . Tenemos que  $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$  (por el Teorema 1.6.1.) Debemos probar que  $r_0$  es igual al número de espacios unidimensionales en la descomposición que son degenerados para  $g$ .

En efecto, la suma de estos espacios  $L_0 = \bigoplus_{i=1}^{r_0} L_i$  coincide con el kernel de  $g$ . Claramente la suma de estos subespacios  $L_i \in L_0$  está contenida en el kernel de  $g$  ya que todos los elementos de  $L_0$  son ortogonales tanto para  $L_0$  como para los términos restantes. Por otro lado, si  $L_0 = \bigoplus_{i=1}^{r_0} L_i$  y  $l = \sum_{k=1}^n l_k$ ,  $l_k \in L_k$ , entonces existe  $j > r_0$ ,  $l_j \neq 0$ , tal que

$$g(l, l_j) = g(l_j, l_j) \neq 0$$

en el caso ortogonal y existe un vector  $l'_j \in L_j$  tal que

$$g(l, l'_j) = g(l_j, l'_j) \neq 0$$

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
1.7. INVARIANTES DE ESPACIOS MÉTRICOS

---

en el caso simpléctico, por que de lo contrario el kernel de la restricción de  $g$  a  $L_j$  debería ser nula de acuerdo a los casos particulares estudiados en las secciones 1.6.1 y 1.6.3 respectivamente, contradiciendo el hecho de que  $j > r_0$ . Por lo tanto  $l \notin \ker(g)$  y así  $L_0 = \ker(g)$ .

Si ahora  $(L, g)$  y  $(L', g')$  son dos espacios con  $n$  y  $r_0$  iguales, entonces después de sus descomposiciones como sumas ortogonales  $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$  y  $L' = \bigoplus_{i=1}^n L'_i$ , para las que  $\ker(g) = \bigoplus_{i=1}^{r_0} L_i$  y  $\ker(g') = \bigoplus_{i=1}^{r_0} L'_i$ , podemos definir la isometría de  $(L, g)$  a  $(L', g')$  como la suma de isometrías  $\bigoplus f_i$ ,  $f_i : L_i \rightarrow L'_i$ .

- b) Ahora sean  $(L, g)$  y  $(L', g')$  un par de espacios ortogonales sobre  $\mathbb{R}$  o espacios Hermitianos sobre  $\mathbb{C}$  con las signaturas  $(r_0, r_+, r_-)$  y  $(r'_0, r'_+, r'_-)$  definidas de acuerdo a algunas descomposiciones ortogonales  $L = \bigoplus L_i$ ,  $L' = \bigoplus L'_i$ .

Asumamos que existe una isometría entre estos espacios. Entonces en primer lugar,  $\dim L = \dim L'$ , esto es,  $r_0 + r_+ + r_- = r'_0 + r'_+ + r'_-$ . Además siguiendo el procedimiento de a), se tiene que  $r_0$  es igual a la dimensión del kernel de  $g$  y  $r'_0$  igual a la dimensión del kernel de  $g'$ , y estos núcleos son la suma de los espacios nulos  $L_i$  y  $L'_i$  en las correspondientes descomposiciones. Como las isometrías determinan un isomorfismo lineal entre los núcleos, se tiene que  $r_0 = r'_0$  y  $r_+ + r_- = r'_+ + r'_-$ .

Ahora sigue verificar que  $r_+ = r'_+$  y  $r_- = r'_-$ . Establecemos que  $L = L_0 + L_+ + L_-$ ,  $L' = L'_0 + L'_+ + L'_-$ , donde  $L_0, L_+, L_-$  son las sumas de los subespacios nulo, positivo y negativo de la descomposición inicial de  $L$ , y correspondientemente para  $L'$ . Supongamos que  $r_+ = \dim L_+ > r'_+ = \dim L'_+$  y restringimos la isometría a  $L_+ \subset L$ . Cada vector  $f(l)$  está representado de manera única como una suma

$$f(l) = f(l)_0 + f(l)_+ + f(l)_-$$

donde  $f_+(l) \in L'_+$  y así respectivamente para  $f(l)_0$  y  $f(l)_-$ . La función  $L_+ \rightarrow L'_+$ , dada por:  $l \rightarrow f(l)_+$  es lineal. Como asumimos que  $\dim L > \dim L'_+$ , existe un vector no cero  $l \in L_+$  para el cual  $f(l)_+ = 0$  de modo que

$$f(l) = f(l)_0 + f(l)_-$$

pero  $g(l, l) > 0$ , pues  $l \in L_+$  y  $L_+$  es la suma ortogonal directa de espacios unidimensionales positivos. Dado que  $f$  es una isometría se tiene que  $g'(f(l), f(l)) > 0$ . Por otro lado

$$g'(f(l), f(l)) = g'(f(l)_0 + f(l)_-, f(l)_0 + f(l)_-) = g'(f(l)_-, f(l)_-) \leq 0$$

lo cual es una contradicción y se prueba que las signaturas de espacios isométricos calculadas de cualquier descomposición son idénticas. ■

## 1.8. Bases ortogonales y ortonormales

En las secciones anteriores hemos hecho algunas caracterizaciones de los productos internos definidos en algún espacio lineal de dimensión finita, que sin remarcarlo esto se ha hecho observando cómo actúa el producto interno sobre alguna base del espacio lineal. Sin embargo, ahora se quiere ver cómo podemos caracterizar las bases a través de los productos internos ya que estas nos proporcionan mucha información sobre sus espacios generados. Por este motivo, en esta sección se introducen términos como ortogonalidad y ortonormalidad, los cuales harán más simple el manejo e interpretación de las bases, así como las representaciones generales de los productos internos mediante matrices Gram.

**Definición 1.8.1.** *Sea  $(L, g)$  un espacio vectorial con un producto interno. La base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $L$  es llamada ortogonal si  $g(e_i, e_j) = 0$  para todo  $i \neq j$  y ortonormal si  $g(e_i, e_i) = 0$  ó  $\pm 1$  para todo  $i$ .*

Por ejemplo, cualquier espacio ortogonal o Hermitiano tiene una base ortogonal, basta construir la descomposición  $L = \oplus L_i$  de subespacios ortogonales unidimensionales y elegir  $e_i \in L_i, e_i \neq 0$ . El Teorema 1.8.1 prueba que el número de elementos  $e$  de la base ortogonal con  $g(e, e) = 0, 1, -1$  no depende de la base para  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (caso ortogonal) y  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  (caso Hermitiano). En el caso ortogonal sobre  $\mathbb{C}$  es posible hacer siempre  $g(e_i, e_i) = 0, 1$ , y el número de vectores no depende de la base misma. La matriz Gram de una base ortonormal tiene la forma

$$\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

con un orden adecuado de la base. El concepto de base ortonormal es más usado en el caso no degenerado donde no hay vectores  $e_i \neq 0$  con  $g(e_i, e_i) = 0$ .

La siguiente fórmula hace posible escribir explícitamente las componentes del vector coordinado de cualquier vector  $e \in L$  con respecto a una base ortogonal en el caso no degenerado:

$$e = \sum_{i=1}^n \frac{g(e, e_i)}{g(e_i, e_i)} e_i.$$

En efecto, si tenemos dos representantes para un cierto vector digamos  $e$  y  $e'$ , entonces se tiene que  $g(e, e_i) = g(e', e_i)$  para todo  $i$  y la no degeneración de  $g$  implica que  $e = e'$ , pues  $e - e'$  está en el kernel de  $g$ .

En un espacio simpléctico puede existir una base ortonormal sólo si  $g = 0$  pues  $g(e_i, e_i) = 0$  para todo  $i$ .

Por otro lado el Teorema 1.6.1 garantiza la existencia de una base simpléctica  $\{e_1, \dots, e_r; e_{r+1}, \dots, e_{2r}; e_{2r+1}, \dots, e_n\}$  la cual está caracterizada por el hecho de que:

$$g(e_i, e_{r+i}) = -g(e_{r+i}, e_i) = 1, \quad i = 1, \dots, r$$

mientras que los productos  $g(e_j, e_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n$ .

En efecto, podemos descomponer a  $L$  como suma directa de subespacios bidimensionales no singulares  $L_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ), y subespacios unidimensionales singulares  $L_j$  ( $2r + 1 \leq j \leq n$ ), y

---

eligiendo para  $(1 \leq i \leq r)$   $\{e_i, e_{r+i}\}$  la base para  $L_i$  (construida en los espacios simplécticos) y  $\{e_i\}$  ( $2r + 1 \leq j \leq n$ ) para cualquier vector en  $L_j$ .

La matriz Gram para una base simpléctica es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de una forma simpléctica es igual a  $2r$ , en particular la dimensión de un espacio simpléctico no singular es necesariamente  $2r$ , pues en la sección 1.6.4 se ha probado que sólo los espacios simplécticos bidimensionales son no singulares.

Sea  $L$  un espacio simpléctico no singular,  $\{e_1, \dots, e_r; e_{r+1}, \dots, e_{2r}\}$  una base simpléctica de  $L$  y sean  $L_1$  igual al generado por  $\{e_1, \dots, e_r\}$  y  $L_2$  igual al generado por  $\{e_{r+1}, \dots, e_{2r}\}$ . Claramente  $L_1$  y  $L_2$  son isotrópicos por la manera de como fueron elegidos y del hecho que los espacios  $L_i$  son ortogonales a pares, además, sus dimensiones son iguales a la mitad de la dimensión de  $L$  y  $L = L_1 \oplus L_2$ .

Describiendo productos internos por sus matrices Gram y transformaciones de una base dada a una base ortogonal o simpléctica, por lo que se ha visto en la Sección 1.5 y en la presente, podemos obtener sin hacer más detalles los siguientes hechos:

- a) Cualquier matriz cuadrada y simétrica  $G$  sobre el campo  $\mathbb{K}$  puede ser reducida a una forma diagonal mediante la transformación  $G \rightarrow A^tGA$ , donde  $A$  es no singular. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  es posible lograr que en la diagonal sólo aparezcan 0 y  $\pm 1$  y si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sólo 0 y 1 aparecerán en la diagonal. Los números de 0 y  $\pm 1$  (correspondientemente 0 y 1) dependerán sólo de  $G$  y no de  $A$ .
- b) Cualquier matriz cuadrada antisimétrica  $G$  sobre el campo  $\mathbb{K}$  con característica  $\neq 2$  puede ser reducida mediante la transformación  $G \rightarrow A^tGA$ , donde  $A$  no es singular, a la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el número  $2r$  es igual al rango de  $G$ .

- c) Cualquier matriz Hermitiana  $G$  sobre  $\mathbb{C}$  puede ser reducida a la forma diagonal con los números 0,  $\pm 1$  en la diagonal con la transformación  $G \rightarrow A^tG\bar{A}$ , donde  $A$  es no singular y los números sólo dependen de  $G$ .

## 1.9. Formas cuadráticas

En esta sección tratamos las formas cuadráticas, las cuales como veremos más adelante tienen asociada una forma bilineal. Aquí también analizamos bajo que condiciones esta forma bilineal asociada a la forma cuadrática es única y posteriormente se dará un algoritmo para reducir una forma cuadrática como suma de cuadrados.

**Definición 1.9.1.** Una forma cuadrática es una función  $q : L \rightarrow \mathbb{K}$  para la cual existe una forma bilineal  $h : L \times L \rightarrow \mathbb{K}$  con la propiedad

$$q(l) = h(l, l) \text{ para todo } l \in L.$$

**Teorema 1.9.1.** Si la característica del campo  $\mathbb{K}$  es  $\neq 2$ , entonces para cualquier forma cuadrática  $q : L \rightarrow \mathbb{K}$  existe una única forma bilineal simétrica  $g$  con la propiedad  $q(l) = g(l, l)$ , llamada la polarización de  $q$ .

*Demostración.* Sea  $q$  una forma cuadrática entonces existe una forma bilineal  $h$  tal que  $q(l) = h(l, l)$ . Definimos

$$g(l, m) = \frac{1}{2} [h(l, m) + h(m, l)].$$

Claramente,  $g$  es simétrica, es decir,  $g(l, m) = g(m, l)$ , además,

$$g(l, l) = \frac{1}{2} [h(l, l) + h(l, l)] = q(l)$$

y la bilinealidad de  $g$  se sigue de la bilinealidad de  $h$ .

Ahora probemos la unicidad, notemos que si  $q(l) = g_1(l, l) = g_2(l, l)$ , donde  $g_1$  y  $g_2$  son formas bilineales y simétricas, entonces la forma  $g = g_1 - g_2$  es bilineal y simétrica y  $g(l, l) = 0$  para todo  $l \in L$  y de acuerdo a la prueba del Teorema 1.6.1 se sigue que  $g(l, m) = 0$  para todo  $l, m \in L$ . Con lo cual se completa la prueba. ■

Notemos que si  $q(l) = g(l, l)$  y  $g$  es simétrica, entonces

$$g(l, m) = \frac{1}{2} [q(l + m) - q(l) - q(m)].$$

Hemos establecido con esto que las geometrías ortogonales (con característica  $\neq 2$ ) pueden ser interpretadas como geometrías de pares  $(L, q)$ , donde  $q : L \rightarrow \mathbb{K}$  es una forma cuadrática. En términos de coordenadas, la forma cuadrática es escrita como

$$q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

donde la matriz  $(a_{ij})$  es simétrica, esto es,  $a_{ij} = a_{ji}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

### 1.9.1. Reducción de una forma cuadrática a una suma de cuadrados

Sea  $q : L \rightarrow \mathbb{K}$  dada por

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$



## CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

### 1.9. FORMAS CUADRÁTICAS

una forma cuadrática sobre el campo  $\mathbb{K}$  con característica  $\neq 2$ . El siguiente procedimiento es un método práctico para encontrar una sustitución lineal de variables  $x_i$  que simplifique a  $q$  a una suma de cuadrados con coeficientes. Para esto consideremos los siguientes casos:

*Caso I.* Existe un coeficiente no cero en la diagonal.

Renombrando las variables podemos asumir que  $a_{11} \neq 0$ , entonces

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + x_1(2a_{12}x_2 + \dots + 2a_{1n}x_n) + q'(x_2, \dots, x_n),$$

donde  $q'(x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=2}^n a_{i,j}x_ix_j$  es una forma cuadrática de menor o igual a  $n-1$  variables, pues tiene asociada la forma bilineal  $h : L \times L \rightarrow \mathbb{K}$  defina por

$$h((x_2, \dots, x_n), (y_2, \dots, y_n)) = \sum_{i,j=2}^n a_{i,j}x_iy_j$$

con la propiedad  $q(l) = h(l, l)$  para todo  $l \in L$ . Ahora completando el cuadrado, se tiene

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11} \left( x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 + q''(x_2, \dots, x_n),$$

donde

$$\begin{aligned} q''(x_2, \dots, x_n) &= q'(x_2, \dots, x_n) - a_{11} \left( \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)^2 \\ &= q'(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{a_{11}} \left( a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}a_{11}x_n \right)^2 \end{aligned}$$

es la nueva forma cuadrática de menor o igual a  $n-1$  variables, pues es la diferencia de dos formas cuadráticas. Ahora si ajustamos

$$y_1 = x_1 + a_{11}^{-1}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n), \quad y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n$$

obtenemos en las nuevas variables la forma

$$a_{11}y_1^2 + q''(y_2, \dots, y_n)$$

y el siguiente paso del algoritmo consiste en aplicar esto a  $q''$ .

*Caso II.* Todos los coeficientes de la diagonal son cero. Si en general  $q = 0$ , entonces nada hay que hacer:  $q = \sum 0 \cdot x_i^2$ .

Por otro lado, renombrando las variables, podemos asumir que  $a_{12} \neq 0$ , entonces

$$q(x_1, \dots, x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + x_1l_1(x_3, \dots, x_n) + x_2l_2(x_3, \dots, x_n) + q'(x_3, \dots, x_n)$$

donde  $l_1, l_2$  son formas lineales y  $q'$  es una forma cuadrática. Consideremos

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_i = y_i, i \geq 3.$$

entonces en las nuevas variables la forma  $q$  está dada por

$$2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + q''(y_1, \dots, y_n)$$

donde  $q''$  no contiene términos con  $y_1^2, y_2^2$ . Por lo tanto podemos aplicar el método de separación de cuadrados para reducir una vez más el problema a términos de menor grado y aplicando sucesivamente estos pasos nos dará una forma del tipo  $\sum_{i=1}^n a_i z_i^2$ . La sustitución final de variables será no degenerada ya que todas las sustituciones intermedias son no degeneradas.

La sustitución final de variables  $u_i = (|a_i|)^{\frac{1}{2}} z_i$  con  $a_i \neq 0$  en el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  y  $u_i = (a_i)^{\frac{1}{2}} z_i$  con  $a_i \neq 0$  en el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , se puede reducir como una suma de cuadrados con coeficientes  $0, \pm 1$ , ó  $0, 1$ , respectivamente.

A continuación mostramos un ejemplo de este procedimiento.

**Ejemplo 1.9.1.** *Simplificar la siguiente forma cuadrática a una suma de cuadrados*

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2.$$

*Demostración.* Como existe un coeficiente no cero en la diagonal aplicamos el Caso I. Entonces

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_1(2x_3) + q'(x_2, x_3, x_4)$$

donde

$$q'(x_2, x_3, x_4) = 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2.$$

Completando cuadrados, encontramos

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3)^2 + q''(x_2, x_3, x_4)$$

con

$$q''(x_2, x_3, x_4) = 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2 - x_3^2.$$

Ahora si ajustamos  $y_1 = x_1 + x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = x_4$ . Obtenemos en las nuevas variables la forma

$$q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + q''(y_2, y_3, y_4).$$

El siguiente paso es aplicar lo mismo para  $q''$ , esto es,

$$\begin{aligned} q''(x_2, x_3, x_4) &= x_4^2 + 2x_4(x_2 + x_3) + (2x_2x_3 - x_3^2) \\ &= (x_4 + (x_2 + x_3))^2 - x_2^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$

Ajustando  $y_4 = x_4 + x_2 + x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_3$ . Obtenemos,

$$q''(y_2, y_3, y_4) = y_4^2 - y_2^2 - 2y_3^2.$$

Con esto tenemos que la reducción de  $q$  a una suma de cuadrados está dada por:

$$q(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_4^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

■

## 1.10. Algoritmo de ortogonalización y polinomios ortogonales

En esta parte se describirá un algoritmo clásico para la construcción de bases ortogonales y veremos ejemplos de aplicaciones importantes de estas bases en el espacio de funciones.

### 1.10.1. Algoritmo de Ortogonalización de Gram-Schmidt

El algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt es un algoritmo muy importante en álgebra lineal que nos permite obtener una base ortonormal de un espacio a partir de una base dada. Este proceso de ortogonalización puede verse en la construcción de la prueba del siguiente resultado en la cual examinaremos simultáneamente los casos ortogonal y Hermitiano.

**Proposición 1.10.1.** *Sea  $(L, g)$  un espacio lineal con producto interno  $g$  y con una matriz ortogonal o Hermitiana, definida en la base  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  y  $L_i$  el espacio generado por  $\{e'_1, \dots, e'_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Supongamos que todos los subespacios  $L_i$  son no degenerados. Entonces existe una base ortogonal  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tal que el espacio generado de  $\{e_1, \dots, e_i\}$  coincide con  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Esta base es llamada la ortogonalización de la base inicial  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ . Cada vector  $e_i$  está determinado de manera única salvo un factor escalar no cero.*

*Demostración.* Construiremos  $e_i$  por inducción sobre  $i$ . Para  $e_1$  lo tomamos como  $e'_1$ . Si  $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$  fueron construidos previamente, entonces obtenemos  $e_i$  de la siguiente forma

$$e_i = e'_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j e'_j, \quad x_j \in \mathbb{K} \quad (1.10.1)$$

Como  $\{e'_1, \dots, e'_i\}$  genera a  $L_i$ , se tiene que  $\{e'_1, \dots, e'_{i-1}\}$  y  $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  generan a  $L_{i-1}$ , entonces el vector  $e_i$  junto con  $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$  generarán  $L_i$ . Por lo tanto es suficiente probar que  $e_i$  es ortogonal a  $e'_1, \dots, e'_{i-1}$ . Las hipótesis implican que  $g(e_i, e'_k) = 0$ ,  $k = 1, \dots, i-1$ , o

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_j g(e'_j, e'_k) = g(e'_i, e'_k) \quad k = 1, \dots, i-1$$

Este es un sistema de  $i-1$  ecuaciones lineales con  $i-1$  variables. La matriz de coeficientes es la matriz Gram de la base  $\{e'_1, \dots, e'_{i-1}\}$  del espacio  $L_{i-1}$ , la cual es no singular por definición, de manera que  $x_i$  existe y está determinado de manera única. Cualquier vector no cero  $\tilde{e}$  ortogonal a  $L_{i-1}$  es proporcional a  $e_i$ .

Una solución simple del sistema de ecuaciones es obtenido si  $e_i$  es tomado de la forma

$$e_i = e'_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j e'_j, \quad y_j \in \mathbb{K}$$

asumiendo que  $e_1, \dots, e_{i-1}$  fueron previamente encontrados. Como  $e_1, \dots, e_{i-1}$  son ortogonales a pares, de la definición  $g(e_i, e_j) = 0$ ,  $1 \leq j \leq i-1$  se tiene que

$$y_j = \frac{g(e'_i, e'_j)}{g(e'_j, e'_j)}, \quad j = 1, \dots, i-1$$

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.11. CONJUNTOS ORTOGONALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES**

---

El punto principal de esta prueba es escribir explícitamente el sistema de ecuaciones lineales las cuales determinan sucesivamente la solución  $e_i$ . Notar que la matriz de coeficientes del sistema 1.10.1 es la diagonal inferior de la matriz Gram de la base inicial

$$G_i = (g(e'_j, e'_k)), \quad 1 \leq j, k \leq i.$$

Ahora si no queremos establecer un algoritmo podemos hacer la elección de la siguiente manera. Utilizando la Proposición 1.6.1 y la no degeneración de  $L_{i-1}$  se tiene que  $L_i = L_{i-1} \oplus L_{i-1}^\perp$ ;  $\dim L_i^\perp = \dim L_i - \dim L_{i-1}$  y podemos tomar  $e_i$  como cualquier vector no cero de  $L_{i-1}^\perp$  para conformar una base de  $L$ . ■

**Observación 1.10.1.** a) *El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt frecuentemente es usado en situaciones cuando  $g(l, l) > 0$  para todo  $l \in L, l \neq 0$ , esto es, es aplicado a espacios Euclidianos y espacios unitarios los cuales estudiaremos más adelante. En este caso todo subespacio de  $L$  es automáticamente no degenerado y cualquier base puede ser normalizada. La forma  $g$  con esta propiedad y su matriz Gram se denominan positiva definida.*

b) *Cualquier base ortonormal de un subespacio no degenerado  $L_0 \subset L$  puede ser extendido a una base del espacio completo  $L$ . En efecto, como  $L = L_0 \oplus L_0^\perp$  tomamos la base de  $L_0^\perp$  como el extensión (o complemento) de la base de  $L_0$  y así obtener la base para  $L$ , luego aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt a la base que se obtuvo en la extensión para obtener la base deseada.*

## 1.11. Conjuntos ortogonales en el espacio de funciones

Ahora haremos una pequeña pausa en el espacio de funciones, en el cual tenemos definidos algunos productos internos, con los cuales se obtienen, mediante el proceso de ortogonalización, ciertos conjuntos de polinomios como son los polinomios trigonométricos, los polinomios de Legendre y en particular los polinomios de Hermite que son los más importantes en nuestro estudio y haremos uso de ellos más adelante.

Estudiaremos las funciones  $f_1, f_2$  definidas sobre el intervalo  $(a, b)$  del eje real ( $a$  puede ser  $-\infty$  y  $b$  puede ser  $\infty$ ) y asumiendo valores reales o complejos.

Los productos internos sobre espacios de funciones en análisis están definidas frecuentemente por una expresión del tipo

$$g(f_1, f_2) = \int_a^b G(x) f_1(x) f_2(x) dx \tag{1.11.1}$$

o caso sesquilineal,

$$g(f_1, f_2) = \int_a^b G(x) f_1(x) \bar{f}_2(x) dx \tag{1.11.2}$$

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.11. CONJUNTOS ORTOGONALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES**

---

donde,  $G$ ,  $f_1$  y  $f_2$  deben satisfacer ciertas condiciones de integrabilidad.

La función  $G$  es llamada el *peso* del producto  $g$ . El valor

$$g(f, f) = \int_a^b G(x)f(x)^2 dx \quad \text{o} \quad \int_a^b G(x) |f(x)|^2 dx$$

es el *peso de mínimos cuadrados* de la función  $f$  con peso  $G$ .

El problema típico de aproximar la función  $f$  por combinación lineal de alguna colección de funciones dadas  $f_1, \dots, f_n$ , consiste en encontrar los coeficientes  $a_1, \dots, a_n$  que minimicen los pesos de la función

$$f - \sum_{i=1}^n a_i f_i \tag{1.11.3}$$

Después de ver los siguientes ejemplos (Polinomios trigonométricos, Polinomios de Legendre y Polinomios de Hermite) habrá evidencia de que los coeficientes  $a_i$  se encuentran particularmente en el caso de que  $\{f_i\}_{i=1}^n$  forme un sistema ortonormal relativo al producto interno  $g$ .

### 1.11.1. Polinomios trigonométricos

El objetivo principal de mostrar ejemplos de conjuntos ortogonales en el espacio de funciones es ver como están dadas las normalizaciones de las bases de estas formas con respecto al producto definido por las ecuaciones (1.11.1) y (1.11.2) según sea el campo donde se esté trabajando. A continuación se muestran como ejemplo los polinomios trigonométricos y posteriormente se darán otros ejemplos de otros conjuntos ortonormales.

Para los polinomios trigonométricos (o polinomios de Fourier) se tiene definida una función de peso  $G = 1$  y un rango  $(a, b) = (0, 2\pi)$ . Los polinomios Trigonométricos son combinaciones lineales de funciones  $\cos nx$  y  $\sin nx$  o combinaciones de la función  $e^{inx}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Esta forma es usualmente utilizada en la teoría de funciones de valor real y después en la teoría de funciones de valor complejo. Ahora como  $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$ , sobre  $\mathbb{C}$  los espacios de polinomios de Fourier coinciden.

El conjunto de funciones  $\{1, \cos nx, \sin nx \mid n \geq 1\}$  así como  $\{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$  son linealmente independientes. Más aún, estos conjuntos forman sistemas ortogonales. En efecto,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & \text{para } m = n > 0 \\ 0 & \text{para } m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} e^{i\bar{n}x} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{para } m = n \\ 0 & \text{para } m \neq n \end{cases}$$

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.11. CONJUNTOS ORTOGONALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES**

---

Los sistemas

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \mid n > 1 \right\} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

están normalizados. Los productos internos de cualquier función  $f$  en  $[0, 2\pi]$  con elementos de estos sistemas son llamados *Coefficientes de Fourier* de esta función, los cuales son:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) dx \tag{1.11.4}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \geq 1 \tag{1.11.5}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \geq 1 \tag{1.11.6}$$

para funciones reales y

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

para funciones complejas. Si la función  $f$  es por sí misma un polinomio de Fourier, entonces tendremos

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

para funciones reales  $f$ , y

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

para funciones complejas  $f$ . Series infinitas con esta estructura son llamadas *series de Fourier*.

### 1.11.2. Polinomios de Legendre

Para este caso la función de peso y el intervalo están dados como  $G = 1$ ,  $(a, b) = (1, -1)$ . Los polinomios de Legendre  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ , ... se obtienen como resultado de aplicar el proceso de ortogonalización a la base  $\{1, x, x^2, \dots\}$  del espacio de polinomios reales, estos son usualmente normalizados por la condición  $P_n(1) = 1$ . Con esta normalización su forma explícita está dada por el siguiente resultado.

**Proposición 1.11.1.**

$$P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n > 1.$$

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.11. CONJUNTOS ORTOGONALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES**

---

*Demostración.* Como el grado del polinomio  $(x^2 - 1)^n$  es igual a  $2n$ , el grado del polinomio  $\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$  es igual a  $n$  y también  $P_1, P_2, \dots, P_i$  generan el mismo espacio sobre  $\mathbb{R}$  que  $1, x, \dots, x^i$ . Por lo tanto, en lugar de verificar la ortogonalidad de  $P_i, P_j, i \neq j$ , es suficiente probar que

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0 \quad \text{para } k < n.$$

En efecto, integrando por partes obtenemos

$$\int_{-1}^1 x^k \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n dx = x^k \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 - k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - 1)^n dx.$$

El primer término de la derecha se anula, porque  $(x^2 - 1)^n$  tiene un cero de orden  $n$  en el punto  $\pm 1$ , y cualquier derivada de orden menor tiene un cero en ese punto. Siguiendo de manera análoga puede aplicarse al segundo término del lado derecho de esta última ecuación y después de  $k$  pasos se llega a la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x^2 - 1)^n dx = \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}(x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Por otro lado, la fórmula de Leibnitz indica que

$$\frac{d^n}{dx^n} [(x - 1)^n (x + 1)^n] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} (x - 1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x + 1)^n$$

entonces podemos representar  $P_n(x)$  de la siguiente manera

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x - 1)^n (x + 1)^n].$$

En el punto  $x = 1$  el término correspondiente a  $k = n$  es el único término que no se anula, esto es,

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{n} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x - 1)^n \right] (x + 1)^n \Big|_{x=1} = \frac{1}{2^n n!} \cdot 1 \cdot n! \cdot 2^n = 1$$

que es la condición de normalización, con lo que concluye la prueba. ■

A continuación mostramos los primeros polinomios de Legendre:

$$n = 0 \quad P_0(x) = 1$$

$$n = 1 \quad P_1(x) = x$$

$$n = 2 \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$n = 3 \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$n = 4 \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$n = 5 \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$

$$n = 6 \quad P_2(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

$$n = 7 \quad P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$$

$$n = 8 \quad P_8(x) = \frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35).$$

### 1.11.3. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Hermite son los que más nos interesa en este trabajo, ya que estos polinomios además de que presentan propiedades importantes en el espacio de funciones resultan más adelante cuando estudiemos al oscilador armónico y ahí daremos la interpretación de estos polinomios.

Para este caso de polinomios,  $G = e^{-x^2}$ ,  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Los polinomios  $H_n(x)$  son el resultado de la ortogonalización de la base  $\{1, x, x^2, \dots\}$  y su forma explícita es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

y se normalizan de acuerdo al valor de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{para } m = n. \end{cases} \quad (1.11.7)$$

Para probar la integral 1.11.7 haremos uso de la siguiente propiedad de los polinomios de Hermite

$$H_n(x) - 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

Supongamos que  $m \leq n$  y  $m =$  número de veces que se deriva por partes,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx &= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \\ &= (-1)^n \left[ H_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) H'_m(x) dx \right] \\ &= -(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx \\ &= -(-1)^n 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n+m} 2^n m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2}) dx. \end{aligned}$$



**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.11. CONJUNTOS ORTOGONALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES**

---

Ahora probemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx = \begin{cases} 0 & \text{para } m < n \\ \sqrt{\pi} & \text{para } m = n \end{cases}$$

y con esto se tendrá lo que queremos probar.

En efecto, supongamos que  $m < n$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx = (-1)^{n+m} 2^m k! \left[ \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(e^{-x^2}) \right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Ahora si  $m = n$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

para probar esta última integral tomemos como

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

entonces se tiene que ,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

pues,

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-r^2} r dr = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-t^2}}{-2} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2})dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I = 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

A continuación se muestran los primeros polinomios de Hermite:

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

**CAPÍTULO 1. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO**  
**1.11. CONJUNTOS ORTOGONALES EN EL ESPACIO DE FUNCIONES**

---

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

# Capítulo 2

## Operadores

Este capítulo lo designamos sólo a ciertos operadores definidos en espacios euclidianos y espacios unitarios. Para los espacios euclidianos se estudiarán los operadores ortogonales y para los espacios unitarios, los operadores unitarios, los cuales estudiaremos con detalle. Otros operadores que también analizamos son los operadores auto-adjuntos, de los que se darán algunas caracterizaciones importantes.

### 2.1. Espacios Euclidianos

Cuando tratamos con espacios con producto interno, inmediatamente pensamos en los espacios euclidianos ya que estos espacios son con los que se trabaja comúnmente y además cumplen propiedades muy importantes, por ejemplo la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwartz, y a su vez en estos espacios podemos hablar de lo que es una norma y una métrica.

**Definición 2.1.1.** *Un espacio euclidiano  $(L, g)$ , es un espacio lineal real de dimensión finita con un producto interno simétrico ( $g = g^t$ ) y positivo definido ( $g(l, l) > 0, l \neq 0$ ).*

Escribiremos  $(l, m)$  en lugar de  $g(l, m)$  y  $\|l\|$  por  $(l, l)^{\frac{1}{2}}$ ; llamaremos al número  $\|l\|$  la *longitud* del vector  $l$ .

A continuación probemos las siguientes propiedades referentes a espacios euclidianos:

a) Cualquier espacio Euclidiano  $L$  tiene una base ortonormal, es decir, los vectores son ortogonales y tienen longitud igual a uno.

En efecto, por el algoritmo de ortogonalización (sección 1.10.1)  $L$  tiene una base ortogonal  $\{l_1, \dots, l_n\}$  por ser no degenerado. Ahora si tomamos  $\left\{ \frac{l_1}{\|l_1\|}, \dots, \frac{l_n}{\|l_n\|} \right\}$  sigue siendo base ortogonal de  $L$  y además cumple

$$\left\| \frac{l_i}{\|l_i\|} \right\| = \left( \frac{l_i}{\|l_i\|}, \frac{l_i}{\|l_i\|} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\|l_i\|} (l_i, l_i)^{\frac{1}{2}} = \frac{\|l_i\|}{\|l_i\|} = 1.$$

b) Por consecuencia de a) se tiene que  $L$  es isométrico al espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  ( $n = \dim L$ ), donde

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \|\vec{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Muchas de las propiedades de espacios Euclidianos fueron descubiertas por la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, que a continuación se menciona.

**Proposición 2.1.1.** (*Desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz*). Sea  $L$  un espacio euclidiano, para cualesquiera  $l_1, l_2 \in L$  se cumple que

$$|(l_1, l_2)| \leq \|l_1\| \|l_2\|$$

y la igualdad se cumple si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

*Demostración.* Si  $l_1 = 0$ , la igualdad se cumple y  $l_1, l_2$  son linealmente dependientes. Entonces supongamos que  $l_1 \neq 0$ . Para cualquier número real  $t$  se tiene

$$0 \leq \|tl_1 + l_2\|^2 = (tl_1 + l_2, tl_1 + l_2) = t^2 \|l_1\|^2 + 2t(l_1, l_2) + \|l_2\|^2.$$

Por lo tanto, el discriminante del trinomio cuadrado debe ser no positivo, esto es,

$$(l_1, l_2)^2 - \|l_1\|^2 \|l_2\|^2 \leq 0$$

y es cero si y sólo si este trinomio tiene una raíz real  $t_0$ , es decir,

$$\|t_0 l_1 + l_2\|^2 = 0 \Leftrightarrow l_2 = -t_0 l_1$$

como se quería probar. ■

**Corolario 2.1.1.** (*Desigualdad del triángulo*). Para cualquier  $l_1, l_2, l_3 \in L$

$$\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$$

$$\text{y} \quad \|l_1 - l_3\| \leq \|l_1 - l_2\| + \|l_2 - l_3\|$$

*Demostración.*

$$\|l_1 + l_2\|^2 = \|l_1\|^2 + 2(l_1, l_2) + \|l_2\|^2 \leq \|l_1\|^2 + 2\|l_1\| \|l_2\| + \|l_2\|^2 = (\|l_1\| + \|l_2\|)^2$$

de aquí se sigue la primera desigualdad y reemplazando  $l_1$  por  $l_1 - l_2$  y  $l_2$  por  $l_2 - l_3$  se obtiene la segunda desigualdad. ■

**Corolario 2.1.2.** La función  $N : L \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $N(l) = \|l\|$  es una norma sobre  $L$ , y la función  $d : L \times L \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $d(l, m) = \|l - m\|$  es una métrica sobre  $L$ .

*Demostración.* Probemos que efectivamente  $N$  es una norma sobre  $L$

a)  $N(0) = (0, 0)^{\frac{1}{2}} = 0, N(l) = (l, l)^{\frac{1}{2}} > 0, \quad l \neq 0, l \in L.$

b)  $N(al) = (al, al)^{\frac{1}{2}} = |a| (l, l)^{\frac{1}{2}} = |a| N(l) \quad a \in \mathbb{R}, l \in L.$

c)  $N(l_1 + l_2) = (l_1 + l_2, l_1 + l_2)^{\frac{1}{2}} \leq (l_1, l_1)^{\frac{1}{2}} + (l_2, l_2)^{\frac{1}{2}} = N(l_1) + N(l_2), \quad l_1, l_2 \in L$

Por otra parte, por la forma de como fue definida  $d$ , es claro que  $d$  es una métrica. ■

### 2.1.1. Ángulos y distancias en espacios euclidianos

Sean  $l_1, l_2 \in L$  vectores distintos de cero, la Proposición 2.1.1 implica que

$$-1 \leq \frac{(l_1, l_2)}{\|l_1\| \|l_2\|} \leq 1.$$

Por lo tanto, existe un único ángulo  $\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq \pi$  para el cual

$$\cos\phi = \frac{(l_1, l_2)}{\|l_1\| \|l_2\|}. \quad (2.1.1)$$

Este es el ángulo entre los vectores  $l_1, l_2$ . Ahora como el producto es simétrico, entonces el ángulo es no orientable, es por eso que el ángulo sólo se toma entre 0 y  $\pi$ . De acuerdo a la convención de que el ángulo ortogonal entre dos vectores es igual a  $\frac{\pi}{2}$ , la geometría Euclidiana puede desarrollarse sistemáticamente de acuerdo a estas definiciones de longitud y ángulo, y los espacios dos y tres dimensionales coinciden con los de la geometría clásica.

Por ejemplo, el teorema de Pitágoras multidimensional es una consecuencia de las definiciones. Si los vectores  $l_1, \dots, l_n$  son ortogonales a pares, entonces

$$\left| \sum_{i=1}^n l_i \right|^2 = \sum_{i=1}^n \|l_i\|^2 \quad (2.1.2)$$

La fórmula usual para cosenos en geometría plana, aplicada a un triángulo con lados  $l_1, l_2, l_3$  está dada por

$$\|l_3\|^2 = \|l_1\|^2 + \|l_2\|^2 - 2 \|l_1\| \|l_2\| \cos\phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre  $l_1$  y  $l_2$ . El vector  $l_3 = l_1 - l_2$ , y esta fórmula se transforma en la identidad

$$\|l_1 - l_2\|^2 = \|l_1\|^2 + \|l_2\|^2 - 2(l_1, l_2)$$

de acuerdo con la definición de ángulo.

Sean  $U, V \subset L$  dos subconjuntos en un espacio Euclidiano. Al número no negativo

$$d(U, V) = \inf\{\|l_1 - l_2\| \mid l_1 \in U, l_2 \in V\}$$

le llamaremos la *distancia entre  $U$  y  $V$* .

Consideremos el siguiente caso particular:  $U = \{l\}$ ,  $V = L_0 \subset L$  espacio lineal. Como estamos en un espacio Euclidiano,  $L_0$  es no degenerado y por tanto  $L = L_0 + L_0^\perp$  y  $l = l_0 + l'_0$  donde  $l_0 \in L_0$ ,  $l'_0 \in L_0^\perp$ . Los vectores  $l_0, l'_0$  son las proyecciones ortogonales de  $l$  a  $L_0, L_0^\perp$ , respectivamente.

**Proposición 2.1.2.** *La distancia de  $l$  a  $L_0$  es igual a la longitud de la proyección ortogonal de  $l$  a  $L_0^\perp$ .*

*Demostración.* El teorema de Pitágoras implica que para cualquier vector  $m \in L_0$ ,

$$\|l - m\|^2 = \|l_0 + l'_0 - m\|^2 = \|l_0 - m\|^2 + \|l'_0\|^2$$

ya que el vector  $l_0 - m \in L_0$  y  $l'_0 \in L_0^\perp$  son ortogonales. Por lo tanto

$$\|l - m\|^2 \geq \|l'_0\|^2$$

y la igualdad se cumple sólo si  $m = l_0$ , es decir para  $m = l_0$

$$d(l, L_0) = \inf\{\|l - l_0\| \mid l_0 \in L_0\} = \|l'_0\|^2$$

que es lo que se quería probar. ■

Ahora, si tenemos  $L_0 \subset L$  y una base fija de  $L_0$ , queremos ver como es la proyección de cualquier vector en  $L$  con respecto a la base dada. Para esto se tiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.3.** Sean  $L$  un espacio Euclidianos,  $L_0 \subset L$  y  $\{e_1, \dots, e_m\}$  una base ortonormal de  $L_0$ . La proyección de  $l \in L$  a  $L_0$  está determinada por

$$l_0 = \sum_{i=1}^m (l, e_i) e_i.$$

y además

$$\sum_{i=1}^m (l, e_i)^2 \leq \|l\|^2.$$

*Demostración.* En efecto,  $l_0 = \sum_{i=1}^m a_i e_i$ , entonces

$$(l_0, e_i) = \left( \sum_{j=1}^m a_j e_j, e_i \right) = a_i (e_i, e_i) = a_i.$$

Por otro lado

$$(l_0, e_i) = (l_0 + l'_0, e_j) = (l, e_i)$$

y por lo tanto  $a_i = (l, e_i)$ .

Finalmente

$$d(l, L_0) = \left\| l - \sum_{i=1}^m (l, e_i) e_i \right\|$$

es el menor valor de  $\|l - r\|$  cuando  $r$  se mueve a través de  $L_0$ . Como  $\|l_0\|^2 \leq \|l\|^2$ , de acuerdo al teorema de Pitágoras tenemos

$$\sum_{i=1}^m (l, e_i)^2 \leq \|l\|^2.$$

Como ejemplo de la Proposición 2.1.3 consideremos al espacio de funciones continuas reales sobre  $[a, b]$ ,  $C[a, b]$ , con el producto interno

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

este espacio es de dimensión infinita, pero nosotros en las siguientes desigualdades nos referimos a un número finito de éstas funciones y también debemos considerar que estamos trabajando sobre un espacio Euclidiano de dimensión finita:

$$(f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0 \quad \text{y} \quad \text{si} \quad (f, f) = \int_a^b f(x)^2 dx = 0, \quad \text{entonces} \quad f(x) = 0.$$

La desigualdad de Cauchy-Bounyakovskii-Schwarz toma la forma

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx + \int_a^b g(x)^2 dx$$

y la desigualdad del triángulo toma la forma

$$\left( \int_a^b (f(x) + g(x))dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si  $(a, b) = (0, 2\pi)$  y  $a_i, b_i$ , son los coeficientes de Fourier de la función  $f(x)$  dados por las ecuaciones 1.11.4, 1.11.5 y 1.11.6, entonces el polinomio de Fourier

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \operatorname{senn} x)$$

es la proyección ortogonal de  $f(x)$  sobre el espacio lineal generado por  $\{1, \cos nx, \operatorname{senn} x \mid 1 \leq n \leq N\}$ . La desigualdad  $|f_N| \leq |f|^2$  asume la forma

$$a_0^2 + \sum_{i=1}^N (a_i^2 + b_i^2) \leq \int_a^{2\pi} f(x)^2 dx$$

además, como el término de la derecha no depende de  $N$  y  $a_i^2, b_i^2 \geq 0$ , la serie

$$a_0^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)$$

converge (pues la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada) para cualquier función continua  $f(x) \in [0, 2\pi]$ .

### 2.1.2. Método de mínimos cuadrados

Consideremos el sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  variables con coeficientes reales

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.1.3}$$

o equivalentemente

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.1.4}$$

**Definición 2.1.2.** La desviación de mínimos cuadrados del sistema (2,1,3) está dada por

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right)^2.$$

Asumamos que  $m > n$  y el rango de la matriz de coeficientes es igual a  $n$ . Entonces, en general, el sistema no tiene solución, pero nosotros trataremos de encontrar valores de las variables  $x_1^0, \dots, x_n^0$ , tal que la desviación de mínimos cuadrados sea el menor valor posible, es decir,

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^0 - b_i \right)^2.$$

sea mínimo.

Interpretemos las columnas de la matriz de coeficientes  $e_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$  y  $f = (b_1, \dots, b_m)$  como vectores del espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^m$  con el producto interno usual.

Tomando

$$e = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} - b_j \right)^2 = \left| \sum_{i=1}^n x_i e_i - f \right|^2$$

Por otro lado la desviación mínima se consigue cuando  $\sum_{i=1}^n x_i^0 e_i$  es la proyección ortogonal de  $f$  al espacio generado por el vector  $e_i$ , para cada  $i$ , es decir, que los valores  $x_i^0$  deben ser encontrados de un sistema de  $n$  ecuaciones con  $m$  incógnitas

$$\left( \sum_{j=1}^n x_j^0 e_j, e_i \right) = (f, e_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Este sistema es llamado *sistema normal*.

## 2.2. Espacios Unitarios

En esta sección estudiaremos espacios unitarios, los cuales son una variación de los espacios euclidianos, pues muchos de los resultados que se obtienen en los espacios euclidianos bajo pequeñas variaciones se siguen cumpliendo en los espacios unitarios, esto nos da cierta facilidad al tratarlos por la familiaridad que tenemos con los espacios euclidianos.

**Definición 2.2.1.** Un espacio unitario  $(L, g)$  es un espacio lineal complejo, con  $g$  producto interno Hermitiano positivo definido.

Al igual que en espacios Euclidianos escribiremos  $(l, m)$  en lugar de  $g(l, m)$  y  $\|l\|$  por  $(l, l)^{\frac{1}{2}}$ . Mostraremos más adelante que  $\| \cdot \|$  es una norma sobre  $L$ .



**Definición 2.2.2.** *Un espacio de Hilbert  $L$ , es un espacio unitario el cual es completo con respecto a la norma  $\| \cdot \|$ , es decir, es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno.*

Siguiendo un procedimiento análogo al utilizado en espacios Euclidianos se prueban las siguientes afirmaciones:

- a) Cualquier espacio unitario  $L$  de dimensión finita tiene una base ortonormal.
- b) Por a),  $L$  es isomorfo al espacio coordenado unitario  $\mathbb{C}^n$  ( $n = \dim L$ ), con el producto interno

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i, \quad \|\vec{x}\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Muchas de las propiedades de espacios unitarios son iguales a las propiedades de espacios Euclidianos. En particular, si  $L$  es un espacio unitario de dimensión finita, entonces la decomplexificación  $L_{\mathbb{R}}$  (donde la decomplexificación de  $L$  significa que la multiplicación escalar es sólo sobre  $\mathbb{R}$  y no sobre  $\mathbb{C}$ ) [5] tiene la estructura única de un espacio Euclidiano, donde la norma  $\| \cdot \|$  de un vector en  $L_{\mathbb{R}}$  es la misma que en  $L$ .

En efecto, si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base ortonormal de  $L$  y  $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n\}$  la base correspondiente de  $L_{\mathbb{R}}$ , entonces

$$\begin{aligned} \|l\|^2 &= \left| \sum_{j=1}^n x_j e_j \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j e_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^n ((\operatorname{Re} x_j)^2 + (\operatorname{Im} x_j)^2) \end{aligned}$$

donde la expresión de la derecha es el cuadrado de la norma Euclidiana del vector

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Re} x_j (e_j) + \sum_{j=1}^n \operatorname{Im} x_j (ie_j) = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

en la base ortonormal  $\{e_j, ie_j\}$ . La unicidad se sigue de que la característica de  $\mathbb{R}$  es diferente de 2 y entonces para la forma cuadrática  $\| \cdot \|^2$ , la forma bilineal simétrica asociada es única de acuerdo al Teorema 1.9.1.

Los productos internos Hermitianos sobre espacios complejos no sólo inducen estructuras ortogonales, sino también estructuras simplécticas sobre  $L_{\mathbb{R}}$ , de acuerdo a la siguiente construcción: retomemos temporalmente  $g(l, m)$  para representar un producto interno sobre  $L$  y consideremos

$$\begin{aligned} a(l, m) &= \text{Reg}(l, m) \\ b(l, m) &= \text{Img}(l, m) \end{aligned}$$

donde  $\text{Reg}(l, m)$  y  $\text{Img}(l, m)$  es la parte real e imaginaria del producto interno  $g(l, m)$ , respectivamente.

Entonces se cumple lo siguiente:

**Proposición 2.2.1.** **a)**  $a(l, m)$  es un producto interno simétrico y  $b(l, m)$  es un producto interno antisimétrico sobre  $L_{\mathbb{R}}$ ; ambos productos son invariantes bajo la multiplicación por  $i$ , esto es, la estructura canónica compleja sobre  $L_{\mathbb{R}}$ ,

$$a(il, im) = a(l, m), \quad b(il, im) = b(l, m).$$

**b)**  $a$  y  $b$  están relacionados por:

$$a(l, m) = b(il, m), \quad b(l, m) = -a(il, m).$$

**c)** Cualquier par de formas invariantes  $a, b$  en  $L_{\mathbb{R}}$ , antisimétrica y simétrica, relacionadas por  $b$ ), define un producto interno Hermitiano en  $L$  de acuerdo a la fórmula

$$g(l, m) = a(l, m) + ib(l, m).$$

**d)** La forma  $g$  es positiva definida si y sólo si la forma  $a$  es positiva definida

*Demostración.* La condición de simetría Hermitiana  $g(l, m) = \overline{g(m, l)}$  es equivalente al hecho

$$a(l, m) + ib(l, m) = a(m, l) - ib(m, l)$$

esto es, la simetría de  $a$  y la antisimetría de  $b$ . La condición  $g(il, im) = i\bar{g}(l, m) = g(l, m)$  es equivalente a que  $a$  y  $b$  son  $i$  invariantes.

La condición de  $\mathbb{C}$ -linealidad de  $g$  de acuerdo al primer argumento indica la  $\mathbb{R}$ -linealidad y linealidad relativa a la multiplicación por  $i$ , esto es,

$$a(il, m) + ib(il, m) = g(il, m) = ig(l, m) = -b(l, m) + ia(l, m)$$

y por tanto se sigue la relación  $b$ ) y la afirmación  $c$ ).

Finalmente

$$g(l, l) = a(l, l) + ib(l, l) = a(l, l) - ib(l, l)$$

por la antisimetría de  $b$ , así

$$g(l, l) = a(l, l)$$

y por consecuencia se tiene  $d$ ). ■

**Corolario 2.2.1.** Si la forma  $g$  es positiva definida y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base ortonormal para  $g$ , entonces  $\{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$  es una base ortonormal para  $a$  y una base simpléctica para  $b$ .

---

Regresando al espacio unitario  $L$ , la desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz compleja toma la forma siguiente

**Proposición 2.2.2.** *Para cualquier  $l_1, l_2 \in L$*

$$| (l_1, l_2) |^2 \leq \| l_1 \|^2 \| l_2 \|^2$$

y la igualdad se cumple si y sólo si los vectores son proporcionales.

*Demostración.* Para cualquier real  $t$  tenemos

$$\begin{aligned} \| tl_1 + l_2 \|^2 &= (tl_1 + l_2, tl_1 + l_2) \\ &= t^2(l_1, l_1) + (tl_1, l_2) + \overline{(l_2, tl_1)} + (l_2, l_2) \\ &= t^2 \| l_1 \|^2 + t(l_1, l_2) + \overline{t(l_1, l_2)} + \| l_2 \|^2 \\ &= t^2 \| l_1 \|^2 + 2t \operatorname{Re}(l_1, l_2) + \| l_2 \|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

El caso  $l_1 = 0$  es trivial. Supongamos  $l_1 \neq 0$ , entonces el discriminante del trinomio

$$t^2 \| l_1 \|^2 + 2t \operatorname{Re}(l_1, l_2) + \| l_2 \|^2$$

es menor o igual a cero, esto es ,

$$(\operatorname{Re}(l_1, l_2))^2 \leq \| l_1 \|^2 \| l_2 \|^2.$$

Pero si  $(l_1, l_2) = | (l_1, l_2) | e^{i\Phi}$ ,  $\Phi \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\operatorname{Re}(e^{-i\Phi} l_1, l_2) = \operatorname{Re}(e^{-i\Phi} e^{i\Phi} | (l_1, l_2) | ) = | (l_1, l_2) |$$

por lo tanto

$$| (l_1, l_2) |^2 \leq \| e^{-i\Phi} l_1 \|^2 \| l_2 \|^2 = \| e^{-i\Phi} \|^2 \| l_1 \|^2 \| l_2 \|^2 = \| l_1 \|^2 \| l_2 \|^2$$

y la igualdad se cumple si y sólo si  $\| t_0 e^{-i\Phi} l_1 + l_2 \| = 0$  para un  $t_0 \in \mathbb{R}$  apropiado. ■

Exactamente de la misma manera que en el caso Euclidiano, se derivan los siguientes corolarios:

**Corolario 2.2.2.** *(Desigualdad del triángulo) Para cualquier  $l_1, l_2 \in L$*

$$\| l_1 + l_2 \| \leq \| l_1 \| + \| l_2 \|$$

$$y \quad \| l_1 - l_3 \| \leq \| l_1 - l_2 \| + \| l_2 - l_3 \|.$$

**Corolario 2.2.3.** *La longitud del vector  $l$  es  $\| l \|$  la norma en  $L$ .*

Sólo la propiedad  $\| al \| = | a | \| l \|$  se verifica un poco diferente,

$$\| al \| = (al, al)^{\frac{1}{2}} = (a\bar{a}(l, l))^{\frac{1}{2}} = | a | \| l \|.$$

### 2.2.1. Ángulos en espacios unitarios

Sean  $l_1, l_2 \in L$  vectores no cero, la Proposición 2.2.2 implica

$$0 \leq \frac{\| (l_1, l_2) \|}{\| l_1 \| \| l_2 \|} \leq 1$$

Por lo tanto, existe un ángulo  $\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , para el cual

$$\cos \phi = \frac{\| (l_1, l_2) \|}{\| l_1 \| \| l_2 \|}. \quad (2.2.1)$$

Sin embargo, en modelos muy importantes de las ciencias naturales, esta misma cantidad  $\frac{\| (l_1, l_2) \|}{\| l_1 \| \| l_2 \|}$  (más precisamente su cuadrado) es interpretado no sólo como el coseno de un ángulo, si no como una *probabilidad*. En el siguiente capítulo describiremos brevemente los postulados de la Mecánica Cuántica, que incluyen esta interpretación.

### 2.2.2. Distancias en espacios unitarios

La distancia entre dos subespacios de un espacio unitario  $L$  es definido como en espacios Euclidianos:

$$d(U, V) = \inf \{ \| l_1 - l_2 \| \mid l_1 \in U, l_2 \in V \}.$$

La distancia del vector  $l$  al subespacio  $L_0$  es igual a la longitud de la proyección ortogonal de  $l$  a  $L_0^\perp$ . La prueba se hace de igual manera que en el caso Euclidiano.

En particular si  $\{e_1, \dots, e_m\}$  es una base ortonormal de  $L_0$ , entonces

$$d(l, L_0) = \left\| l - \sum_{i=1}^m (l, e_i) e_i \right\|$$

y como en el caso Euclidiano

$$\left\| \sum_{i=1}^m (l, e_i) e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^m |(l, e_i)|^2 \leq \| l \|^2$$

de acuerdo al teorema de Pitágoras.

Como en los casos anteriores, podemos introducir las desigualdades para funciones de valor complejo

$$\left| \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

$$y \quad \left( \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## 2.3. Operadores ortogonales y unitarios

Recordemos que en la sección 1.1 mencionamos el concepto de operador lineal como un caso particular de función multilinear. Entonces la definición formal de un operador lineal es la siguiente:

**Definición 2.3.1.** Sea  $V$  un espacio lineal sobre el campo  $\mathbb{K}$  y  $\mathfrak{S} : V \longrightarrow V$  una función.  $\mathfrak{S}$  es un operador lineal si :

a)  $\mathfrak{S}(u + v) = \mathfrak{S}(u) + \mathfrak{S}(v) \quad u, v \in V.$

b)  $\mathfrak{S}(ku) = k\mathfrak{S}(u) \quad u \in V, k \in \mathbb{K}.$

**Definición 2.3.2.** Sea  $L$  un espacio lineal con el producto interno  $g$  y  $f : L \longrightarrow L$  una isometría, esto es, un operador lineal invertible que cumple la condición

$$g(f(l_1), f(l_2)) = g(l_1, l_2)$$

Si  $L$  es un espacio euclidiano estos operadores son llamados ortogonales y si  $L$  es un espacio Hermitiano los operadores son llamados unitarios.

**Proposición 2.3.1.** Sea  $L$  un espacio lineal de dimensión finita con un producto interno simétrico o Hermitiano no degenerado  $(\ , \ )$ . Entonces para que el operador lineal  $f : L \longrightarrow L$  sea una isometría es necesario y suficiente que cualquiera de las siguientes condiciones se cumpla:

a)  $(f(l), f(l)) = (l, l)$  para todo  $l \in L$  (suponiendo que la característica del campo escalar es distinta de dos).

b) Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base de  $L$  con la matriz gram  $G$  y sea  $A$  la matriz de  $f$  en esta base, entonces

$$A^t G A = G \quad \text{o} \quad A^t G \bar{A} = G.$$

c)  $f$  manda bases ortogonales en bases ortogonales.

d) Si la signatura (Secc. 1.8) del producto interno es igual a  $(p, q)$ , entonces la matriz de  $f$  en cualquier base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}\}$  con  $(e_i, e_i) = 1$  para  $i \leq p$  y  $(e_i, e_i) = -1$  para  $p + 1 \leq i \leq p + q$  satisface la siguiente condición

$$A^t \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

o

$$A^t \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} \bar{A} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

en los casos simplécticos y Hermitianos, respectivamente.

*Demostración.* **a)** En el caso simétrico por el Teorema 1.9.1 se tiene que para la forma cuadrática  $q(l) = h(l, l)$ ,  $h$  está definida de manera única y además como

$$q(l) = (l, l) = (f(l), f(l)) = q(f(l))$$

y

$$\begin{aligned} (l, m) &= \frac{1}{2} [q(l+m) - q(l) - q(m)] \\ &= \frac{1}{2} [q(f(l+m)) - q(f(l)) - q(f(m))] \\ &= \frac{1}{2} [q(f(l) + f(m)) - q(f(m)) - q(f(m))] \\ &= (f(l), f(m)) \end{aligned}$$

esto es,  $f$  preserva la polarización (ver Teorema 1.9.1).

En el caso Hermitiano tenemos análogamente

$$Re(l, m) = \frac{1}{2} [q(l+m) - q(l) - q(m)]$$

y en la Proposición 2.2.1 inciso *c*), se demostró que  $(l, m)$  es reconstruido de manera única con  $Re(l, m)$  de acuerdo a la fórmula

$$(l, m) = Re(l, m) - iRe(l, m)$$

y por tanto  $f$  preserva  $(l, m)$ .

**b)** Si  $f$  es una isometría entonces la matriz Gram de la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  son iguales y además, las matrices Gram son  $A^tGA$  en el caso simétrico y  $A^tG\bar{A}$  en el caso simpléctico.

Recíprocamente, si  $f$  transforma la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  en  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  y sus matrices Gram son iguales, entonces  $f$  es una isometría.

Los incisos *c*) y *d*) son casos particulares de *a*) y *b*).

■

De esta Proposición 2.3.1 se sigue que operadores ortogonales (unitarios) son operadores que en una y por tanto en cualquier base ortogonal son especificados por matrices ortogonales (unitarias), es decir, por matrices  $U$  que satisfacen las relaciones

$$UU^t = E_n \quad U\bar{U}^t = E_n$$

donde  $E_n$  es la matriz identidad.

A continuación mencionaremos algunos grupos clásicos de matrices de los cuales no daremos más detalle en este trabajo, pero que los utilizaremos más adelante ( Ver más [5]).

- a) *El grupo lineal general*  $GL(n, \mathbb{K})$ , consiste de matrices de  $n \times n$  no singulares sobre el campo  $\mathbb{K}$ .
- b) *El grupo lineal especial*  $SL(n, \mathbb{K})$ , consiste de matrices de  $n \times n$  sobre el campo  $\mathbb{K}$  con determinante igual a uno.
- c) *El grupo ortogonal*  $O(n, \mathbb{K})$  que consiste de matrices de  $n \times n$  las cuales satisfacen la condición  $AA^t = E_n$ .  
Tales matrices forman un grupo ya que:

$$E_n E_n^t = E_n, \quad A^{-1}(A^{-1})^t = A^{-1}(A^t)^{-1} = (AA^t)^{-1} = (E_n^t)^{-1} = E_n.$$

- d) *El grupo ortogonal especial*  $SO(n, \mathbb{K})$ , este es el grupo que consiste de matrices ortogonales con determinante igual a uno

$$SO(n, k) = O(n, \mathbb{K}) \cap SL(n, \mathbb{K}).$$

La notación  $SO(n)$  es usada en vez de  $SO(n, \mathbb{R})$ .

- e) *El grupo unitario*  $U(n)$ , consiste de matrices complejas de  $n \times n$  que satisfacen la condición  $A\bar{A}^t = E_n$ .  
Probemos que efectivamente este conjunto es un grupo:

$$E_n \bar{E}_n^t = E_n$$

$$A^{-1} \bar{A}^{-1^t} = A^{-1} ((\bar{A})^{-1})^t = A^{-1} (\bar{A}^t)^{-1} = (\bar{A}^t A)^{-1} = (E_n^t) = E_n$$

y finalmente

$$(AB)(\bar{A}\bar{B})^t = (AB)(\bar{A}\bar{B})^t = AB\bar{B}^t \bar{A}^t = A\bar{A}^t = E_n.$$

Los elementos  $U(n)$  son llamadas *matrices unitarias*.

- f) *El grupo unitario especial*  $SU(n)$ , consiste de matrices unitarias con determinante igual a uno.

Siguiendo la definición se tiene que

$$U(1) = \{u \in \mathbb{C} \mid u\bar{u}^t = 1\} = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = 1\} = \{e^{i\phi} \mid \phi \in \mathbb{R}\}$$

$$U(1) = \{u \in \mathbb{R} \mid uu^t = 1\} = \{u \in \mathbb{R} \mid u^2 = 1\} = \{\pm 1\} = U(1) \cap \mathbb{R}$$

Aún más, si  $U \in O(n) = U(n) \cap GL(n, \mathbb{R})$ , entonces  $UU^t = E_n$ , y por ser  $U$  invertible  $(\det U)^2 = 1$ , así  $\det U = \pm 1$ .

Ahora si

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$


---





con,

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(\phi) \\ \operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

- c) *Los eigenvectores de un operador ortogonal o unitario correspondientes a diferentes eigenvalores son ortogonales*

*Demostración.* **a)** La suficiencia es clara pues si  $U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $|\lambda_i|^2 = 1$ , entonces  $U\bar{U}^t = E_n$ , donde  $U$  es la matriz de un operador .

Recíprocamente, sea  $f$  un operador unitario,  $\lambda$  un eigenvalor de  $f$  y  $L_\lambda$  el correspondiente subespacio característico, entonces  $L = L_\lambda + L_\lambda^\perp$ . El subespacio  $L_\lambda$  es unidimensional, invariante bajo  $f$  y la restricción de  $f$  a  $L_\lambda$  es un operador unitario unidimensional. Por lo tanto  $\lambda \in U(1)$ , esto es,  $|\lambda|^2 = 1$ .

Si probamos que los subespacios  $L_\lambda^\perp$  son  $f$  invariantes, entonces por inducción sobre la dimensión de  $L$  podemos deducir que  $L$  puede ser descompuesto en una suma directa de subespacios unidimensionales invariantes y ortogonales a pares. Con lo cual probaríamos el resultado.

En efecto, si  $l_0 \in L_\lambda, l_0 \neq 0$  y  $(l_0, l) = 0$  ( $l \in L_\lambda^\perp$ ), entonces

$$(l_0, f(l)) = (f(\lambda^{-1}l_0), f(l)) = (\lambda^{-1}l_0, l) = \lambda^{-1}(l_0, l) = 0$$

esto es,  $f(l) \in L_\lambda^\perp$  ( $L_\lambda^\perp$  es  $f$ -invariante) que es lo que se quería probar.

- b)** En el caso ortogonal, la suficiencia se prueba por inducción sobre la dimensión de  $L$ .

Para los casos en que  $\dim L = 1, 2$  se hace el mismo procedimiento de a). Si  $\dim L \geq 3$  y  $f$  tiene un eigenvalor real  $\lambda$ , entonces hacemos otra vez  $L = L_\lambda + L_\lambda^\perp$  y  $|\lambda|^2 = 1$  ( $\lambda = \pm 1$  necesariamente). Finalmente si  $f$  no tiene eigenvalores reales, entonces seleccionamos subespacios  $L_0 \subset L$  bidimensional  $f$  invariante de acuerdo a [5, Cap. 1, Prop. 12.16]. Para  $SO(2)$  se tiene que en estos subespacios la matriz de la restricción de  $f$  en cualquier base ortonormal tiene la forma  $A(\phi)$ , Por lo tanto, sólo resta verificar que el subespacio  $L_0^\perp$  es invariante bajo  $f$ .

En efecto, si  $(l_0, l) = 0$  para todo  $l_0 \in L_0$ , entonces

$$(l_0, f(l)) = (f(f^{-1}(l_0)), f(l)) = (f^{-1}(l_0), l) = 0$$

pues  $f^{-1}(l_0) \in L_0$  para todo  $l_0 \in L_0$ .

- c)** Sea  $f(l_i) = \lambda_i l_i$ ,  $i = 1, 2$ , entonces

$$(l_1, l_2) = (f(l_1), f(l_2)) = (\lambda_1 l_1, \lambda_2 l_2) = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 (l_1, l_2)$$

además como  $|\lambda_i|^2 = 1$ , entonces para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , tenemos  $\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \neq 1$ . Por lo tanto  $(l_1, l_2) = 0$ . Este argumento es aplicable tanto para el caso unitario como para el ortogonal. Con esto se completa la prueba. ■

## 2.4. Operadores adjuntos y auto-adjuntos

Cuando estudiamos operadores nos damos cuenta que los operadores diagonalizables son la clase más simple e importante de los operadores lineales. También se ha visto por el Teorema 2.3.1 que operadores en espacios euclidianos y unitarios con espectro real son diagonalizables en alguna base ortonormal, los cuales veremos más adelante que desempeñan un papel muy importante.

### 2.4.1. Operadores adjuntos en espacios con una forma bilineal

En esta sección estudiaremos operadores con características muy especiales, como el adjunto de un operador y más específicamente estudiaremos los operadores auto-adjuntos y algunas caracterizaciones de estos.

**Teorema 2.4.1.** *Sea  $f : L \rightarrow M$  una función lineal de espacios lineales. Entonces existe una única función lineal  $f^* : M^* \rightarrow L^*$  que satisface la siguiente condición,*

$$(f^*(m^*), l) = (m^*, f(l))$$

para todo  $m^* \in M^*$ ,  $l \in L$

*Demostración.* Unicidad de  $f^*$ . Sea  $f_1^*$  y  $f_2^*$  dos funciones que cumplen la propiedad mencionada. Entonces  $(f_1^*(m^*), l) = (m^*, f(l)) = (f_2^*(m^*), l)$ , para todo  $m^* \in M^*$ ,  $l \in L$ , por lo tanto se sigue que  $((f_1^* - f_2^*)(m^*), l) = 0$ . Si fijamos  $m^*$  y variamos  $l$ . Entonces  $(f_1^* - f_2^*)(m^*) \in L^*$ , es una funcional lineal sobre  $L$  que asume sólo valores cero y por lo tanto es igual a cero, es decir,  $f_1^* = f_2^*$ .

Existencia de  $f^*$ . Fijemos  $m^* \in M^*$  e introducimos la expresión  $(m^*, f(l))$  como una función sobre  $L$ . La linealidad de  $f$  y la bilinealidad de  $(\ , \ )$  implican que esta función es lineal. Por lo tanto pertenece a  $L^*$ . Denotando  $f^*(m^*) = (m^*, f)$ . Las igualdades

$$f^*(m_1^* + m_2^*) = f^*(m_1^*) + f^*(m_2^*), \quad f^*(am^*) = af^*(m^*)$$

se siguen de la linealidad  $(m^*, f(l))$  con respecto a  $m^*$ . Esto significa que  $f^*$  es una función lineal. ■

Ahora construyamos un operador sobre  $f_1^* : L \rightarrow L$  tal que cumpla la condición del Teorema 2.4.1 para posteriormente definir lo que es un operador adjunto. Para esto asumamos que una forma bilineal no degenerada  $g : L \times L \rightarrow \mathbb{K}$ , que determina el isomorfismo  $\tilde{g} : L \rightarrow L^*$  existe sobre  $L$ . Entonces identificamos  $L^*$  con  $L$  por medio de  $\tilde{g}^{-1}$ , y así podemos estudiar  $\tilde{g}^{-1} \circ f^* \circ \tilde{g}$  como un operador sobre  $L$ .

Si ahora denotamos a  $f_1^*$  por  $\tilde{g}^{-1} \circ f^* \circ \tilde{g}$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} g(f_1^*(l), m) &= (\tilde{g}(f_1^*(l)), m) \\ &= (f^* \circ \tilde{g}(l), m) \\ &= (f^*(\tilde{g}(l)), m) \\ &= (f^*(l^*), m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(l, f(m)) &= (\tilde{g}(l), \bar{f}(m)) \\ &= (l^*, f(m)). \end{aligned}$$

Por la propiedad de  $f^*$  se tiene

$$g(f_1^*(l), m) = (f^*(l^*), m) = (l^*, f(m)) = g(l, f(m))$$

y así,  $f_1^*$  está definido de manera única por la fórmula

$$g(f_1^*(l), m) = g(l, f(m)).$$

$f_1^*$  es llamado el *adjunto de  $f$*  con respecto al producto interno  $g$  de acuerdo a la siguiente definición.

**Definición 2.4.1.** *Sea  $L$  un espacio lineal con producto interno  $g$ . Un operador lineal  $f^* : L \rightarrow L$  es el adjunto de  $f : L \rightarrow L$  con respecto al producto interno  $g$  si cumple la siguiente propiedad*

$$g(f^*(l_1), l_2) = g(l_1, f(l_2)) \quad \text{para todo } l_1, l_2 \in L.$$

y cuando  $f = f^*$ , el operador  $f$  es llamado *auto-adjunto*.

Muchas veces utilizaremos  $(\ , \ )$  en vez de  $g(\ , \ )$ .

En el caso sesquilineal,  $\tilde{g}$  define un isomorfismo de  $L$  a  $\bar{L}^*$ , por lo tanto el operador  $\bar{f}^* : \bar{L}^* \rightarrow \bar{L}^*$ , el cual está definido como  $\bar{f}^*(m) = f^*(m)$ , transfiere a  $L$  con ayuda del isomorfismo  $\tilde{g}$ . El siguiente operador el cual llamaremos operador de transferencia  $\tilde{g}^{-1} \circ \bar{f}^* \circ \tilde{g} : L \rightarrow L$  es lineal y lo denotaremos por  $f_1^*$ . Este operador  $f_1^*$  cumple la siguiente fórmula en el caso sesquilineal

$$g(f_1^*(l), m) = g(l, f(m))$$

El operador  $f : L \rightarrow L$  con la propiedad  $f_1^* = f$  en espacios euclidianos y unitarios de dimensión finita es llamado *auto-adjunto* (o en el caso euclidiano *operador simétrico* y en el caso unitario *operador Hermitiano*).

**Proposición 2.4.1.** *Si el operador  $f : L \rightarrow L$  en una base ortonormal está definido por la matriz  $A$ , entonces el operador  $f_1^*$  está definido en la misma base por la matriz  $A^t$  (caso euclidiano) o  $\bar{A}^t$  (caso unitario).*

*En particular, un operador es auto-adjunto si y sólo si su matriz en una base ortonormal es simétrica o hermitiana*

*Demostración.* Denotemos el producto interno en  $L$  por paréntesis y por vectores las columnas que son las coordenadas en una base ortonormal. Entonces tenemos

$$(f(\vec{x}), \vec{y}) = (A\vec{x})^t \vec{y} = (\vec{x}^t A^t) \vec{y} = \vec{x}^t (A^t \vec{y}) = (\vec{x}, f_1^*(\vec{y}))$$

en el caso euclidiano. De aquí se sigue que la matriz de  $f_1^*$  es igual a  $A^t$ . De igual manera se hace para el caso hermitiano. ■

## 2.5. Operadores auto-adjuntos y productos internos

En esta última sección estudiaremos la relación que existe entre el conjunto de operadores autoadjuntos y el conjunto de productos internos, así como también las condiciones bajo las cuales un operador es auto-adjunto en un espacio euclidiano o unitario.

Sea  $L$  un espacio con un producto interno simétrico o hermitiano  $(\cdot, \cdot)$ . Entonces para cualquier operador  $f : L \rightarrow L$  podemos obtener un nuevo producto interno  $(\cdot, \cdot)_f$  sobre  $L$ , por la fórmula,

$$(l_1, l_2)_f = (f(l_1), l_2).$$

Supongamos que  $L$  es no degenerado, usando el concepto de un operador auto-adjunto, se tiene,

$$(l_2, l_1)_f = (f(l_2), l_1) = (l_2, f^*(l_1)) = (f^*(l_1), l_2) = (l_1, l_2)_{f^*}$$

en el caso euclidiano, y análogamente

$$\overline{(l_2, l_1)_f} = \overline{(f(l_2), l_1)} = \overline{(l_2, f^*(l_1))} = (f^*(l_1), l_2) = (l_1, l_2)_{f^*}$$

en el caso unitario.

Por lo tanto, si el operador  $f$  es auto-adjunto, entonces la nueva métrica  $(l_1, l_2)_f$  será también simétrica o hermitiana.

El recíproco es cierto y se verifica inmediatamente con la Proposición 2.4.1.

Hemos establecido una biyección entre el conjunto de operadores auto-adjuntos y productos internos simétricos en un espacio en el cual un producto interno no degenerado está en términos de otro. En el caso simétrico y hermitiano después de obtener una base ortonormal, en el lenguaje de matrices, la matriz Gram de  $(\cdot, \cdot)_f$  es la transpuesta de la matriz de  $f$ .

**Teorema 2.5.1. a)** *Para que un operador  $f$  en espacios euclidianos o espacios unitarios de dimensión finita sea auto-adjunto es necesario y suficiente que sea diagonalizable en una base ortonormal y tenga un espectro real.*

**b)** *Los eigenvectores de un operador auto-adjunto correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales.*

*Demostración. a)* Sea  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormal en  $L$  y sea  $f : L \rightarrow L$  un operador lineal para el cual  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces

$$(f(l_1), l_2) = (l_1, f(l_2)) \quad \text{para todo } l_1, l_2 \in L$$

En efecto,

$$(f(l_1), l_2) = (f(\sum x_i e_i), \sum y_j e_j) = \sum \lambda_i x_i y_i \quad \text{o} \quad (\sum \lambda_i x_i \bar{y}_i)$$

$$(l_1, f(l_2)) = (\sum x_i e_i, f(\sum y_j e_j)) = \sum \lambda_i x_i y_i \quad \text{o} \quad (\sum \lambda_i x_i \bar{y}_i)$$

y con esto probamos la suficiencia.

Por otro lado, el hecho de que el espectro es real en el caso unitario es fácil establecerlo de acuerdo a lo siguiente. Sea  $\lambda$  un eigenvalor de  $f$  y sea  $l \in L$  el correspondiente eigenvector, entonces

$$\lambda(l, l) = (f(l), l) = (l, f(l)) = \bar{\lambda}(l, l)$$

por lo tanto  $\lambda = \bar{\lambda}$ , pues  $(l, l) \neq 0$ . El caso ortogonal se reduce al caso unitario siguiendo el siguiente esquema. Examinemos el espacio complejificado  $L^{\mathbb{C}}$  ( $L^{\mathbb{C}} : L \oplus iL$ , suma sobre  $\mathbb{R}$ ) [5, Cap.1, Secc. 12] e introducimos un producto interno sesquilineal de acuerdo con la fórmula

$$(l_1 + il_2, l_3 + il_4) = (l_1, l_3) + (l_2, l_4) + i(l_2, l_3) - i(l_1, l_4)$$

con la cual  $L^{\mathbb{C}}$  se transforma en un espacio unitario, pues

$$\overline{(l_3 + il_4, l_1 + il_2)}^t = (l_1 + il_2, l_3 + il_4)$$

y además este producto es positivo definido y  $f^{\mathbb{C}} : L^{\mathbb{C}} \rightarrow L^{\mathbb{C}}$  se transforma en un operador hermitiano sobre  $L^{\mathbb{C}}$ .

El espectro de  $f^{\mathbb{C}}$  coincide con el espectro de  $f$  ya que cualquier base real de  $L$  es también base compleja de  $L^{\mathbb{C}}$ ,  $f$  y  $f^{\mathbb{C}}$  tienen bases idénticas y por lo tanto el espectro es real. Ambos casos pueden ser estudiados de manera paralela aplicando inducción sobre la dimensión de  $L$ .

El caso  $\dim L = 1$  es trivial. Para  $\dim L > 1$  seleccionamos un eigenvector  $\lambda$  y su correspondiente subespacio característico  $L_0$ , y haciendo el conjunto  $L_1 = L_0^{\perp}$ , entonces  $L = L_0 \oplus L_1^{\perp}$ . El subespacio  $L_1$  es invariante con respecto a  $f$ , esto es, que si  $l_0 \in L_0, l_0 \neq 0$  y  $l \in L_1, (l_0, l) = 0$ , entonces

$$(l_0, f(l)) = (f(l_0), l) = \lambda(l_0, l) = 0$$

de tal manera que  $f(l) \in L$ . Por la hipótesis de inducción sobre la restricción de  $f$  a  $L$  es diagonalizable en la base ortonormal de  $L_1$ . Agregando el vector  $l_0 \in L_0, |l_0| = 1$ , obtenemos la base requerida para  $L$ .

b) Sea  $f(l_1) = \lambda_1 l_1, f(l_2) = \lambda_2 l_2$ , entonces

$$\lambda_1(l_1, l_2) = (f(l_1), l_2) = (l_1, f(l_2)) = \lambda_2(l_1, l_2)$$

de aquí que si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces  $(l_1, l_2) = 0$ . ■

**Corolario 2.5.1.** *Cualquier matriz real simétrica o compleja hermitiana tiene un espectro real y es diagonalizable.*

*Demostración.* Construimos, en términos de la matriz  $A$  (real simétrica o compleja hermitiana) un operador auto-adjunto en el espacio coordenado  $\mathbb{R}^n$  o  $\mathbb{C}^n$  con una métrica canónica euclidiana o unitaria, y aplicando el Teorema 2.5.1 se tiene un espectro real y es diagonalizable. Más aún, podemos obtener una matriz  $X$  tal que  $X^{-1}AX$  es diagonal y  $X$  está en  $O(n)$  o  $U(n)$  respectivamente. ■



## Capítulo 3

# Conceptos básicos de Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica, también conocida como mecánica ondulatoria, es la rama de la física que estudia el comportamiento de la materia cuando las dimensiones de esta son tan pequeñas, que empiezan a notarse efectos como la imposibilidad de conocer simultáneamente su posición y velocidad, sin afectar a la propia partícula. [8] Las leyes de la mecánica cuántica no pueden demostrarse de manera semejante a lo que sucede con las leyes de Newton y las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, se espera que estas leyes puedan deducirse, más o menos directamente como consecuencias lógicas de ciertos experimentos seleccionados. La descripción cuántica de la naturaleza es demasiado abstracta para que esto sea posible. Los conceptos básicos de la teoría cuántica están fuera del alcance de la experiencia diaria pero no son muy complicados de entender. Estos conceptos básicos son los siguientes:

- *Función de estados:* La descripción de un sistema se hace mediante la especificación de una función especial, llamada función de estado del sistema, la cual no puede observarse directamente. La información contenida en la función de estados es esencialmente estadística o probabilística. [8]
- *Observables:* La especificación o determinación de una función de estados es consecuencia de un conjunto de observaciones y mediciones de las propiedades físicas o atributos del sistema estudiado. Propiedades que pueden medirse, tales como la energía, momento lineal, momento angular y otras variables dinámicas son llamadas observables. [8]  
Observaciones u observables se representan por *Operadores*.

El proceso de observación exige que haya cierta interacción entre el instrumento de medida y el sistema observado. Clásicamente pueden suponerse estas interacciones tan pequeñas como se requiera, generalmente se toman infinitesimales, en este caso el sistema no se perturba por la observación, pero a escala cuántica, la interacción tiene características discretas y no puede disminuir indefinidamente, sino hasta cierto límite. [8]

El acto de observar provoca en el sistema ciertas perturbaciones incontrolables e irreducibles. La observación de la propiedad  $A$  provocará cambios incontrolables en otra observable  $B$  relacionado con este. [8]

La noción de que la observación precisa de una propiedad provoca que una segunda propiedad

## CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA

### 3.1. EL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG

---

(llamada complemento de la primera) sea inobservable, es un concepto exclusivamente cuántico sin analogía en la física clásica. Las características de ser onda o partícula, nos proporciona un ejemplo de un par de propiedades complementarias. La dualidad partícula-onda de sistemas cuánticos es una afirmación del hecho de que todos los sistemas pueden exhibir cualquiera de las dos propiedades dependiendo de las observaciones realizadas sobre el sistema.

Las variables dinámicas posición y momento lineal, son un ejemplo más cuantitativo de una pareja de observables complementarios. Al observar la posición de una partícula, por ejemplo iluminándola, necesariamente provocará una perturbación en su momento lineal. Este resultado es consecuencia de la masa corpuscular de la luz; la medida de la posición de una partícula exige que por lo menos un fotón choque con la partícula, siendo esta colisión la que provoca la perturbación. Consecuencia inmediata de esta relación entre medición y perturbación es que las trayectorias precisas de las partículas no pueden definirse cuánticamente.

La existencia de una trayectoria definida implica el conocimiento de la posición y del momento lineal de la partícula en el *mismo instante*, pero el conocimiento simultáneo de ambas propiedades no es posible, la medición de una de ellas provoca una perturbación incontrolable y apreciable en la otra, como es el caso de sistemas cuánticos.

Estas perturbaciones mutuas o incertidumbre no son debidas a la técnica experimental, son consecuencias inevitables de la medición u observación. La existencia inevitable de estos efectos para una pareja de variables complementarias fue enunciada por *Heisenberg* en su famoso *Principio de incertidumbre*. [2]

### 3.1. El principio de incertidumbre de Heisenberg

Un aspecto importante al considerar las variables dinámicas como operadores, es que la propiedad no conmutativa de los operadores en mecánica cuántica tienen un significado preciso en función de observaciones y mediciones.

La especificación de una función de estado particular, implica que el sistema estudiado ha sido preparado mediante una secuencia de observaciones. Medir el valor de una variable dinámica es equivalente a operar sobre la función de estado con el operador que representa a esta variable. En general, bajo el punto de vista cuántico, una medición provoca perturbaciones en el sistema observado. Por lo tanto, la medición de la propiedad  $A$  no proporciona necesariamente el mismo resultado si se lleva a cabo después de medir la propiedad  $B$  o se realiza previamente a esta, ya que la perturbación provocada al medir  $B$  puede causar cambios en el valor  $A$ . En este caso  $A$  y  $B$  no conmutan pero si conmutarían si no hubiera interferencia. El principio de incertidumbre se refiere precisamente a la interferencia provocada por la observación.

La interpretación física de la relación matemática [3]

$$\Delta \widehat{f}_\psi \Delta \widehat{g}_\psi \geq \frac{1}{2} | ([f, g]\psi, \psi) |$$

es la siguiente: si una partícula se encuentra en cierta región  $\Delta \widehat{f}_\psi$  sin importar el significado, entonces su momento lineal se encuentra en  $\Delta \widehat{g}_\psi$ , y recíprocamente. En otras palabras, la posición y el momento lineal de una partícula no pueden conocerse (determinarse o medirse)



## CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA

### 3.2. DESARROLLO DE LAS LEYES DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

---

simultáneamente con precisión arbitraria, sino hasta cierto límite fijado por la relación anterior. Siendo esta una versión matemática no muy precisa del principio de incertidumbre enunciado por Heisenberg. Este principio demuestra que las trayectorias clásicas no tienen un significado preciso en el dominio de la mecánica cuántica. [8]

En general, la relación de incertidumbre se cumple entre parejas de variables dinámicas canónicamente conjugadas o complementarias, es decir, entre propiedades físicas del sistema estudiado que guardan alguna dependencia mutua.

## 3.2. Desarrollo de las leyes de la mecánica cuántica

Ahora empezaremos por el estudio de las leyes de la mecánica cuántica, considerando algunos experimentos y observaciones que resaltan la naturaleza dual de la materia y de la cual se concluye que las trayectorias precisas de partículas no existen, como lo plantea la mecánica de Newton y como consecuencia surge el problema de cómo caracterizar el estado de movimiento de un sistema cuántico y de cómo describirlo.

### 3.2.1. El aspecto ondulatorio de las partículas

En 1927 Davisson y Germer realizaron un experimento que consistía en la dispersión de un haz de electrones por un cristal, el cual revela los elementos básicos de la descripción cuántica de la naturaleza. Este experimento fue diseñado principalmente para comprobar la predicción de De Broglie, según la cual, en analogía a las propiedades corpusculares de la luz, perfectamente establecidas, también puede asociarse a una partícula de momento lineal  $p$  una onda  $\lambda$  que se llama *longitud de onda de De Broglie* expresado como

$$\lambda = \frac{\hbar}{p}$$

donde  $\hbar$  es la *constante de Planck*. [2]

Los resultados más importantes de Davisson y Germer son los siguientes:

- a) Los electrones poseen propiedades de partículas y de onda y la relación de De Broglie es cierta.
- b) No puede deducirse exactamente el comportamiento de un electrón sino únicamente su comportamiento probable.
- c) En mecánica cuántica no existen trayectorias definidas.

### 3.2.2. Complementariedad y el principio de correspondencia

Las conclusiones del experimento llevan a grandes dificultades conceptuales, que de alguna manera se tiene que reconciliar con los conceptos clásicos de partícula y onda. Para esto interviene el *principio de complementariedad* [8] enunciado por primera vez por Bohr.

## CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA

### 3.3. ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER PARA LA PARTÍCULA LIBRE

---

En forma general, el principio de complementariedad nos dice que la descripción cuántica de las propiedades de un sistema físico se expresan en términos de parejas de variables mutuamente complementarias. La precisión en la determinación de una de las variables, necesariamente implica una imprecisión de la otra.

Como otro ejemplo de complementariedad es, la posición y el momento lineal, el cual estudiaremos más adelante.

Se han planteado experimentos que la Mecánica Clásica no puede explicar y a su vez ponen en manifiesto ciertos aspectos de la Mecánica Cuántica. Sin embargo, no hay que olvidar que la Mecánica Clásica tiene un dominio muy amplio, entonces se tiene un requisito que debe satisfacer la Mecánica Cuántica: en el límite clásico las predicciones de las leyes cuánticas deben de estar en correspondencia con las predicciones clásicas. Este principio se le conoce como *principio de correspondencia* [8].

### 3.3. Ecuación de Schrödinger para la partícula libre

Al estudiar la evolución en el tiempo de una partícula libre, se han obtenido varias representaciones tanto integrales como diferenciales, en nuestro caso utilizaremos la representación diferencial que está motivada por la siguiente consideración: Una representación integral es una caracterización global, necesita la especificación de una función, el estado inicial en todo el espacio en un tiempo dado y con esta información calcular la solución a un tiempo posterior. Entonces es más común dar una caracterización local, en la cual la información de las propiedades del sistema en una vecindad infinitesimal del espacio-tiempo es suficiente para dar una solución. Esta descripción se logra mediante ecuaciones diferenciales, se prefiere esta última porque las ecuaciones diferenciales dan un punto de vista poderoso e independiente que es indispensable al tratar problemas más complicados de la partícula libre.

La *ecuación de Schrödinger* que determina el cambio de los estados en el tiempo de un sistema cuántico está dada por: [2]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hat{H}\psi \quad \left( \frac{1}{i\hbar}\hat{H}\psi, \text{ si introducimos la constante de Planck's} \right)$$

donde  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano (operador hermitiano, operador auto-adjunto) del sistema, el cual es el mismo que el operador energía.

### 3.4. Modelación matemática de los postulados de la mecánica cuántica

En Mecánica Cuántica se postula que sistemas físicos tales como el electrón, un átomo de hidrógeno, etc., pueden ser asociados con un modelo matemático que consiste de los siguientes datos

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
3.4. MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA

---

- a) Un espacio unitario  $\mathcal{H}$ , llamado *espacio de estados* del sistema, la mayor parte de estos espacios son espacios de Hilbert de dimensión finita que se desempeñan como un espacio de funciones en modelos de Física del espacio o el espacio tiempo. Espacios  $\mathcal{H}$  de dimensión finita surgen a grosso modo, como espacio de los grados de libertad internos de un sistema, esto es, si el sistema es considerado como localizado o si su movimiento en el espacio físico puede ser despreciado.
- b) Los *Rayos*, son subespacios complejos unidimensionales en  $\mathcal{H}$ , a los que llamaremos *estados* del sistema.

Toda información sobre el estado de un sistema, en un momento dado en el tiempo queda determinado por el rayo  $L \subset \mathcal{H}$  o el vector  $\psi \in L$ , que es llamada la *función*  $\psi$  correspondiente a este estado.

**Postulado 3.4.1.** *El conjunto de funciones  $\psi$  forman un espacio lineal complejo.* [5]

Este es el postulado principal el cual es llamado *principio de superposición*, y la combinación lineal  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$ ,  $a_i \in \mathbb{C}$  describe la superposición de los estados  $\psi_1, \dots, \psi_n$ . Notemos que los rayos  $\mathbb{C}\psi_i$  y no los  $\psi_i$  tienen significado físico. Sin embargo  $\psi_j$  se eligen normalizados y linealmente independientes, lo mismo que,  $\sum_{j=1}^n a_j \psi_j$ , entonces la arbitrariedad en la elección de los vectores  $\psi_j$  en estos rayos se reduce a la multiplicación por el número  $e^{i\phi_j}$ , que es llamado *fase de los factores*, la misma arbitrariedad existe en la elección de los coeficientes  $a_i$  los cuales podemos hacer reales y no negativos, esto junto con la *condición de normalización*  $\int \psi^* \psi dx = 1$ , donde  $\rho = \psi^* \psi$  es la densidad de probabilidad, hace posible definirlos de forma única.

La suposición más fuerte entre este esquema y la realidad consiste en el hecho de que contamos con sistemas físicos  $A_\psi$  (*hornos*) capaces de preparar muchos sistemas de salida en estados instantáneos  $\psi$  (más precisamente  $\mathbb{C}\psi$ ) para diferentes  $\psi \in \mathcal{H}$ , más aún, existen instrumentos físicos  $B_\chi$  (*filtros*), en los cuales los sistemas de entrada en algún estado  $\psi$  son absorbidos, y el mismo sistema es observado en la salida posiblemente diferente en algún estado  $\chi$  o sin cambio alguno.

El segundo postulado básico después del principio de superposición de la Mecánica Cuántica es el siguiente:

**Postulado 3.4.2.** *Un sistema preparado en el estado  $\psi \in \mathcal{H}$  puede ser observado inmediatamente después en el estado  $\chi \in \mathcal{H}$  con probabilidad*

$$\frac{|(\psi, \chi)|^2}{|\psi|^2 |\chi|^2} = \cos^2 \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\psi$  y  $\chi$ . [5]

Notar que este postulado es prácticamente una aplicación de la ecuación de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz compleja dada por la Proposición 2.2.2. Ahora si  $\psi$  y  $\chi$  son normalizados, entonces la probabilidad indicada arriba es igual  $|(\psi, \chi)|^2$ , y el producto  $(\psi, \chi)$ , el cual

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
**3.4. MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

---

es un número complejo, es llamado *probabilidad de amplitud* de la transición de  $\psi$  a  $\chi$ .

Cabe mencionar que en la literatura es muy común encontrar la siguiente notación: El producto interno  $(\psi, \chi)$  que es antilineal con respecto al primer argumento lo escribimos en la forma  $\langle \chi | \psi \rangle$ , en la que los estado iniciales y finales se ordenan de derecha a izquierda. El símbolo  $\langle \quad | \quad \rangle$  es llamado *braket* y correspondientemente el símbolo  $|\psi\rangle$  es el *vector ket* y el símbolo  $\langle \chi |$  el correspondiente *vector bra*. Desde el punto de vista matemático  $|\psi\rangle$  es un elemento de  $\mathcal{H}$  y el símbolo  $\langle \chi |$  es el correspondiente elemento del espacio de funciones antilineales  $\mathcal{H}^*$  y  $\langle \chi | \psi \rangle$  es el valor de  $\chi$  sobre  $\psi$ . [7]

Si  $\psi, \chi$  son ortogonales, esto es,  $(\psi, \chi) = 0$ , entonces el sistema preparado en el estado  $\psi$  no puede ser observado (inmediatamente después de la preparación) en el estado  $\chi$ , esto es, no pasará a través del filtro  $B_\chi$ . En todos los otros casos, hay una probabilidad no cero para una transición de  $\psi$  a  $\chi$ . [7]

Los elementos de cualquier base ortonormal  $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  forman la *base de estados* del sistema. Suponiendo que tenemos filtros  $B_{\psi_1}, \dots, B_{\psi_n}$ , pasando repetidamente estos sistemas a través de los filtros en el estado  $\psi = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i$ ,  $0 \leq a_i \leq 1$  ( $\psi$  se asume normalizado), observamos  $\psi_i$  con probabilidad  $a_i^2$ . Los coeficientes en esta combinación pueden ser teóricamente experimentales para una prueba estadística experimental. Esta es una de las razones por qué la Mecánica Cuántica requiere de una muestra estadística grande.

### 3.4.1. Valores promedio y el principio de incertidumbre

Sea  $f$  un observable,  $\lambda_i$  su espectro y  $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}(\lambda_i)$  su correspondiente descomposición ortogonal. Estando en el estado  $\psi$ ,  $|\psi|^2 = 1$ ,  $f$  asume el valor  $\lambda_i$  con probabilidad  $(\psi, p_i \psi)$ , donde  $p_i$  es la proyección ortogonal del operador en  $\mathcal{H}(\lambda_i)$ . Por lo tanto, si recordamos como se calcula el valor promedio de una variable aleatoria discreta, entonces el valor promedio  $\widehat{f}_\psi$  de la cantidad  $f$  en el estado  $\psi$ , obtenida de nuestras mediciones puede ser calculada como

$$\widehat{f}_\psi = \sum_i \lambda_i (\psi, p_i \psi) = \sum_i (\psi, \lambda_i p_i \psi) = (\psi, f(\psi))$$

que en mecánica cuántica también se escribe como

$$\widehat{f}(x) = \int f(x) \rho(x, t) dv,$$

donde  $\rho(x, t)$  es la densidad de probabilidad y la integral cubre todo el espacio [7].

En términos de la función de estados  $\psi$  obtenemos

$$\widehat{f}(x) = \int \psi^*(x, t) \widehat{f}(x) \psi(x, t) dv,$$

Por otro lado, si los operadores  $f$  y  $g$  son auto-adjuntos, entonces el operador  $fg$  generalmente no es auto-adjunto, esto es,

$$(fg)^* = g^* f^* = gf \neq fg$$

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
**3.4. MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

si  $f$  y  $g$  no conmutan. Sin embargo,  $f^2$ ,  $f - \lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) y el conmutador,  $[f, g] = (fg - gf)$  son auto-adjuntos. Los dos primeros son fácil de verificar. Sólo probemos que el conmutador lo es. En efecto, [7]

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{i}[f, g](l_1), l_2\right) &= \left(\frac{1}{i}(fg - gf)(l_1), l_2\right) \\ &= \left(l_1, \frac{-1}{i}(gf - fg)(l_2)\right) \\ &= \left(l_1, \frac{1}{i}[f, g](l_2)\right). \end{aligned}$$

Ahora si tenemos un observable  $f$  y  $\widehat{f}_\psi$  es el valor promedio de  $f$  en el estado  $\psi$ . Entonces la varianza o dispersión de  $f$  es la desviación de mínimos cuadrados de los valores de  $f$  y de sus valores promedio, esto es,

$$\Delta \widehat{f}_\psi^2 = \left((f - \widehat{f}_\psi), (f - \widehat{f}_\psi)\right)$$

y la desviación estandar está dada por:

$$\Delta \widehat{f}_\psi = \sqrt{\left((f - \widehat{f}_\psi), (f - \widehat{f}_\psi)\right)}.$$

De acuerdo a estas definiciones tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 3.4.1.** *Para cualesquiera operadores auto-adjuntos  $f, g$  en un espacio unitario se cumple [5]*

$$\Delta \widehat{f}_\psi \cdot \Delta \widehat{g}_\psi \geq \frac{1}{2} |([f, g]\psi, \psi)|$$

*Demostración.* Usando la propiedad

$$[f - \widehat{f}_\psi, g - \widehat{g}_\psi] = [f, g]$$

de los operadores auto-adjuntos  $f, g$  y aplicando Proposición 2.2.2, encontramos que si,  $f_1 = f - \widehat{f}_\psi$  y  $g_1 = g - \widehat{g}_\psi$ , entonces,

$$\begin{aligned} |([f, g]\psi, \psi)| &= |((f_1g_1 - g_1f_1)\psi, \psi)| \\ &= |(g_1\psi, f_1\psi) - (f_1\psi, g_1\psi)| \\ &= |(g_1\psi, f_1\psi) - \overline{(f_1\psi, g_1\psi)}^t| \\ &= |(g_1\psi, f_1\psi) - \overline{(g_1\psi, f_1\psi)}| \\ &= |2Im(g_1\psi, f_1\psi)| \\ &\leq 2|(g_1\psi, f_1\psi)| \\ &\leq 2\sqrt{(f_1\psi, f_1\psi)}\sqrt{(g_1\psi, g_1\psi)} \\ &= 2\Delta \widehat{f}_\psi \Delta \widehat{g}_\psi \end{aligned}$$

■

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
**3.4. MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

La aplicación de la desigualdad de Heisenberg [2] al caso de pares de observables conjugados canónicos, la cual satisface la relación  $[f, g] = Id$ , juega un papel especial. Para esto se tiene que

$$\Delta \widehat{f}_\psi \cdot \Delta \widehat{g}_\psi \geq \frac{1}{2} |([f, g]\psi, \psi)| = \frac{1}{2} |(\psi, \psi)| = \frac{1}{2}$$

sin importar el estado  $\psi$ .

Notemos que en espacios de dimensión finita no hay pares de conjugados canónicos, pues  $Tr[f, g] = Tr(fg - gf) = 0$  y  $TrId = dim\mathcal{H}$  (donde  $Tr$  indica la traza).

### 3.4.2. Operadores auto-adjuntos en la Mecánica Cuántica

Sea  $\mathcal{H}$  el espacio de estados unitario de un sistema cuántico. En física, los estados están caracterizados por determinar valores de algunas variables físicas, tales como energía, Spin, coordenadas, momento, etc. Asumimos que cada variable toma como punto de referencia al cero y los posibles valores son números reales.

El tercer postulado de la Mecánica Cuántica consiste en lo siguiente:

**Postulado 3.4.3.** *Cualquier variable física, cuyo valor puede tomarse sobre los estados del sistema con espacio de estados  $\mathcal{H}$ , puede ser asociado con un operador auto-adjunto,  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  con las siguientes propiedades: [5]*

- a) *El espectro de  $f$  es un conjunto completo de valores de la variable, la cual puede ser determinada mediante esta cantidad en diferentes estados del sistema.*
- b) *Si  $\psi \in \mathcal{H}$  es el eigenvector del operador  $f$  con eigenvalor  $\lambda$ , entonces midiendo esta cantidad en el estado  $\psi$ , el valor  $\lambda$  será obtenido con certeza.*
- c) *Más general, por medir la cantidad  $f$  en un estado  $\psi$ ,  $|\psi|^2 = 1$ , determinaremos el valor  $\lambda$  del espectro de  $f$  con una probabilidad igual al cuadrado de la norma de la proyección ortogonal de  $\psi$  sobre el subespacio característico  $\mathcal{H}(\lambda)$  correspondiente a  $\lambda$ .*

Entonces como  $\mathcal{H}$  puede descomponerse en una suma ortogonal directa  $\bigoplus_i^m \mathcal{H}(\lambda_i)$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$ , podemos expandir  $\psi$  como suma de sus respectivas proyecciones  $\psi_i \in \mathcal{H}(\lambda_i), i = 1, \dots, m$ . El teorema de Pitágoras (2.1.2)

$$1 = |\psi|^2 = \sum_{i=1}^m |\psi_i|^2$$

es interpretado como una afirmación del hecho que se llevó acabo una medición de  $f$  sobre cualquier estado  $\psi$ , y obtenemos con probabilidad 1 uno de los posibles valores de  $f$ .

Las variables físicas mencionadas y sus correspondientes operadores son llamados observables. El postulado acerca de observables es algunas veces interpretado más ampliamente y asume que a cualquier operador auto-adjunto le corresponde algún observable físico.

En espacios  $\mathcal{H}$  de dimensión infinita estos postulados se modifican un poco. En particular, en

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
**3.4. MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LOS POSTULADOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA**

lugar de  $b$ ) y  $c$ ) se estudian las probabilidades de que al medir  $f$  en el estado  $\psi$  los valores caigan dentro algún intervalo  $(a, b) \in \mathbb{R}$ . Con este intervalo uno puede asociar un subespacio  $\mathcal{H}_{(a,b)} \subset \mathcal{H}$  (la imagen del proyector ortogonal  $P_{a,b}$  sobre  $\bigoplus_{\lambda_i \in (a,b)} \mathcal{H}(\lambda_i)$  en el caso de dimensión finita) y la probabilidad sería igual a

$$|P_{(a,b)}\psi|^2 = (\psi, P_{(a,b)}\psi)$$

En el caso de dimensión infinita puede suceder que el operador de observables esté definido sólo sobre algunos subespacios  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ .

### 3.4.3. Energía observable y la evolución temporal del sistema

La descripción de cualquier sistema cuántico, junto con su estado espacial  $\mathcal{H}$ , incluye la especificación del observable fundamental  $H : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , el cual es llamado la *energía del observable* o el *Operador Hamiltoniano*.

Ahora que hemos definido el operador Hamiltoniano, el último postulado básico de mecánica cuántica se fórmula en términos de este operador y lo enunciamos de la siguiente manera:

**Postulado 3.4.4.** *Si al tiempo cero el sistema está en el estado  $\psi$  y el sistema evoluciona sobre un intervalo de tiempo  $t$  como un sistema aislado, en particular, si no medimos durante este periodo, entonces al tiempo  $t$  estaremos en un estado  $\exp(-iHt)(\psi)$ , donde*

$$\exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{iH}{\hbar}\right)^n t^n}{n!} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad [5]$$

**Teorema 3.4.1.** *El operador  $\exp(-\frac{iHt}{\hbar})$  es unitario.*

*Demostración.* Primero notemos que la condición para que un operador  $U$  se unitario dado en la Definición 2.4.1 es equivalente a que  $UU^* = U^*U = I$ . Entonces de acuerdo a esto se tiene,

$$U(t)U(t)^* = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right) \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) = U(t)^*U(t) = I$$

■

Entonces la evolución de un sistema aislado está completamente determinado por el grupo uniparamétrico de operadores unitarios  $\{U(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

La unidad física (*energía*) $\times$ (*tiempo*) es denominada la *acción*. Muchos experimentos permiten determinar la unidad universal de acción, más conocida como la *constante de Planck's*,  $\hbar = 1,055 \times 10^{-34} \text{ erg}\cdot\text{sec.}$

También se tiene que como el operador  $\exp(-\frac{iHt}{\hbar})$  es lineal, este transforma rayos de  $\mathcal{H}$  en rayos de  $\mathcal{H}$  y en efecto actúa sobre el sistema de estados, y no simplemente sobre el vector  $\psi$ . Por otro lado, ya hemos argumentado por qué nos interesan representaciones diferenciales, la regla de evolución puede representarse de la siguiente forma

$$\frac{d}{dt}(e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\psi) = -iH(e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\psi)$$

o tomando  $\psi(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\psi$ ,

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}H\psi(t)$$

la cual es la *ecuación de Schrödinger*.

### 3.4.4. Energía espectral y estados estacionarios de un sistema

En lo siguiente se pone atención principalmente al espacio de estados  $\mathcal{H}$  de dimensión finita.

La *energía espectral* de un sistema es el espectro del Hamiltoniano  $H$ . Los *estados estacionarios* son los estados que no cambian con el tiempo. Los rayos correspondientes a estados estacionarios deben ser invariantes con respecto al operador  $e^{\frac{iHt}{\hbar}}$ , esto es, deben ser subespacios característicos unidimensionales de este operador. Pero como estos subespacios son los mismos subespacios del operador  $H$ . El eigenvalor  $E_i$  del Hamiltoniano, o el nivel de energía del sistema, corresponde al eigenvalor  $e^{itE_j} = \cos \frac{tE_j}{\hbar} + i \sin \frac{tE_j}{\hbar}$  del operador evolución, el cual varía con respecto al tiempo.

Si el operador  $H$  tiene un espectro simple, entonces el espacio  $\mathcal{H}$  tiene una base canónica ortonormal, que consiste de vectores de los estados estacionarios, los cuales están determinados con un factor de fase  $e^{i\phi}$ . Si la multiplicidad del nivel de energía  $E$  es mayor que uno, entonces este nivel y el correspondiente estado se dice que son *degenerados* y a la multiplicidad de  $E$  le llamaremos el *grado de degeneración*.

Todos los estados correspondientes al nivel más bajo, es decir, el menor de los eigenvalores de  $H$ , son llamados *estados ground* del sistema, los cuales son únicos, si el nivel más bajo es no degenerado. Este término se relaciona con la idea de que un sistema cuántico nunca puede considerarse completamente aislado del mundo externo. Bajo ciertas condiciones es más probable que la energía se pierda a ser absorbida, y el sistema tienda a caer en el estado más bajo. Por lo tanto, los estados del estado ground son denominados *estados excitadores*. [5]

## 3.5. Oscilador armónico

A continuación se considerará el problema más importante de la mecánica cuántica, el oscilador armónico. Esta importancia se debe a su simplicidad ya que es uno de los pocos ejemplos que se pueden resolver explícitamente. Primeramente analizaremos el oscilador armónico desde el punto de vista clásico y posteriormente estudiaremos el oscilador armónico cuántico esto con el fin de ver la discrepancia que existen entre los resultados que arrojan estos enfoques.

### 3.5.1. Oscilador armónico clásico

Consideremos una partícula de masa  $m$  moviéndose a lo largo del eje  $X$ , ligada a un resorte. La fuerza total sobre dicha partícula está dada por la ley de Hook,  $F = -kx$  y por la segunda



**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
**3.5. OSCILADOR ARMÓNICO**

---

ley de Newton  $F = ma$ , esto es, [1]

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -kx$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (3.5.1)$$

Definimos la velocidad angular,  $\omega$ , tal que  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Esta se relaciona con la frecuencia  $\nu$  mediante la relación  $\omega = 2\pi\nu$  o  $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ .

La ecuación (3.5.1) se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (3.5.2)$$

y resolviendo por el método de coeficientes indeterminados proponemos  $x = e^{\lambda t}$ . Sustituyendo en la ecuación (3.5.2) tenemos

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 e^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda^2 + \omega^2) e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

entonces,  $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ ;  $\lambda = \pm i\omega$ , por lo tanto la solución está dada por

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}. \quad (3.5.3)$$

La velocidad  $V$  se obtiene derivando (3.5.3) respecto a  $t$

$$V = i\omega[Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t}]. \quad (3.5.4)$$

Las constantes  $A$  y  $B$  se determinan especificando la posición  $x$  y la velocidad en algún instante  $t_0$ . Para obtener una solución simple, supongamos que para  $t = t_0$ ,  $x = x_0$  y  $V = 0$ , las ecuaciones (3.5.3) y (3.5.4), serán,

$$\begin{aligned} x_0 &= Ae^{i\omega t_0} + Be^{-i\omega t_0} \\ 0 &= Ae^{i\omega t_0} - Be^{-i\omega t_0} \end{aligned}$$

resolviendo para  $A$  y  $B$ , obtenemos

$$A = \frac{1}{2}x_0 e^{-i\omega t_0} \quad y \quad B = \frac{1}{2}x_0 e^{i\omega t_0}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (3.5.3), resulta

$$x = \frac{1}{2}x_0 [e^{i\omega(t-t_0)} + e^{-i\omega(t-t_0)}].$$

Ahora como  $\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$  y  $\sin(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ , tenemos

$$x = x_0 \cos(\omega(t - t_0)) \quad (3.5.5)$$

$$V = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega(t - t_0)). \quad (3.5.6)$$

La ecuación (3.5.5) muestra que la partícula se mueve con movimiento sinusoidal entre  $-x_0$  y  $x_0$ . La ecuación (3.5.6) muestra que la velocidad varía entre  $-\omega x_0$  y  $\omega x_0$ .

La energía total es,

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Usando las ecuaciones (3.5.5) y (3.5.6)

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega(t - t_0)) + \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega(t - t_0))$$

y como  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , la ecuación se reduce a

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2. \quad (3.5.7)$$

Obsérvese que la energía total del oscilador clásico depende sólo de la constante de fuerza  $k$  y del desplazamiento máximo  $x_0$  que es una cantidad arbitraria.

Ahora con respecto al momento lineal,  $P = mV$ , podemos expresar la energía total en cualquier instante en la forma

$$E = \frac{P^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (3.5.8)$$

La energía total,  $E$ , es una constante para todo el movimiento.

Cuando la partícula alcanza los valores extremos,  $\pm x_0$ , el momento lineal,  $P = 0$ . Cuando  $x = 0$ , el momento lineal toma su valor máximo, es decir, la partícula se mueve muy despacio en los extremos del desplazamiento y muy rápido en las cercanías de  $x = 0$ .

### 3.5.2. Oscilador armónico cuántico

En esta sección estudiamos el oscilador armónico cuántico, para el cual su Hamiltoniano es muy parecido al oscilador armónico clásico que ya se vio como surge y cuales son sus niveles de energía, que posteriormente nos servirán para ver la discrepancia que existe entre la formulación clásica y la cuántica.

A continuación determinaremos los estados estacionarios del oscilador armónico cuántico. La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo está dada por:

$$H\psi = E\psi$$

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**  
**3.5. OSCILADOR ARMÓNICO**

---

donde  $H$  es el Hamiltoniano [7].

$$H = \frac{P^2}{2m} + V = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

y  $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$  es el operador momento lineal. De aquí que,

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\psi = E\psi$$

$$\left[ \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{m\omega^2x^2}{2} + E \right] \psi(x) = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{m^2\omega^2x^2}{\hbar^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E \right] \psi(x) = 0 \quad (3.5.9)$$

e introducimos las siguientes ecuaciones

$$\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}. \quad (3.5.10)$$

Con esto la ecuación (3.5.9) se transforma en

$$\left( \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{m\omega}{\hbar}\xi^2 + \frac{m\omega}{\hbar}\varepsilon \right) \psi(\xi) = 0$$

$$\frac{m\omega}{\hbar} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \varepsilon \right) \psi(\xi) = 0.$$

Para finalmente obtener la siguiente ecuación de segundo orden

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + \varepsilon \right) \psi(\xi) = 0. \quad (3.5.11)$$

Ahora para hallar la solución de la ecuación (3.5.11) estudiamos el comportamiento de la función  $\psi(\xi)$  para valores de  $\xi$  suficientemente grandes de tal manera que  $\xi^2 \gg \varepsilon$  ( $1 \gg \frac{\varepsilon}{\xi^2}$ ), de donde (3.5.11) se reduce a:

$$\left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right) \psi(\xi) = 0 \quad \text{si } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (3.5.12)$$

Primero consideremos el operador  $N$  definido como

$$N = \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2$$

y el operador auxiliar

$$M = \frac{d}{d\xi} - \xi.$$

**Observación 3.5.1.** *Los operadores  $N$  y  $M$  satisfacen la relación  $[N, M] = -2M$ .*

*Demostración.* Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}
 [N, M]\psi &= (NM - MN)\psi \\
 &= \left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi\right)\left(\frac{d\psi}{d\xi} - \xi\psi\right) - \left(\frac{d\psi}{d\xi} - \xi\psi\right)\left(\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi\right) \\
 &= \frac{d^3\psi}{d\xi^3} - \xi^2\frac{d\psi}{d\xi} - \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi\psi) + \xi^3\psi - \frac{d^3\psi}{d\xi^3} + \xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi}(\xi^2\psi) - \xi^3\psi \\
 &= -\xi^2\frac{d\psi}{d\xi} - \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi\psi) + \xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi}(\xi^2\psi)
 \end{aligned}$$

Analizando por separado estos términos tenemos las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi\psi) &= \frac{d}{d\xi}\left[\psi + \xi\frac{d\psi}{d\xi}\right] \\
 &= \frac{d\psi}{d\xi} + \frac{d\psi}{d\xi} + \xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \\
 &= \left[2\frac{d}{d\xi} + \xi\frac{d^2}{d\xi^2}\right]\psi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi}(\xi^2\psi) &= 2\xi\psi + \xi^2\frac{d\psi}{d\xi} \\
 &= \left[2\xi + \xi^2\frac{d}{d\xi}\right]\psi
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 [N, M]\psi &= -\xi^2\frac{d\psi}{d\xi} - \frac{d^2}{d\xi^2}(\xi\psi) + \xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi}(\xi^2\psi) \\
 &= -\xi^2\frac{d\psi}{d\xi} - \left[2\frac{d\psi}{d\xi} + \xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2}\right] + \xi\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left[2\xi\psi + \xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\right] \\
 &= -2\frac{d\psi}{d\xi} + 2\xi\psi \\
 &= -2\left[\frac{d}{d\xi} - \xi\right]\psi \\
 &= -2M\psi
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. ■

**Observación 3.5.2.** *Si  $f$  es una eigenfunción del operador  $N$  con eigenvalor  $\lambda$ , entonces  $Mf$  es eigenfunción del operador  $N$  con eigenvalor  $(\lambda - 2)$ .*

## CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA

### 3.5. OSCILADOR ARMÓNICO

*Demostración.* Por la Observación 3.5.1, se tiene,

$$NMf = [N, M]f + MNf = -2Mf + \lambda Mf = (\lambda - 2)Mf$$

que es lo que se quería probar. ■

Por otro lado busquemos una eigenfunción del operador  $N$  de tal manera que se satisfaga la relación (3.5.12), es decir queremos encontrar  $f(\xi)$  que satisfice:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}f(\xi) - \xi^2 f(\xi) = \lambda f(\xi) \quad (3.5.13)$$

y

$$\frac{d^2}{d\xi^2}f(\xi) - \xi^2 f(\xi) = 0 \quad \text{cuando} \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (3.5.14)$$

Si hacemos el siguiente cambio de variable  $u = \frac{f'}{f}$ , entonces,

$$u' = \frac{f''}{f} - \frac{(f')^2}{f^2} = \frac{1}{f} \left[ f'' - \frac{(f')^2}{f} \right] \quad (3.5.15)$$

y despejando  $f''$  de (3.5.13) y sustituyendo en (3.5.15) se tiene que

$$u' = \frac{1}{f} \left[ (\lambda + \xi^2)f - \frac{(f')^2}{f} \right] = (\lambda + \xi^2) - \left[ \frac{f'}{f} \right]^2 = (\lambda + \xi^2) - u^2.$$

Entonces hemos convertido la ecuación (3.5.13) de segundo orden a la siguiente ecuación de primer orden

$$u' + u^2 = \lambda + \xi^2 \quad (3.5.16)$$

Es fácil verificar que si  $u = \xi$  entonces  $\lambda = 1$  y si  $u = -\xi$  entonces  $\lambda = -1$  son soluciones de (3.5.16). Entonces analicemos como es  $f$  en cada una de estas soluciones :

Para  $\lambda = 1$  se tiene que  $\frac{f'}{f} = \xi$ , entonces  $\log(f) = \frac{\xi^2}{2}$  y por lo tanto  $f(\xi) = e^{\frac{\xi^2}{2}}$ . Esta  $f$  satisface (3.5.13) pero no satisface la condición (3.5.14).

Ahora si  $\lambda = -1$  obtenemos que  $\frac{f'}{f} = -\xi$ , entonces  $\log(f) = -\frac{\xi^2}{2}$  y por lo tanto  $f(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ . Además esta  $f$  satisface (3.5.13) y (3.5.14).

Por lo tanto la eigenfunción del operador  $N$  que buscamos es  $f(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  con eigenvalor  $\lambda = -1$ .

Ahora como  $N\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = -e^{-\frac{\xi^2}{2}} \left(f(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \lambda = -1\right)$ , podemos aplicar la Observación 3.5.2, esto es,

$$NM\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = (-1 - 2)Me^{-\frac{\xi^2}{2}} = -3Me^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$NM^2(e^{-\frac{\xi^2}{2}}) = (-3 - 2)M^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = -5M^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$NM^3(e^{-\frac{\xi^2}{2}}) = (-5 - 2)M^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}} = -7M^3 e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

En general

$$NM^n(e^{-\frac{\xi^2}{2}}) = -(2n + 1)M^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

es decir,  $M^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  es una eigenfunción del operador  $N$  con eigenvalor  $-(2n + 1)$  para todo  $n \geq 0$ .

**Observación 3.5.3.** *El operador  $M$  satisface la siguiente propiedad*

$$M^n(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n}(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) \quad \text{para } n \geq 1$$

*Demostración.* Probemos por inducción sobre  $n$ .

Para  $n = 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} e^{\frac{\xi^2}{2}} M(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) &= e^{\frac{\xi^2}{2}} \left( \frac{d}{d\xi} - \xi \right) (e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) \\ &= e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d}{d\xi} (e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) - \xi f(\xi) \end{aligned}$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned} e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi (e^{-\xi^2} f(\xi)) &= e^{\xi^2} \frac{d}{d\xi} (e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) \\ &= e^{\xi^2} \left[ -\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} (e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) + e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{d}{d\xi} (e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) \right] \\ &= -\xi f(\xi) + e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d}{d\xi} (e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) \end{aligned}$$

igualando estas equivalencias se obtiene,

$$M(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) = e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d}{d\xi} (e^{-\xi^2} f(\xi)).$$

Supongamos valido el resultado para  $n - 1$  y probemos para  $n$ . En efecto,

$$\begin{aligned} M^n(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi)) &= M(M^{n-1}(e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi))) \\ &= \left( \frac{d}{d\xi} - \xi \right) \left( e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2} f(\xi)) \right) \\ &= \xi e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2} f(\xi)) + e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2} f(\xi)) - \xi e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (e^{-\xi^2} f(\xi)) \\ &= e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2} f(\xi)) \end{aligned}$$

que es lo que se quería probar. ■

**CAPÍTULO 3. CONCEPTOS BÁSICOS DE MECÁNICA CUÁNTICA**

**3.5. OSCILADOR ARMÓNICO**

Por otro lado para simplificar consideremos [5]

$$\psi(\xi) = (-1)^n M^n \left( e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right) = (-1)^n e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} \left( e^{-\xi^2} \right) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$$

entonces,

$$N(\psi(\xi)) = (-1)^n N(M^n(e^{-\frac{\xi^2}{2}})) = (-1)^n (-1)(2n+1)M^n(e^{-\frac{\xi^2}{2}}) = -(2n+1)(-1)^n M^n(e^{-\frac{\xi^2}{2}})$$

o equivalentemente,

$$N(\psi(\xi)) = -(2n+1)\psi(\xi) \tag{3.5.17}$$

es decir,  $\psi(\xi)$  es la eigenfunción del operador  $N = \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2$  con eigenvalor  $-(2n+1)$ .

Entonces las funciones de onda de los sistemas estacionarios del oscilador armónico son de la forma:

$$\psi_n(\xi) = N_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$$

donde  $N_n$  está determinada por la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

ya que se requiere que la posición de la partícula esté en el espacio [3]. Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = N_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) d\xi = 1$$

pero por la ecuación (1.12.1) se tiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n(\xi) d\xi = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad \text{donde} \quad \xi = x \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

de donde,  $N_n = [2^n n! \sqrt{\pi}]^{-\frac{1}{2}}$ .

Por último de las ecuaciones (3.5.11) y (3.5.17) se tiene que,

$$N\psi(\xi) = -\varepsilon\psi(\xi) \quad \text{y} \quad N\psi(\xi) = -(2n+1)\psi(\xi)$$

de aquí,  $\varepsilon = 2n+1$  y por la ecuación (3.5.10) se tiene que  $\varepsilon = \frac{2E}{\omega\hbar}$  [1].

Por lo tanto, los niveles de energía  $E_n$  para el oscilador armónico cuántico son:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

y sus estados estacionarios son

$$\psi_n(x) = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-\alpha x^2} H_n(x\sqrt{\alpha}) \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}.$$

Obteniendo así que los niveles de energía para el oscilador armónico cuántico son discretos mientras que para el clásico la energía es constante [3].





# Conclusiones

En general, el desarrollo de la matemática se ha dado por la necesidad de resolver problemas tanto prácticos como teóricos, referentes a otras ciencias o a la misma matemática, dándoles solución, exacta o aproximada, creando nuevas teorías y planteándose nuevos problemas.

Muchas veces al tratar de llevar un fenómeno real a una representación matemática, se presentan diversas dificultades, una de ellas es que la información recabada depende de los instrumentos de medición y la propia medición nos puede llevar a tener imprecisiones inevitables. Esto es lo que nos plantea Heisenberg en uno de los principios básicos de la Mecánica Cuántica (Principio de incertidumbre de Heisenberg).

En la actualidad la Matemática se ha desarrollado significativamente, contribuyendo a la evolución de otras ciencias, las cuales usan objetos matemáticos, propiedades y caracterizaciones para formular sus teorías, tal es el caso de la Mecánica Cuántica. Uno de los conceptos que se estudiaron en este trabajo, es el producto interior, que matemáticamente es muy importante porque permite introducir conceptos geométricos en los espacios vectoriales, tales como ángulo, ortogonalidad, ortonormalidad, métricas, isometrías, etc. y es también la base para hablar de operadores auto-adjuntos. Los observables de un sistema cuántico, que no son más que propiedades de variables dinámicas del fenómeno, son representados por operadores auto-adjuntos que actúan sobre algún espacio de estados y tanto los principios como los postulados se han planteado en términos de ellos, poniendo en manifiesto la relación y utilidad de dichos operadores.

Por último en este trabajo también se muestra uno de los ejemplos más importantes de la Mecánica Cuántica, el oscilador armónico cuántico, para el cual mostramos el operador auto-adjunto asociado con sus correspondientes niveles de energía, mostrando así la incapacidad de la mecánica clásica de modelar sistemas a niveles atómicos.



# Bibliografía

- [1] G.W. Castellan. *Físicoquímica*. Addison-Wesley, second edition, 1987.
- [2] A.S. Davydov. *Quantum Mechanics*. Pergamon Press, Moscow, 1976.
- [3] Greiner. *Quantum Mechanics*. Springer, Germany, fourth edition, 2001.
- [4] Ray Kunze Kenneth Hoffman. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, USA, second edition, 1971.
- [5] A.I. Kostrikin and Yu. Manin. *Linear Algebra and Geometry*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, first edition, 1989.
- [6] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, 1989.
- [7] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, USA, 1994.
- [8] David S. Saxon. *Elementary Quantum Mechanics*. Holden-Day, Inc., USA, 1968.
- [9] Gilbert Strang. *Linear Algebra and it's Applications*. Thomson Learning, USA, 1988.