

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA**

**“Excursiones en la Topología Algebraica y algunas aplicaciones”**

**T E S I S**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS**

**PRESENTA:  
ISABEL FRANCO JIMÉNEZ**

**DIRECTOR DE TESIS:  
JOSÉ L. CARRASCO PACHECO**

*HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA., AGOSTO DE 2009*



# Agradecimientos

Agradezco a mi asesor de tesis José Luís Carrasco Pacheco por su comprensión, tiempo, paciencia y apoyo.

A mis sinodales: Adolfo Maceda Méndez, Jesús Fernando Tenorio Arvide y Vulfrano Tochiuitl Bueno, por las observaciones que hicieron de este un mejor trabajo y por el tiempo que invirtieron en la revisión de esta tesis.

Gracias a todos los maestros que tuve en el transcurso de la carrera, pues sin ellos esto no hubiera sido posible, en especial a la maestra Norma Edith Alamilla López.

También le agradezco a mi amiga Erandy por estar conmigo en las buenas y en las malas.

Por último y no menos importante le doy gracias a José, que durante la mayor parte del tiempo que invertí en esta tesis estuvo conmigo apoyándome y dándome aliento para no desistir.

# Dedicatoria

*A mis padres, Isabel y Augusto:*

Por su infinita paciencia, amor y el apoyo incondicional que me han brindado, principalmente en aquellos momentos tan difíciles de mi vida, los amo.

*A mi hijo, Augusto:*

Por que siempre ha estado en mis pensamientos desde que me enteré que venía a este mundo y que ha sido la personita que alegra mis días y que más sentimientos ha despertado en mí.

# Introducción

En topología, determinar si algún espacio topológico se puede deformar mediante una aplicación continua en otro, no es una tarea sencilla, es a partir de este problema que surge lo que en la actualidad conocemos como Topología Algebraica.

Las teorías de homotopía y homología singular de espacios topológicos, son parte de la topología algebraica, que entre otras cosas sirven algunas veces para solucionar el problema en cuestión, ya que trasladan un problema topológico a uno algebraico.

La metodología que siguen estas teorías para determinar si dos espacios topológicos no son homeomorfos es la siguiente: dado un espacio topológico  $X$  se le asigna un grupo  $\pi(X)$ , de modo tal, que si  $Y$  es otro espacio topológico homeomorfo a  $X$ , entonces  $\pi(Y)$  es isomorfo a  $\pi(X)$ . A  $\pi$  se le denomina invariante topológico. Ahora bien, si  $\pi(Y)$  no es isomorfo a  $\pi(X)$ , entonces  $X$  no puede ser homeomorfo a  $Y$  y el problema en este caso está resuelto. De aquí que uno de nuestros objetivos es encontrar estos invariantes topológicos. El primer paso que debemos de seguir para encontrar estos invariantes topológicos es establecer una conexión,  $\pi$ , llamada funtor entre la clase de todos los espacios topológicos y la clase de todos los grupos, de tal forma que si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua de espacios topológicos, entonces  $\pi(f) : \pi(X) \rightarrow \pi(Y)$  es un morfismo de grupos.

En la actualidad, la Topología Algebraica no sólo sirve para atacar el problema que se planteó anteriormente, sino que se ha convertido en una herramienta poderosa en la matemática, tanto pura como aplicada.

Por ejemplo, en el campo de la matemática aplicada, la teoría de homotopía y de homología singular tienen aplicaciones en: física (vea [3], pág. 19), química (vea [5], pág. 2) y robótica (vea [20], pág. 95), por mencionar algunas.

A lo largo de la tesis, vamos a ver que a partir de resultados de la topología algebraica, se da pie a nuevas estructuras algebraicas, como sucede en el caso de los complejos de cadena. Pues si bien con este hecho la topología algebraica se justifica, lo cierto es que va mas allá de tal resultado. He aquí la importancia de explorar la homotopía y la homología singular en este trabajo, en conjunto con

---

algunas aplicaciones que del estudio de estas se desprendan.

Es sabido que 1896, Poincaré con el artículo “Analysis Situs” (vea [23], pág. 83) introdujo los grupos de homología, además de que ya contaba con conocimientos del grupo fundamental o también conocido como el primer grupo de homotopía. En 1945, Eilenberg y Steenrod desarrollaron un enfoque axiomático de la teoría de homología. Un desarrollo paralelo tenía lugar en la teoría de homotopía, y es así como en 1935, Hurewicz define los grupos de homotopía de orden superior, A partir de aquí las propiedades de los grupos de homotopía de orden superior comenzaron a ser investigadas.

En la actualidad, uno de los problemas más importantes y que aún continúa abierto, es el cálculo de los grupos de homotopía de la  $n$ -esfera,  $\mathbb{S}^n$ .

El contenido del trabajo es el siguiente. En el Capítulo 1, se presentan conceptos básicos de teoría de categorías y funtores, pues nos ayudan a construir y definir los invariantes topológicos en la teoría de homotopía y homología singular. Posteriormente definimos lo indispensable de grupos libres, productos libres y espacios conectables por trayectorias.

En el Capítulo 2 se estudia la homotopía entre dos funciones continuas, que básicamente describe cómo una función se puede deformar en otra de manera continua. Algunos de los resultados que se presentan en este capítulo, estudian la relación entre los espacios conectables por trayectorias y la homotopía. De hecho, los espacios conectables por trayectorias inducen un funtor que relaciona la categoría de los espacios topológicos con la categoría de los conjuntos. La definición de este funtor se basa en tomar un espacio topológico  $X$  y asociarle el conjunto de las componentes por trayectorias de  $X$ . Lo interesante de este funtor es que resulta ser un invariante topológico. En este capítulo también se da la definición de homotopía relativa y con ello construimos el grupo fundamental de un espacio topológico. Luego se establecen algunos resultados de este grupo, uno de los más interesantes es el que asegura que, el funtor que toma un espacio topológico  $X$  y le asocia el grupo fundamental de  $X$  es un invariante topológico. Otro resultado importante que se menciona en este capítulo es el teorema de Seifert y Van Kampen que nos permite determinar el grupo fundamental de una unión de subespacios abiertos a partir de los grupos fundamentales de estos. Por último se estudian los grupos de homotopía de dimensiones superiores, para los cuales se hace una breve introducción a  $H$ -espacios y  $H$ -coespacios. Es importante observar que estos grupos se expresan de manera recursiva sobre grupos de homotopía de una dimensión menos. Cabe mencionar una de las ventajas de la teoría de homotopía es que es relativamente sencillo de interpretar geoméricamente. Sin embargo, no existe un algoritmo para determinar los grupos de homotopía de un espacio topológico, es

---

de aquí que nos vemos en la necesidad de introducir otro invariante topológico, para el cual el grupo asociado no sea tan difícil calcular.

El contenido del Capítulo 3 inicia con la definición de  $n$ -simplejo singular. De ahí partimos para definir los grupos abelianos libres generados  $S_n(X)$ , donde  $X$  es un espacio topológico y  $n \geq 0$ . Estos grupos son de gran importancia, pues de ellos surge la definición de los grupos de homología singular,  $H_n(X)$  los cuales siempre son abelianos a diferencia de los de grupos de homotopía. Después de definir los grupos de homología singular, demostramos que el funtor  $H_n$ , que toma un espacio topológico y le asocia su grupo de homología singular es un invariante topológico.

En este capítulo también se define la categoría **Comp**, donde vamos a ver una definición de homología puramente algebraica. El objetivo es desarrollar resultados para **Comp** que después se trasladan a los grupos de homología singular. Continuamos nuestro estudio con las sucesiones exactas, las cuales son de gran utilidad para cálculos de grupos de homología singular. Cabe mencionar que la mayoría de los resultados que se enuncian en esta parte, son necesarios para la prueba del teorema de Mayer-Vietoris y las aplicaciones de la homología singular.

Otros conceptos que también se tratan son el de homología reducida y los grupos de homología relativa. Por último se introducen los axiomas de escisión y el teorema de Mayer-Vietoris, que tiene la misma importancia para homología singular, como la tiene el teorema de Seifert-Van Kampen para homotopía, pues establece una relación entre la homología singular de un espacio topológico y la homología singular de sus subespacios, de tal forma que si la unión abierta de estos subespacios es todo el espacio topológico y la intersección es no vacía, entonces es fácil determinar la homología de algunos espacios en términos de la homología singular de sus subespacios.

Por último, en el Capítulo 4 se presentan algunas aplicaciones de las teorías de homotopía y homología singular. Entre las aplicaciones más importantes destacan, cálculos de grupos fundamentales, cálculos de grupos de homología singular, pruebas de teoremas como el Teorema Fundamental del Álgebra, Teorema de la Bola Peluda, Teorema de Borsuk-Ulam, Teorema de Lusternik-Schnirelmann, Teorema del Punto Fijo de Brouwer, Teorema de Separación de Jordan-Brouwer y Teorema de Invarianza del Dominio.





# Índice general

Agradecimientos	II
Dedicatoria	IV
Introducción	V
<b>1. Conceptos preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Categorías . . . . .	2
1.2. Grupos libres . . . . .	8
1.3. Producto libre de Grupos . . . . .	10
1.4. Conceptos básicos de espacios conectables por trayectorias . . . . .	13
<b>2. Introducción a la homotopía de espacios topológicos</b>	<b>16</b>
2.1. Homotopía . . . . .	16
2.2. El funtor $\pi_0$ . . . . .	24
2.3. El Grupo Fundamental . . . . .	25
2.3.1. Cálculo de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ . . . . .	40
2.4. Teorema de Seifert y Van Kampen . . . . .	46
2.5. Homotopía de dimensiones superiores . . . . .	55
2.5.1. Espacio de lazos . . . . .	56
2.5.2. $H$ -espacio . . . . .	58
2.5.3. $H$ -Coespacio . . . . .	65

---

<b>3. Grupos de Homología Singular</b>	<b>76</b>
3.1. Complejos singulares y el funtor de homología singular . . . . .	76
3.2. La categoría <b>Comp</b> . . . . .	97
3.2.1. Homología relativa . . . . .	106
3.2.2. Homología Reducida . . . . .	112
3.3. Escisión y el Teorema de Mayer-Vietoris . . . . .	115
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>120</b>
4.1. Cálculo del grupo fundamental de algunos espacios topológicos . .	121
4.2. Aplicaciones del Teorema de Seifert y Van Kampen . . . . .	122
4.3. Aplicaciones de los grupos de Homotopía de dimensiones superiores	129
4.4. Homología de la esfera y algunas aplicaciones . . . . .	130
4.5. Aplicaciones sobre los espacios Euclidianos . . . . .	135
<b>Conclusiones</b>	<b>155</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>158</b>

# Capítulo 1

## Conceptos preliminares

Los preliminares en esta tesis nos dan una base teórica necesaria, para la herramienta poderosa que utilizamos como es la Homotopía y la Homología Singular. Sobre categorías y funtores que trataremos aquí, sólo mencionamos los aspectos que surgen de manera natural dentro del desarrollo de la tesis, al cual le damos sustento categórico, y a la inversa, también usamos aspectos categóricos para dar sustento a lo que se desarrolla.

La Homotopía y la Homología Singular surgen de caminos distintos: la primera se desarrolla a partir de una estructura algebraica intrínseca (grupo) del espacio, la segunda surge de una estructura algebraica que se le dota al espacio como es la de grupo libre para la cual utilizamos algunos resultados de la teoría de grupos libres que se ve en este capítulo.

Por supuesto también utilizamos resultados topológicos ya conocidos y que mencionamos en estos preliminares.

### 1.1. Categorías

En esta sección, uno de nuestros principales objetivos es presentar algunas nociones básicas de la teoría de categorías, así como exponer las propiedades categóricas del producto y coproducto. También hacemos énfasis en algunos ejemplos de categorías que no están escogidos al azar sino todo lo contrario, ya que a lo largo del desarrollo de la tesis tales ejemplos se utilizan con regularidad.

**Definición 1.1** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consiste de una clase de objetos  $\text{Obj } \mathcal{C}$ , un conjunto de morfismos u homomorfismos  $\text{Hom}(A, B)$  para cada par  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$  y una composición  $\circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$  tal que  $(f, g) \longmapsto g \circ f$ .

Para cada par  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$  se satisfacen los siguientes axiomas.

- i) La familia de  $\text{Hom}(A, B)$  son disjuntos a pares.
- ii) La composición es asociativa siempre y cuando se defina.
- iii) Para cada objeto  $A \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , existe una identidad  $1_A \in \text{Hom}(A, A)$  que satisface  $1_A \circ f = f$ , para cada  $f \in \text{Hom}(B, A)$  y todo  $B \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , y además  $g \circ 1_A = g$ , para cada  $g \in \text{Hom}(A, C)$  y todo  $C \in \text{Obj } \mathcal{C}$ .

La asociatividad en **ii)**, dice que si  $(f \circ g) \circ h$  se define, entonces también se define  $f \circ (g \circ h)$  y además  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ . A los elementos de  $\text{Hom}(A, B)$  se les llama **morfismos** de  $A$  en  $B$  y si  $f \in \text{Hom}(A, B)$  escribimos  $f : A \rightarrow B$ , donde  $A$  es el **dominio** y  $B$  el **codominio** de  $f$ . Además la composición  $f \circ g$  está definida si y sólo si el codominio de  $f$  es igual al dominio de  $g$ . Decimos que  $A$  es **isomorfo** a  $B$  si existen  $f \in \text{Hom}(A, B)$  y  $g \in \text{Hom}(B, A)$  tales que  $f \circ g = 1_B$  y  $g \circ f = 1_A$ . Si no hay confusión a  $f \in \text{Hom}(A, B)$  se le llama función, función continua, función derivable, función analítica, morfismo de grupo, morfismo de anillos, etc., dependiendo de la categoría en que se esté trabajando.  $\mathcal{C}$  consta de  $\text{Obj } \mathcal{C}$  pero no necesariamente es un conjunto, en tal caso decimos **clase**.

Por otro lado, de la Definición 1.1**iii)** el conjunto  $\text{Hom}(A, A) \neq \emptyset$ , para toda  $A \in \mathcal{C}$ . Las categorías dependen estrictamente de los tres ingredientes, puede ser que sean los mismos objetos pero diferentes morfismos; en tal caso corresponden a categorías distintas o cualquier otra variante de estas componentes de  $\mathcal{C}$  pueden modificarla para dar otras categorías. Los siguientes ejemplos se mencionan de manera natural y reflejan un sentido más amplio (categórico) de la matemática construida.

### Ejemplo 1.1

1. La categoría **Sets** de los conjuntos donde  $\text{Obj } \mathcal{C}$  consta de la clase de todos los conjuntos,  $\text{Hom}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es función}\}$  y la composición es la composición usual de funciones.
2. La categoría **Top<sup>1</sup>** de los espacios topológicos donde  $\text{Obj } \mathcal{C}$  consta de la clase de todos los espacios topológicos,  $\text{Hom}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es función continua}\}$  y la composición es la composición usual de funciones.

3. La categoría **Top<sup>2</sup>** de los espacios topológicos de parejas con  $\text{Obj } \mathcal{C}$  consta de la clase de todas las parejas  $(X, A)$  donde  $X$  es un espacio topológico y  $A$  un subespacio de  $X$ ,  $\text{Hom}((X, A), (Y, B)) = \{f : (X, A) \rightarrow (Y, B) \mid f \text{ es una función continua de } X \text{ en } Y \text{ tal que } f(A) \subseteq B\}$  y la composición es la composición usual de funciones. Si en particular  $A = \{*\}$ , entonces tenemos  $\mathcal{C} = \mathbf{Top}^*$  (la categoría de los espacios topológicos punteados).
4. La categoría **Grup** de los grupos donde  $\text{Obj } \mathcal{C}$  consta de la clase de todos los grupos,  $\text{Hom}(A, B) = \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ es morfismo de grupos}\}$  y la composición es la composición usual. Podemos también definir de manera semejante  $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}, \mathbf{Ring}, \mathbf{Ring}_1$  y  $\mathbf{R} - \mathbf{Mod}$ , etc., la categoría de los grupos abelianos, de anillos, de anillos con identidad, y de  $R$ -módulos, respectivamente, así como otras estructuras algebraicas con sus correspondientes morfismos.

Notemos que en 1 y 2 del Ejemplo 1.1 ocurre lo siguiente:

- i) Los objetos de **Top<sup>1</sup>** son objetos de **Sets**.
- ii) Si  $\text{Hom}(A, B)$  está definido por **Sets** y  $\text{Hom}(A, B)'$  por **Top<sup>1</sup>** se tiene que  $\text{Hom}(A, B)' \subseteq \text{Hom}(A, B)$  para todo  $A, B$ .

La observación anterior nos motiva a la siguiente definición.

Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{A}$  categorías con  $\text{Obj } \mathcal{C} \subset \text{Obj } \mathcal{A}$ . Si  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , denotan los dos conjuntos de homomorfismos  $\text{Hom}$  por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  decimos que  $\mathcal{C}$  es una **subcategoría** de  $\mathcal{A}$  si  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ , para todo  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$  y si la composición en  $\mathcal{C}$  es la misma composición en  $\mathcal{A}$ , es decir, la función  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$  es la restricción de la composición correspondiente en  $\mathcal{A}$ . De la Definición 1.1, podemos construir subcategorías manteniendo fijo  $\text{Hom}(A, B)$  para cada  $A, B$  y tomando una restricción de los objetos en la categoría, o también mantener los objetos de la categoría y que cumplan la condición  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$  para todo  $A, B \in \text{Obj } \mathcal{C}$ . Ilustramos esto en los siguientes ejemplos.

### Ejemplo 1.2

1. En la categoría de **Top<sup>1</sup>** si restringimos sus objetos a espacios Euclidianos, espacios Hausdorff, etc. y los morfismos coinciden con los morfismos de **Top<sup>1</sup>**, entonces obtenemos la subcategoría de los espacios Euclidianos, espacios Hausdorff, etc. Por otro lado, si tomamos morfismos como funciones diferenciables, integrables, analíticas, etc., entonces formamos nuevas subcategorías.

2.  $\mathbf{Top}^*$  es una subcategoría de  $\mathbf{Top}^2$ .
3.  $\mathbf{Ab}$  es una subcategoría de  $\mathbf{Grup}$ .
4.  $\mathbf{Ring}_1$  es una subcategoría de  $\mathbf{Ring}$ .

Es importante ver algunos conceptos categóricos que nos permiten dar una visión más amplia sobre conceptos como producto, coproducto o propiedades universales, los cuales son indispensables, en nuestro caso, en la categoría de los espacios topológicos, de pareja o punteados, así como propiedades topológicas que se derivan de estos.

Cuando se trata de construir otros espacios topológicos se recurre de manera natural a la construcción del producto y coproducto en la categoría de los espacios topológicos, de pareja o punteados y esta construcción categórica, no sólo es útil en nuestro trabajo, sino en general en toda la matemática.

**Definición 1.2** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría y  $\{A_i \mid i \in I\}$  una familia de objetos en  $\mathcal{C}$ .

i) Un **producto** para la familia  $\{A_i \mid i \in I\}$  es un objeto  $P$  en  $\mathcal{C}$  junto con la familia de morfismos  $\{\pi_i : P \rightarrow A_i \mid i \in I\}$  tal que para un objeto  $B$  y una familia de morfismos  $\{\varphi_i : B \rightarrow A_i \mid i \in I\}$ , existe un único morfismo  $\varphi : B \rightarrow P$  tal que  $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$ .

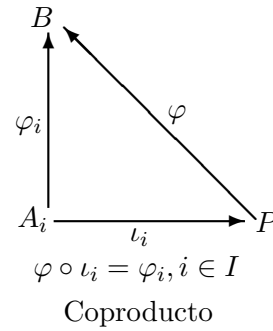
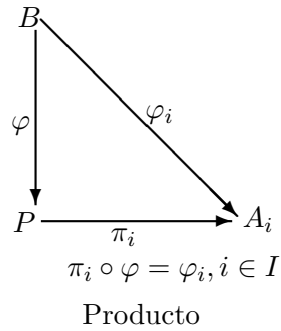
*El dual se define como,*

ii) Un **coproducto (o suma)** para la familia  $\{A_i \mid i \in I\}$  es un objeto  $P$  en  $\mathcal{C}$  junto con la familia de morfismos  $\{\iota_i : A_i \rightarrow P \mid i \in I\}$  tal que para un objeto  $B$  y una familia de morfismos  $\{\varphi_i : A_i \rightarrow B \mid i \in I\}$ , existe un único morfismo  $\varphi : P \rightarrow B$  tal que  $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$ .

Una observación interesante que podemos hacer notar es que tanto el producto como el coproducto son únicos salvo isomorfismos, de hecho esta observación no es difícil de comprobar.

Las definiciones anteriores se pueden ilustrar como diagramas, los cuales nos permiten entender de forma categórica estos conceptos como se muestra a continuación.

A Definición 1.2i) y Definición 1.2ii) se les conoce como **propiedad universal del producto** y **propiedad universal del coproducto**, respectivamente.



El producto de la familia  $\{A_i \mid i \in I\}$  se denota por  $\prod_{i \in I} A_i$  y el coproducto por

$\coprod_{i \in I} A_i$ . En particular si  $|I| = 2$ , entonces tanto el producto como el coproducto los denotamos por  $A_1 \times A_2$  y  $A_1 \coprod A_2$ , respectivamente.

Cabe mencionar que en las categorías **Sets**, **Grup**, **Top<sup>1</sup>** entre otras, la Definición 1.2 de producto y coproducto coincide con la definiciones usuales de producto cartesiano y suma directa, respectivamente.

En caso de que la categoría sea **Top<sup>1</sup>** la topología que corresponde a la definición de producto es la topología producto cartesiano (vea [10], pág. 98).

**Definición 1.3** Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{C}$  son categorías, un **funtor (covariante)**  $T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es una asociación de correspondencia que cumple:

- i) Si  $A \in \text{Obj } \mathcal{A}$ , entonces  $T(A) \in \text{Obj } \mathcal{C}$ .
- ii) Si  $f : A \rightarrow A'$  es un morfismo en  $\mathcal{A}$ , entonces  $T(f) : T(A) \rightarrow T(A')$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ .
- iii) Si  $f$  y  $g$  son dos morfismos en  $\mathcal{A}$  para el cual  $g \circ f$  está definido, entonces  $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ .
- iv)  $T(1_A) = 1_{T(A)}$ , para todo  $A \in \text{Obj } \mathcal{A}$ .

**Definición 1.4** Un **funtor contravariante** cumple i) y iv) de la Definición 1.3 y en lugar de ii) y iii) se cumple:

- ii') Si  $f : A \rightarrow A'$  es un morfismo en  $\mathcal{A}$  entonces  $T(f) : T(A') \rightarrow T(A)$  es un morfismo en  $\mathcal{C}$ .

iii') Si  $f, g$  son morfismos en  $\mathcal{A}$  para el cual  $g \circ f$  está definido, entonces  $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$ .

En nuestro caso estudiamos los funtores  $\pi_n$  y  $H_n$ , para  $n \geq 0$ . Estos funtores son el  $n$ -ésimo grupo de Homotopía y el  $n$ -ésimo grupo de Homología (singular), donde  $\pi_0 : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Sets}$ ,  $\pi_n : \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grup}$  y  $H_n : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Grup}$ .

El propósito de estudiar estos funtores es que nos permiten resolver problemas topológicos pasándolos a problemas algebraicos; como veremos en los siguientes capítulos de esta tesis, sobre todo en el de las aplicaciones.

A continuación se muestran ejemplos de funtores covariantes.

**Ejemplo 1.3** Consideremos el funtor  $c.p.t.(-) : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Sets}$  ver Sección 1.4 definido por  $c.p.t.(X)$  como el conjunto de componentes por trayectorias de  $X$  y  $c.p.t.(f)(C) = [f(C)]$ , donde  $[f(C)]$  es la componente por trayectoria que contiene a  $f(C)$  para todo  $C$  en  $c.p.t.(X)$ .

#### Ejemplo 1.4

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría y  $X_0 \in \text{Obj } \mathcal{C}$ , entonces  $\text{Hom}(X_0, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$  tal que  $X \mapsto \text{Hom}(X_0, X)$ , es un funtor.

En efecto, veamos que se cumplen las propiedades de funtor.

- i) De la definición de  $\text{Hom}(X_0, X)$ , esta propiedad se cumple claramente.
- ii) Sea  $f : X \rightarrow Y$  un morfismo en  $\mathcal{C}$ , y  $g \in \text{Hom}(X_0, X)$ . Definimos  $\text{Hom}(f)(g) = f \circ g$ , el cual claramente es un morfismo en  $\mathbf{Sets}$ .
- iii) Sean  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  morfismos en  $\mathcal{C}$ , y  $h \in \text{Hom}(X_0, X)$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Hom}(g \circ f)(h) &= (g \circ f) \circ h \\ &= g \circ (f \circ h) \\ &= \text{Hom}(g) \circ (f \circ h) \\ &= \text{Hom}(g) \circ \text{Hom}(f)(h) \end{aligned}$$

- iv) Sea  $1_X : X \rightarrow X$  el morfismo identidad en  $\mathcal{C}$ , y  $h \in \text{Hom}(X_0, X)$ , entonces  $\text{Hom}(1_X)(h) = 1_X \circ h = h = 1_{\text{Hom}(X_0, X)}(h)$ .

De i) a iv) se sigue que  $\text{Hom}(X_0, -)$  es un funtor.



**Definición 1.5** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías y  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  dos funtores. Una **transformación natural  $t$  de  $F$  a  $G$** ,  $t : F \rightarrow G$  es una colección de morfismos  $t_A : F(A) \rightarrow G(A)$  en  $\mathcal{D}$ , uno para cada objeto  $A \in \text{Obj } \mathcal{C}$  tal que para cualquier morfismo  $f : A \rightarrow B$  en  $\mathcal{C}$  el siguiente diagrama conmuta, es decir,  $G(f) \circ (t_A) = t_B \circ (F(f))$ . Si esto sucede, decimos que  $t_A : F(A) \rightarrow G(A)$  es **natural**, en particular si  $t_A : F(A) \rightarrow G(A)$  es un isomorfismo para cada  $A \in \mathcal{C}$ , entonces decimos que  $t$  es una **equivalencia** y,  $F$  y  $G$  son **equivalentes en forma natural**.

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{t_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{t_B} & G(B). \end{array}$$

## 1.2. Grupos libres

En esta sección nos ocupamos de ilustrar algunas nociones de la teoría de grupos, como lo son los grupos libres. En particular los grupos abelianos libres, pues en el Capítulo 3, la homología singular se construye asociando a un espacio topológico la estructura de grupo abeliano libre.

Recordemos que un **homomorfismo** o **morfismo de grupos**, es una función  $f : G \rightarrow H$ , donde  $G$  y  $H$  son grupos, tal que  $f(ab) = f(a)f(b)$  para todo  $a, b \in G$ . Si  $f$  es sobreyectiva, entonces se llama **epimorfismo** y si  $f$  es inyectiva se dice que  $f$  es un **isomorfismo de grupos**. Diremos que  $G$  y  $H$  son isomorfos si existe un isomorfismo  $f : G \rightarrow H$  y se denota por  $G \cong H$ .

**Definición 1.6** Sean  $X$  un conjunto no vacío y  $F$  un grupo. Se dice que  $F$  es **grupo libre en  $X$**  cuando existe una función inyectiva  $i : X \rightarrow F$  tal que para toda función  $f : X \rightarrow G$ , donde  $G$  es un grupo, existe un único morfismo de grupos  $g : F \rightarrow G$  que hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & G. \end{array}$$

Para todo conjunto no vacío  $X$ , siempre existe un grupo libre  $F$  en  $X$ , que es único salvo isomorfismos, pues si  $F'$  es otro, entonces existen funciones inyectivas

$i : X \rightarrow F$ ,  $i' : X \rightarrow F'$  y morfismos únicos  $\varphi : F \rightarrow F'$  y  $\psi : F' \rightarrow F$  que hacen conmutativos los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow i' & \downarrow \varphi \\ & & F' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow i' & \downarrow \psi \\ & & F' \end{array}$$

Así,  $i' = \varphi \circ i$ ;  $i = \psi \circ i'$ ; y entonces  $\psi \circ \varphi$  hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ & \searrow i & \downarrow \psi \circ \varphi \\ & & F \end{array}$$

El único morfismo con tal propiedad es la identidad en  $F$ . Esto implica que  $\psi \circ \varphi$  es la identidad en  $F$ . De manera similar,  $\varphi \circ \psi$  es la identidad en  $F'$ , por lo que  $\varphi : F \rightarrow F'$  es un isomorfismo.

La existencia del grupo libre  $F$  en  $X$  se puede ver [16], pág. 39.

El siguiente teorema caracteriza a los grupos.

**Teorema 1.1** *Todo grupo es cociente de un grupo libre.*

**Demostración.** Si  $G$  es un grupo y  $A \subseteq G$  es tal que  $G = \langle A \rangle$ , donde  $\langle A \rangle$  es el grupo generado por  $A$ , entonces la inclusión  $j : A \rightarrow G$  se puede extender de manera única a un epimorfismo  $\eta : F \rightarrow G$  con  $F$  grupo libre en  $A$ . Si  $R = \ker \eta$ , entonces de los teoremas de isomorfismos de grupos (vea [11], pág. 108)  $F/R \cong G$ .  $\square$

Decimos que  $R$  es el **grupo de relaciones** de  $G$  y que  $A$  es un **sistema de generadores** de  $G$ , mientras que un conjunto  $B$  de generadores de  $R$  es un **sistema de relaciones** de  $G$ . La construcción anterior de  $G$  se llama **presentación de  $G$** .

**Ejemplo 1.5** *El grupo libre con un generador es el grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ .*

Si  $F$  es un grupo libre en  $X$ , entonces consideramos el grupo derivado  $R = \langle aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in F \rangle$ . El cociente  $G = F/R$  es el grupo abeliano libre en  $X$ . Para el grupo  $G$ , existe una función inyectiva  $i : X \rightarrow G$  tal que dada una función

$f : X \rightarrow H$ , donde  $H$  es un grupo abeliano, siempre existe un único morfismo de grupos  $\rho : G \rightarrow H$  que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & G \\ & \searrow f & \downarrow \rho \\ & & H \end{array}$$

Esta propiedad la podemos usar para caracterizar al grupo abeliano libre en  $X$  o usarla como definición.

En todo caso, el grupo abeliano libre en un conjunto  $X$  resulta ser isomorfo al producto directo de copias del grupo aditivo  $\mathbb{Z}$ , requiriéndose tantas copias de  $\mathbb{Z}$  como elementos tenga  $X$ .

### 1.3. Producto libre de Grupos

En esta sección se estudia el producto libre de grupos, ya que en la Sección 2.4 se hace referencia a definiciones y propiedades que a continuación presentamos.

Sean  $G_1$  y  $G_2$  grupos. Nos interesa definir un grupo  $G_1 * G_2$  que cumpla:

- a)  $G_1 * G_2$  no abeliano.
- b)  $G_1$  y  $G_2$  contenidos en  $G_1 * G_2$  como subgrupos.
- c)  $G_1 * G_2$  generado por la unión  $G_1 \cup G_2$ .
- d)  $G_1 * G_2$  no satisface  $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$  para todo  $g_1 \in G_1$  y  $g_2 \in G_2$ .

El coproducto  $G_1 \amalg G_2$  en la categoría **Grup**, cumple con las condiciones de **a)** a **d)** y no la suma directa  $G_1 \oplus G_2$  como podría pensarse, pues no cumple la propiedad universal del coproducto. En efecto, supongamos que  $i_1 : G_1 \rightarrow G_1 \oplus G_2$  e  $i_2 : G_2 \rightarrow G_1 \oplus G_2$  son las inclusiones,  $H$  un grupo cualquiera,  $f_1 : G_1 \rightarrow H$ ,  $f_2 : G_2 \rightarrow H$  morfismos de grupos y  $f : G_1 \oplus G_2 \rightarrow H$  el único morfismo de grupos que satisface la propiedad universal del coproducto en **Grup**, definido por  $f(g, h) = f_1(g)f_2(h)$ , para  $g \in G_1$  y  $h \in G_2$ , que satisfacen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \oplus G_2 & \xleftarrow{i_2} & G_2 \\ & \searrow f_1 & \downarrow f & \swarrow f_2 & \\ & & H & & \end{array}$$

Sean  $(g, h), (g', h') \in G_1 \oplus G_2$ , entonces  $f((g, h)(g', h')) = f_1(g)f_1(g')f_2(h)f_2(h')$ , es decir,  $f$  no puede ser un morfismo de grupos a menos que  $H$  sea abeliano contradiciéndose la propiedad universal. Entonces  $G_1 \amalg G_2 \neq G_1 \oplus G_2$ .

**Definición 1.7** Sea  $\{G_i \mid i \in \mathcal{J}\}$  una familia de grupos, el **producto libre de grupos** de la familia  $\{G_i \mid i \in \mathcal{J}\}$  denotado por  $*G_i$ , con  $i \in \mathcal{J}$ , se define como el coproducto de  $\{G_i \mid i \in \mathcal{J}\}$  en la categoría **Grup**.

En particular para  $G_1$  y  $G_2$  grupos, el producto libre de  $G_1$  y  $G_2$  se denota por  $G_1 * G_2$ .

**Teorema 1.2** Si  $\{G_i \mid i \in \mathcal{J}\}$  es una familia de grupos, entonces existe siempre su producto libre.

**Demostración.** Definimos como una palabra en los  $G_i$  a una sucesión finita  $(x_1, \dots, x_n)$ , donde cada  $x_k$  pertenece a alguno de los grupos  $G_i$ , dos términos consecutivos en la sucesión pertenecen a distintos grupos, y no hay término (de la sucesión) que sea el neutro de algún  $G_i$ . El entero  $n$  se llama la longitud de la palabra. Consideremos también la palabra vacía, es decir, la única palabra de longitud 0. Designemos por  $W$  el conjunto de todas estas palabras.

Para cada índice  $i$ , definimos ahora una operación (acción de grupos) por la izquierda del grupo  $G_i$  sobre el conjunto  $W$ . Sea  $g \in G_i$  y  $(x_1, \dots, x_n) \in W$ , definimos  $g(x_1, \dots, x_n)$  por

**Caso 1** Si  $x_i \notin G_i$ , entonces

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (g, x_1, \dots, x_n) & \text{si } g \neq 1 \\ (x_1, \dots, x_n) & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

Definimos la acción de  $g$  sobre la palabra vacía por  $g( ) = (g)$ .

**Caso 2** Si  $x_i \in G_i$ , entonces

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} (gx_1, x_2, \dots, x_n) & \text{si } gx_1 \neq 1 \\ (x_2, \dots, x_n) & \text{si } gx_1 = 1. \end{cases}$$

Notemos que si  $gx_1 = 1$  y  $n = 1$ , entonces  $g(x_1)$  es la palabra vacía.

Observemos que se cumple

$$\begin{aligned} 1w &= w \\ (gg')w &= g(g'w), \text{ para toda } w \in W \text{ y } g, g' \in G_i. \end{aligned}$$

Es decir, la operación por la izquierda del grupo  $G_i$  sobre  $W$  es una acción.

Está claro que cada uno de los grupos  $G_i$  actúan efectivamente sobre  $W$ .

Sean  $g, g^{-1} \in G_i$  y  $\phi_g, \phi_{g^{-1}} : W \rightarrow W$ , definido por  $\phi_g(w) = gw$ ,  $\phi_{g^{-1}}(w) = g^{-1}w$ , respectivamente. Como  $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = 1_W$ , entonces  $\phi_g$  es un isomorfismo. Así, cada elemento  $g$  de  $G_i$  se identifica como una permutación del conjunto  $W$  y  $G_i$  se considera como un subgrupo del grupo de todas las permutaciones de  $W$ . Denotamos por  $G$  el subgrupo del grupo de todas las permutaciones de  $W$  generado por la unión de los  $G_i$  y los elementos de  $G$  se expresan como un producto finito de elementos de los  $G_i$ , si dos factores consecutivos pertenecen al mismo  $G_i$ . Evidentemente pueden ser reemplazados por un sólo factor. Así, todo elemento  $g \neq 1$  de  $G$  se expresa como un producto finito de elementos de los  $G_i$  en forma reducida, o sea, que no existen dos factores consecutivos que pertenezcan al mismo grupo, y ningún factor es el elemento neutro. Además,  $G$  contiene a cada  $G_i$  como subgrupo, denotamos por

$$\iota_i : G_i \rightarrow G$$

la correspondiente inclusión. Afirmamos ahora que la expresión de todo elemento  $g \neq 1$  de  $G$  en forma reducida es única. En efecto, sean  $g_1g_2 \dots g_m$  y  $h_1h_2 \dots h_n$  dos representaciones reducidas de  $g \neq 1$ .

Consideremos el efecto de las permutaciones  $g_1g_2 \dots g_m$  y  $h_1h_2 \dots h_n$  sobre la palabra vacía; resultan, entonces, las palabras  $(g_1, g_2, \dots, g_m)$  y  $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ , respectivamente. Puesto que estas dos palabras deben ser iguales, las dos expresiones anteriores son idénticas. Por tanto,  $m = n$  y  $g_i = h_i$  para  $1 \leq i \leq m$ .

Sea  $g_1 \dots g_n$  la representación reducida de  $g \neq 1$  en  $G$ , entonces la representación reducida del inverso de  $g$  es  $g_n^{-1} \dots g_1^{-1}$ .

Es fácil comprobar que  $G$  es efectivamente el producto libre de los  $G_i$  respecto los  $\iota_i$ . En efecto, sea  $H$  un grupo arbitrario y  $\psi_i : G_i \rightarrow H$ ,  $i \in \mathcal{J}$ , una colección arbitraria de morfismos de grupos. Definimos un único morfismo de grupos  $f : G \rightarrow H$  por

$$f(g) = (\psi_{i_1}g_1)(\psi_{i_2}g_2) \dots (\psi_{i_m}g_m),$$

donde  $g = g_1g_2 \dots g_m$ ,  $g_k \in G_{i_k}$ ,  $1 \leq k \leq m$  y  $g \neq 1$  está en forma reducida. Desde luego suponemos  $f(1) = 1$  y hace conmutativos todos los diagramas del coproducto en la categoría **Grup**.  $\square$

## 1.4. Conceptos básicos de espacios conectables por trayectorias

En esta sección se presentan las propiedades de espacios conectables por trayectorias, que se utilizan en el desarrollo de la tesis.

**Definición 1.8** Sea  $X$  un espacio topológico. Una **trayectoria en  $X$**  es una función continua  $f : I \rightarrow X$ , donde  $I = [0, 1]$ . Si  $f(0) = a$  y  $f(1) = b$  decimos que  $f$  es una **trayectoria de  $a$  a  $b$** .

Observemos que la trayectoria es la función  $f$  y no la imagen,  $f([0, 1])$ ; a la imagen le llamamos **curva en  $X$** . Notemos que  $g : I \rightarrow X$  definida por  $g(t) = f(1 - t)$ , es una trayectoria de  $b$  a  $a$ .

**Definición 1.9** Sea  $X$  un espacio topológico. Si  $p \in X$ , entonces  $i_p : I \rightarrow X$  definida por  $i_p(t) = p$  para todo  $t \in I$  se llama **trayectoria constante en  $p$** . Si  $f : I \rightarrow X$  es una trayectoria, entonces su **trayectoria inversa**  $f^{-1} : I \rightarrow X$  está definida por  $f^{-1}(t) = f(1 - t)$ , para cada  $t \in I$ .

**Definición 1.10** Un espacio topológico  $X$ , es **conectable por trayectorias** si para cualesquiera  $a, b \in X$  existe una trayectoria de  $a$  a  $b$ .

**Ejemplo 1.6** Recordemos que un subespacio topológico  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  se dice que es **convexo** cuando, para todo par de puntos  $x, y \in X$ , el segmento de recta que une a  $x$  con  $y$  denotado por  $[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$  está contenido en  $X$ . De donde, todo subespacio topológico convexo es un espacio conectable por trayectorias.

El siguiente lema es importante ya que a lo largo de la tesis se menciona con regularidad.

**Lema 1.1** (Lema del pegado) Supongamos que un espacio topológico  $X$  es la unión finita de subespacios cerrados  $X_i$ , es decir,  $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ . Si para algún espacio  $Y$  y para cada  $i = 1, \dots, n$  existe una función continua  $f_i : X_i \rightarrow Y$  tal que  $f_i|_{X_i \cap X_j} = f_j|_{X_i \cap X_j}$   $i \neq j$ , entonces existe una única función continua  $f : X \rightarrow Y$  con  $f|_{X_i} = f_i$  para todo  $i$ .

**Demostración.** Vea [15], pág. 15.

Bajo las hipótesis del Lema 1.1. Si  $g : X \rightarrow Y$  tal que  $g|_{X_i} = f_i$ , entonces  $g = f$  y  $g$  es continua.

**Teorema 1.3** *Sea  $X$  un espacio topológico, la relación,  $\sim$ , en  $X$  definida por  $a \sim b$  si y sólo si existe una trayectoria de  $a$  a  $b$  es una relación de equivalencia.*

**Demostración.** Vea [14], pág. 160.

**Definición 1.11** *Las clases de equivalencia definidas por la relación,  $\sim$  de la hipótesis del Teorema 1.3, se llaman **componentes por trayectorias de  $X$** .*

A las componentes por trayectorias de un espacio topológico  $X$ , las denotamos por c.p.t.  $X$ .

Para terminar este capítulo es necesario establecemos la siguiente notación. De aquí hasta el final de la tesis cuando digamos espacio nos referimos a un espacio topológico. Denotamos al intervalo cerrado  $[0, 1]$  por  $I$ . El producto cartesiano de  $r$  copias de  $I$  se denota por  $I^r$ . Si  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos homeomorfos lo denotamos por  $X \approx Y$ .

El conjunto  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  es la  **$n$ -esfera** y  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  es el  **$n$ -disco**. Cabe mencionar que  $\mathbb{S}^n \subseteq D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .





## Capítulo 2

# Introducción a la homotopía de espacios topológicos

### 2.1. Homotopía

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  trayectorias en un espacio topológico  $X$ . Si  $\alpha, \beta$  tardan en ir de su punto inicial a su punto final un segundo,  $\alpha(2t)$  y  $\beta(2t - 1)$  son trayectorias que hacen el mismo recorrido que  $\alpha$  y  $\beta$  en la mitad de tiempo. Si el punto final de  $\alpha$  es el punto inicial de  $\beta$ , se define una trayectoria nueva que recorre en un segundo los caminos de  $\alpha$  y  $\beta$ , a saber  $\alpha * \beta$ . Esta es una manera de operar trayectorias y en este capítulo se busca encontrar las condiciones necesarias y suficientes, que asocie a un espacio topológico un grupo, el grupo fundamental  $\pi_1(X)$ , y más general  $\pi_n(X)$ ,  $n \geq 1$ . Además se verifica que esta asociación es funtorial. Las condiciones necesarias se obtienen de introducir curvas homotópicas y las condiciones de suficiencia de pedir que las trayectorias estén basadas en un punto, con el mismo punto inicial y final.

**Definición 2.1** Si  $X, Y$  son espacios y  $f_0, f_1$  son funciones continuas de  $X$  en  $Y$  decimos que  $f_0$  es **homotópica a  $f_1$**  ( $f_0 \simeq f_1$ ), si existe una función continua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f_0(x)$  y  $H(x, 1) = f_1(x)$  para toda  $x \in X$ .

A la función  $H$  se le llama **homotopía**.

Con  $H : f_0 \simeq f_1$  indicamos que  $f_0 \simeq f_1$  con homotopía  $H$ . Una interpretación de una homotopía es la de suponer una familia de funciones continuas  $H_t : X \rightarrow Y$

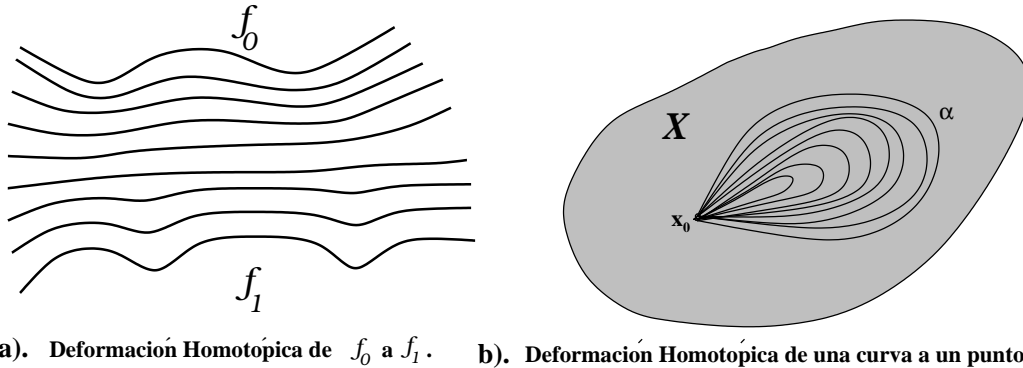


Figura 2.1: Deformación homotópica.

con  $H_t(x) = H(x, t)$  tal que deforma  $f_0$  a  $f_1$  al tiempo  $t$  como muestra la Figura 2.1a).

El siguiente ejemplo muestra la deformación homotópica de una trayectoria a una trayectoria constante.

**Ejemplo 2.1** Consideremos un subespacio convexo  $X$  en  $\mathbb{R}^2$ , una trayectoria  $\alpha$  de  $X$  y un punto  $x_0 \in X$  como se muestra en la Figura 2.1b). Sea  $H : \alpha \simeq x_0$  la homotopía dada por  $H(s, t) = (1-t)\alpha(s) + x_0t$ . La familia de curvas  $H_t$  no tienen diferencia alguna bajo este concepto de homotopía, como veremos en el Teorema 2.1. Nótese que se puede generalizar la homotopía para cualquier subespacio convexo en  $\mathbb{R}^n$  por  $H(x, t) = x(1-t) + x_0t$  donde  $H : 1_X \simeq c$  (con  $c : X \rightarrow X$  denotamos la función constante dada por  $c(x) = x_0$  para toda  $x \in X$ ).

**Teorema 2.1** La relación ( $\simeq$ ) de homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las funciones continuas  $\mathfrak{S}$  de  $X$  a  $Y$ .

**Demostración.**

i) Sea  $f \in \mathfrak{S}$  y considérese la homotopía  $H(x, t) = f(x)$ , entonces  $f \simeq f$ .

ii) Sean  $f, g \in \mathfrak{S}$  tal que  $H : f \simeq g$ . Definimos  $G : X \times I \rightarrow Y$  por  $G(x, t) = H(x, 1-t)$ . Claramente  $G$  es continua, pues la composición de funciones continuas es continua. Además  $G(x, 0) = H(x, 1) = g(x)$  y  $G(x, 1) = H(x, 0) = f(x)$ . Así,  $G : g \simeq f$ .

iii) Sean  $f, g, h \in \mathfrak{S}$  tales que  $H : f \simeq g$  y  $G : g \simeq h$ . Definimos  $K : X \times I \rightarrow Y$  por

$$K(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dado que  $K(x, \frac{1}{2}) = H(x, 1) = G(x, 0) = g(x)$ , entonces por el Lema 1.1 se tiene que  $K$  es una función continua. Además,  $K(x, 0) = H(x, 0) = f(x)$  y  $K(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ . Así  $K : f \simeq h$ .  $\square$

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Su clase de equivalencia definida por la relación  $\simeq$ ,  $[f] = \{g : X \rightarrow Y \text{ continua} \mid g \simeq f\}$  se llama **clase de homotopía** y la familia de todas las clases de homotopía se denota por  $[X, Y]$ . Ahora, bajo el concepto de homotopía, toda la familia de funciones continuas  $H_t$  que deforman una en la otra son parte de la clase de homotopía de  $f$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios. Una función  $f : X \rightarrow Y$  es **nulo homotópica** si existe una función constante  $c : X \rightarrow Y$ ,  $c(x) = y_0$ , tal que  $f \simeq c$ . Así  $[c]$  consta de todas las funciones homotópicas que se deforman a una constante. En particular, decimos que  $X$  es **contraíble** si  $1_X$  es nulo homotópica, por tanto, todo conjunto convexo es contraíble como se muestra en el Ejemplo 2.1.

Debemos observar que si  $\alpha, \beta$  son dos trayectorias homotópicas en un espacio topológico  $X$  y si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces las trayectorias  $f \circ \alpha$  y  $f \circ \beta$  también se deforman una en la otra de manera continua en  $Y$ ; en otras palabras son homotópicas. Equivalentemente,  $f_{\#} : [I, X] \rightarrow [I, Y]$  dada por  $f_{\#}[\alpha] = [f \circ \alpha]$  está bien definida si y sólo si  $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta$ , siempre que  $\alpha \simeq \beta$ . El Teorema 2.2 que a continuación presentamos generaliza esta observación.

**Teorema 2.2** Sean  $f_i : X \rightarrow Y$  y  $g_i : Y \rightarrow Z$  para  $i = 0, 1$  funciones continuas. Si  $f_0 \simeq f_1$  y  $g_0 \simeq g_1$ , entonces  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ , es decir,  $[g_0 \circ f_0] = [g_1 \circ f_1]$ .

**Demostración.** Supongamos que  $F : f_0 \simeq f_1$  y  $G : g_0 \simeq g_1$  son homotopías y considérese la función  $H : X \times I \rightarrow Z$  definida por  $H(x, t) = G(f_0(x), t)$ . Claramente  $H$  es continua pues es composición de funciones continuas. Más aún,

se tiene que para cada  $x \in X$ ,  $H(x, 0) = G(f_0(x), 0) = g_0(f_0(x)) = g_0 \circ f_0(x)$  y  $H(x, 1) = G(f_0(x), 1) = g_1(f_0(x)) = g_1 \circ f_0(x)$  de aquí que  $H : g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_0$ . Por otro lado, sea  $K : X \times I \rightarrow Z$  definida por  $K(x, t) = g_1 \circ F(x, t)$ , entonces  $K(x, 0) = g_1(F(x, 0)) = g_1(f_0(x)) = g_1 \circ f_0(x)$  y  $K(x, 1) = g_1(F(x, 1)) = g_1(f_1(x)) = g_1 \circ f_1(x)$ . Es claro que  $K$  es una función continua. Así,  $K : g_1 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ . Con esto, dado que la relación  $\simeq$  es transitiva, se tiene que  $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ . Por tanto  $[g_0 \circ f_0] = [g_1 \circ f_1]$   $\square$

**Corolario 2.1** *Sea  $h : Y \rightarrow Z$  continua. Entonces  $h_{\#} : [X, Y] \rightarrow [X, Z]$  dada por  $h_{\#}[f] = [h \circ f]$  está bien definida.*

**Demostración.** Del Teorema 2.2, tomando  $h = g_0 = g_1$  y  $f = f_0$ ,  $g = f_1$  se cumple que si  $f \simeq g$ , entonces  $h \circ f \simeq h \circ g$ . De donde  $h_{\#}(f) = [h \circ f]$  está bien definida.  $\square$

El siguiente teorema caracteriza en términos homotópicos las funciones continuas nulo homotópicas de la  $n$ -esfera,  $\mathbb{S}^n$ , a un espacio topológico.

**Teorema 2.3** *Sean  $Y$  espacio topológico y  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$  una función continua. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i)  $f$  es nulo homotópica.
- ii)  $f$  se puede extender a una función continua  $g : D^{n+1} \rightarrow Y$ .
- iii) Si  $x_0 \in \mathbb{S}^n$  y  $k : \mathbb{S}^n \rightarrow Y$  es la función constante  $f(x_0)$ , entonces existe una homotopía  $H : f \simeq k$  tal que  $H(x_0, t) = f(x_0)$  para toda  $t \in I$ .

**Demostración.**

i  $\rightarrow$  ii) Supongamos que  $f$  es nulo homotópica, es decir, existe  $H : f \simeq k$  donde  $k(x) = y_0$  para toda  $x \in \mathbb{S}^n$  y  $y_0 \in Y$ . Sea  $g : D^{n+1} \rightarrow Y$  definida por

$$g(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } 0 \leq \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2(1 - \|x\|)\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

Si  $x \in D^{n+1}$  y  $\|x\| = \frac{1}{2}$ , tenemos que  $g(x) = y_0$  y por otro lado  $g(x) = H(\frac{x}{2}, 1) = k(\frac{x}{2}) = y_0$ . Del Lema 1.1 y dado que  $H$  es continua tenemos que  $g$  es continua. Por último, si  $x \in \mathbb{S}^n$ , entonces  $g(x) = H(\frac{x}{\|x\|}, 0) = f(\frac{x}{\|x\|}) = f(x)$ , de aquí que  $g|_{\mathbb{S}^n} = f$  para toda  $x \in \mathbb{S}^n$ . Por tanto,  $g$  es una extensión de  $f$ .

**ii** → **iii**) Supongamos que  $g : D^{n+1} \rightarrow Y$  es una extensión continua de  $f$ . Sea  $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow Y$  dada por  $H(x, t) = g((1-t)x + tx_0)$  con  $x, x_0 \in \mathbb{S}^n$ . Claramente  $H$  es continua. Más aún, se tiene que  $H(x, 0) = g(x) = f(x)$  y  $H(x, 1) = g(x_0) = f(x_0) = k(x)$ . Además,  $H(x_0, t) = g(x_0) = f(x_0) = k(x)$  para toda  $t \in I$ .

**iii** → **i**) Suponiendo la homotopía  $H : f \simeq k$ , con  $k(x) = f(x_0)$ ,  $f$  es nulo homotópica, se tiene la conclusión.  $\square$

Que dos espacios sean del mismo tipo de homotopía significa que uno de estos

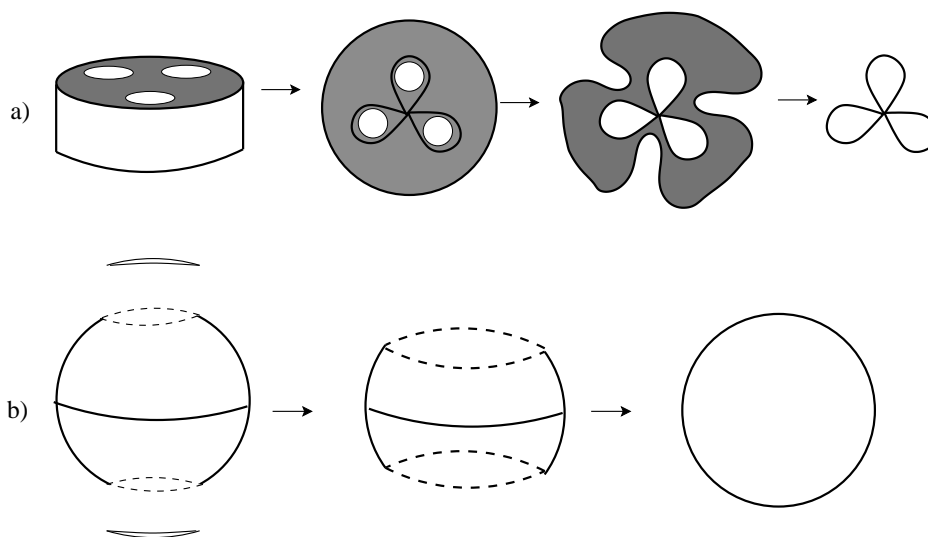


Figura 2.2: Espacios con el mismo tipo de homotopía.

espacios puede deformarse en el otro sin que este pierda algunas de sus propiedades topológicas. Para ilustrar esta idea tenemos en la Figura 2.2a) el cilindro macizo en  $\mathbb{R}^3$  con tres perforaciones. Este espacio es del mismo tipo de homotopía que un lazo de tres pétalos y en la Figura 2.2b) tenemos una esfera menos los polos el cual es del mismo tipo de homotopía de  $\mathbb{S}^1$ . Vea [2], pág. 363.

Para describir matemáticamente esta idea verifiquemos **i),ii)** y **iii)** de la Definición 1.1 de categoría para **htop**, la categoría de todos los espacios topológicos homotópicos, donde  $Obj \mathbf{htop}$  consta de la clase de todos los espacios topológicos,  $Hom(X, Y) = [X, Y]$  y la composición está definida por  $[f] \bullet [g] = [g \circ f]$ . Observemos que la composición está bien definida por el Teorema 2.2.

Verifiquemos que en efecto **htop** es una categoría. Si  $[X, Y] \cap [X', Y'] \neq \emptyset$ , entonces  $[f] \in [X, Y] \cap [X', Y']$  siempre y cuando  $X = X'$  y  $Y = Y'$ , y por tanto  $[X, Y] = [X', Y']$ . En otras palabras  $[X, Y]$  y  $[X', Y']$  son disjuntos a pares. Así **i)** se sigue. Para **ii)**, observemos que  $([f] \bullet [g]) \bullet [h] = [(g \circ f)] \bullet [h] = [h \circ (g \circ f)] = [(h \circ g) \circ f] = [f] \bullet [h \circ g] = [f] \bullet ([g] \bullet [h])$  prueba **ii)**. Finalmente  $1_X = [id_X]$  es identidad por la derecha como por la izquierda, entonces se sigue **iii)** y con todo **htop** es una categoría.

Por otro lado, en la categoría **Grup**, decir que  $G$  y  $G'$  son equivalentes significa  $G \cong G'$ . En  $\mathbf{Top}^1$ ,  $X$  y  $Y$  son equivalentes si  $X \approx Y$ . En la categoría **htop** decir que  $X$  y  $Y$  son equivalentes significa que son del mismo tipo de homotopía (es decir, se deforma  $X$  en  $Y$  de manera homotópica). Esto es, existe  $[f] \in Hom(X, Y)$  y  $[g] \in Hom(Y, X)$  tal que  $[f] \bullet [g] = [id_X]$  y  $[g] \bullet [f] = [id_Y]$ , o equivalentemente la Definición 2.2, como veremos más adelante.

Cabe mencionar que  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{C}$  se pueden ver topológicamente iguales, pero algebraicamente diferentes.

La categoría **htop**<sup>\*</sup> es similar a **htop** excepto que  $Obj \mathbf{htop}^*$  es la clase de todos los espacios topológicos punteados,  $Hom((X, x_0), (Y, y_0)) = [(X, x_0), (Y, y_0)]$  y la composición está definida por  $[f] \bullet [g] := [g \circ f]$ , donde  $\circ$  es la composición de espacios punteados. Vea [22], pág. 12.

**Definición 2.2** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Una función continua  $f : X \rightarrow Y$  es una **equivalencia homotópica** si existe  $g : Y \rightarrow X$  continua, tal que  $g \circ f \simeq id_X$  y  $f \circ g \simeq id_Y$ . Los espacios  $X$  y  $Y$  son del **mismo tipo de homotopía** si existe una equivalencia homotópica  $f : X \rightarrow Y$ .

Durante toda la tesis denotamos a la función identidad de un conjunto  $X$ , por  $1_X$ . Como era de esperar, el siguiente teorema nos da una equivalencia de un espacio contraíble.

**Teorema 2.4** *Un espacio  $X$  tiene el mismo tipo de homotopía de un punto si y sólo si  $X$  es contraíble.*

**Demostración.** Supongamos que  $X$  es del mismo tipo de homotopía de  $Y = \{a\}$ . Entonces existen funciones continuas  $f : X \rightarrow \{a\}$  y  $g : \{a\} \rightarrow X$  con  $g(a) = x_0$ , tales que  $H : g \circ f \simeq 1_X$  y  $G : f \circ g \simeq 1_Y$ . Más aún,  $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a) = x_0$ , donde  $x_0 \in X$ . De aquí que  $H : x_0 \simeq 1_X$ . Por lo tanto,  $X$  es contraíble.

Supongamos ahora que  $X$  es contraíble, es decir, existe  $H : 1_X \simeq x_0$  con  $x_0 \in X$ . Definimos  $f : X \rightarrow \{x_0\}$  como la función constante en  $x_0$  y  $g : \{x_0\} \rightarrow X$  por  $g(x_0) = x_0$ . Nótese que  $f \circ g = 1_{\{x_0\}}$  y que, por hipótesis,  $g \circ f = x_0 \simeq 1_X$ . De aquí que  $X$  y  $x_0$  tienen el mismo tipo de homotopía.  $\square$

**Teorema 2.5** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $Y$  es contraíble, entonces cualesquiera dos funciones continuas de  $X$  en  $Y$  son homotópicas.*

**Demostración.** Dado que  $Y$  es contraíble, entonces existe  $H : Y \times I \rightarrow Y$  continua tal que  $H : 1_Y \simeq y_0$ , para  $y_0 \in Y$ . Definimos  $f : X \rightarrow Y$  por  $f(x) = y_0$  para toda  $x \in X$ . Sea  $g : X \rightarrow Y$  una función continua arbitraria. Consideremos la siguiente función  $G : X \times I \rightarrow Y$  dada por  $G(x, t) = H(g(x), t)$ . Así pues,

$$G(x, 0) = H(g(x), 0) = g(x) \quad \text{y} \quad G(x, 1) = H(g(x), 1) = y_0$$

de aquí que  $G : g \simeq y_0$ . Así  $f \simeq g$ . Por la transitividad de la relación  $\simeq$  se sigue el resultado.  $\square$

El Ejemplo 2.1 es muy importante para intuir conceptos que se puedan extender. Observemos que el subespacio  $\{x_0\} \subseteq X$  es del mismo tipo de homotopía de  $X$ . Luego nos cuestionamos ¿cuáles son las condiciones suficientes para que un subespacio  $A$  sea del mismo tipo de homotopía del espacio total  $X$ ? es decir, ¿cuándo se deforma homotópicamente el espacio  $X$  al subespacio  $A$ ? como vamos a ver en el Ejemplo 2.2 el plano complejo menos el origen (o cualquier otro punto) se puede deformar a  $\mathbb{S}^1$ . Con el Teorema 2.6 que anunciamos más adelante, contestamos a las interrogantes anteriores.

**Definición 2.3** *Sean  $A$  un subespacio de  $X$  e  $i : A \hookrightarrow X$  la inclusión. Entonces  $A$  es un **retracto de deformación de  $X$**  si existe una función continua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = 1_A$  e  $i \circ r \simeq 1_X$ .*

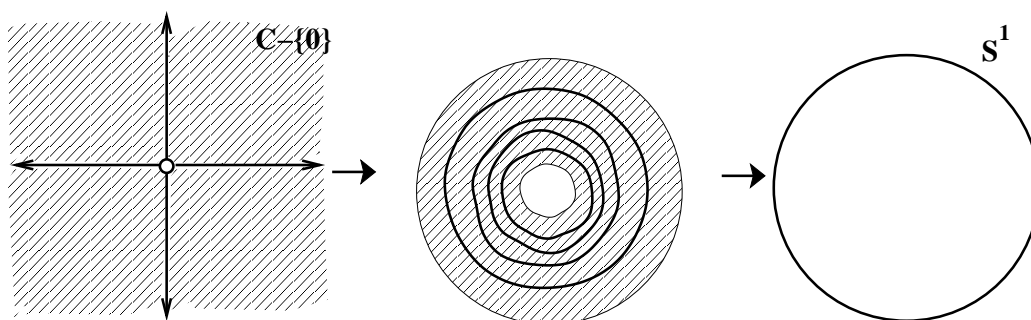


Figura 2.3: Retracto de deformación.

**Ejemplo 2.2**  $\mathbb{S}^1$  es un retracts de deformación de  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

En efecto, sea  $r : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $r(z) = \frac{z}{\|z\|}$ , para cada  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Se tiene que  $r \circ i(z) = r(z) = \frac{z}{\|z\|} = z = 1_{\mathbb{S}^1}(z)$ . Entonces  $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^1}$ .

Por otro lado, sea  $H : \mathbb{C} - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  definida por  $H(z, t) = (1-t)z + t\frac{z}{\|z\|}$ . Notemos que

$$H(z, 0) = z = 1_{\mathbb{C} - \{0\}}(z) \quad \text{y} \quad H(z, 1) = \frac{z}{\|z\|} = i \circ r(z).$$

Entonces  $H : i \circ r \simeq 1_{\mathbb{C} - \{0\}}$ , de aquí que  $\mathbb{S}^1$  es un retracts de deformación de  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Vea la Figura 2.3.

**Teorema 2.6** Si  $A$  es un retracts de deformación de  $X$ , entonces  $A$  y  $X$  son del mismo tipo de homotopía.

**Demostración.** Dado que  $A$  es un retracts de deformación de  $X$ , entonces existe una función continua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = 1_A$  e  $i \circ r \simeq 1_X$ , donde  $i$  es la inclusión de  $A$  en  $X$ . Notemos que  $r \circ i = 1_A$  implica  $r \circ i \simeq 1_A$  pues basta definir  $H : r \circ i \simeq 1_A$  como  $H(x, t) = r \circ i(x)$ , de aquí que  $A$  y  $X$  son del mismo tipo de homotopía.  $\square$



## 2.2. El funtor $\pi_0$

En la introducción de este capítulo se mencionan los invariantes  $\pi_n$  para  $n \geq 1$ . En esta sección, se define de manera natural el primer invariante topológico  $\pi_0$ , que asocia a un espacio un conjunto. Cabe mencionar que este conjunto no es un grupo, como ocurre para  $n \geq 1$ . También es importante saber que el invariante  $\pi_0$  cuenta los “pedazos” ajenos en que se descompone el espacio.

Sea  $Hom(Fr(I), -) : \mathbf{htop} \rightarrow \mathbf{Sets}$  el funtor definido por:

$Hom(Fr(I), X) = [Fr(I), X] = \{[\sigma] \mid \sigma : Fr(I) \rightarrow X \text{ continua}\}$ , donde  $[\sigma]$  es la clase de homotopía de  $\sigma$ , como en el Ejemplo 1.4 donde el espacio fijo es la frontera,  $Fr(I)$  del intervalo  $I = [0, 1]$ .

Nótese que existe una biyección entre  $[Fr(I), X]$  y las c.p.t.  $X$  que es dada por  $\varphi_X[\sigma] = [\sigma(0)]$ . Esta relación, en efecto, es una función. Suponga  $\delta \in [\sigma]$ , entonces existe una homotopía  $H : \delta \simeq \sigma$ . Defina  $\alpha(t) = H(0, t)$  y  $\beta(t) = H(1, t)$ . Luego  $[\sigma(0)] = [\delta(0)] = [\sigma(1)] = [\delta(1)]$  son la misma c.p.t. Por tanto, la función está bien definida. Ahora; si  $[x_0]$  es una c.p.t. y  $\sigma : I \rightarrow X$  es una trayectoria tal que  $\sigma(0) = x_0$  tomando la restricción  $\sigma|_{Fr(I)}$ , tenemos que  $\varphi_X([\sigma|_{Fr(I)}]) = [\sigma(0)]$ . Por tanto,  $\varphi_X$  es sobre. Además, si  $[\delta(0)] = [\sigma(0)]$ , entonces existen trayectorias  $\delta$  y  $\sigma$  en  $X$  tal que  $\delta(0) = \sigma(0)$ . Tomando  $H : \delta|_{Fr(I)} \simeq \sigma|_{Fr(I)}$ , definida por

$$H(s, t) = \begin{cases} \delta((1-2t)s) & \text{si } (s, t) \in Fr(I) \times [0, 1/2] \\ \sigma((2t-1)s) & \text{si } (s, t) \in Fr(I) \times [1/2, 1]. \end{cases}$$

Obtenemos  $[\delta|_{Fr(I)}] = [\sigma|_{Fr(I)}]$ . Así,  $\varphi_X$  es inyectiva.

Más aún,  $\varphi : Hom(Fr(I), -) \rightarrow c.p.t.(-)$  definida por la familia de funciones  $\varphi_X$  es una transformación natural, pues  $\varphi_X$  es biyectiva para cada  $X$  y el siguiente diagrama conmuta, en donde el morfismo  $f : X \rightarrow Y$  en  $\mathbf{htop}$  induce la correspondiente  $f_\#$ :

$$\begin{array}{ccc} Hom(Fr(I), \underline{X}) & \xrightarrow{\varphi_X} & c.p.t.(X) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ Hom(Fr(I), \underline{Y}) & \xrightarrow{\varphi_Y} & c.t.p.(Y). \end{array}$$

Por otro lado, nos interesa cómo se parte  $X$ , así definimos  $\pi_0$  por  $\pi_0(X) = \varphi_X(Hom(Fr(I), \underline{X})) = c.p.t.(X)$ .

**Definición 2.4** *Dados  $X$  y  $Y$  espacios definimos  $\pi_0(\mathbf{X})$  como el conjunto de componentes por trayectorias de  $X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, definimos  $\pi_0(f) :$*

$\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  como la función que toma una componente por trayectorias  $C$  de  $X$  y la manda a la componente por trayectoria de  $Y$  que contiene a  $f(C)$ .

**Teorema 2.7**  $\pi_0 : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Sets}$  es un funtor. Más aún, si  $X$  y  $Y$  son espacios y  $f, g : X \rightarrow Y$  son funciones continuas con  $f \simeq g$ , entonces  $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ .

**Demostración.** El Ejemplo 1.3 sustenta que  $\pi_0$  es un funtor. Sean  $F : f \simeq g$ , y  $x \in [x] = X_\lambda$ , donde  $X_\lambda$  es alguna c.p.t. de  $X$ . Sea  $h(t) = F(x_0, t)$  para cada  $t \in I$ . Es claro que  $h : I \rightarrow Y$  es una trayectoria en  $Y$ . Más aún,  $h(0) = F(x, 0) = f(x)$  y  $h(1) = F(x, 1) = g(x)$ , de aquí que  $f(x) \sim g(x)$ . Así,

$$\pi_0(f)([x]) = [f(x)] = [g(x)] = \pi_0(g)([x]).$$

Por tanto  $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ . □

**Corolario 2.2** Sean  $X$  y  $Y$  espacios. Si  $X$  y  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía, entonces tienen el mismo número de componentes por trayectorias.

**Demostración.** Dado que  $X$  y  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía, entonces existen funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $f \circ g \simeq 1_Y$  y  $g \circ f \simeq 1_X$ . Observemos, de las propiedades de funtor de  $\pi_0$  que

$$\begin{aligned} (\pi_0(f) \circ \pi_0(g))(Y) &= \pi_0(f \circ g)(Y) = \pi_0(1_Y) = 1_{\pi_0(Y)} \quad Y, \\ (\pi_0(g) \circ \pi_0(f))(X) &= \pi_0(g \circ f)(X) = \pi_0(1_X) = 1_{\pi_0(X)}. \end{aligned}$$

Luego, existe una biyección entre  $\pi_0(X)$  y  $\pi_0(Y)$ . Por lo tanto, tienen el mismo número de componentes por trayectorias. □

## 2.3. El Grupo Fundamental

En esta sección introducimos el invariante topológico  $\pi_1$ , el cual asigna a cada espacio  $X$  un grupo (no necesariamente abeliano). Como se mencionó en la introducción del Capítulo 1, uno de nuestros objetivos es construir un grupo cuyos elementos sean clases de homotopía de trayectorias en  $X$  con la operación binaria  $[f][g] = [f * g]$ . Así, para  $f, g : I \rightarrow X$  trayectorias con  $f(1) = g(0)$  se define

$f * g : I \rightarrow X$  por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por el Lema 1.1 tenemos que  $f * g$  es continua, pues  $f * g(\frac{1}{2}) = f(1) = g(0)$ . Luego,  $f * g$  es una trayectoria en  $X$ . Si  $X$  es contraíble, entonces todas las funciones continuas de  $I$  en  $X$  son homotópicas. Entonces, existe sólo una clase de homotopía (la clase de la función constante). Así, el grupo asociado es el grupo trivial el cual proporciona muy poca información, entonces se modifica la definición de homotopía de la siguiente manera.

**Definición 2.5** Sean  $X$  un espacio,  $A \subset X$  y  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  funciones continuas con  $f_0|_A = f_1|_A$ . Se escribe

$$f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A,$$

si existe una homotopía  $F : f_0 \simeq f_1$  tal que  $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$  para todo  $a \in A$  y todo  $t \in I$ . A esta homotopía se le llama **homotopía relativa**, o abreviando decimos **homotopía rel  $A$** .

La expresión  $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$  para toda  $a \in A$  y toda  $t \in I$ , se sustituye por  $F(A, t) = f_0(A) = f_1(A)$ .

Notemos que la homotopía usual puede verse como una homotopía rel  $\emptyset$ . De manera, similar que en el caso de la homotopía se tiene, para  $A \subset X$ , que la homotopía rel  $A$  es una relación de equivalencia sobre el conjunto de funciones continuas de  $X$  en  $Y$ . La demostración de este hecho es análoga a la del Teorema 2.1, vea [2], pág. 380.

**Definición 2.6** Sea  $Fr(I) = \{0, 1\}$  la frontera de  $I$  en  $\mathbb{R}$ . La clase de equivalencia de una trayectoria  $f : I \rightarrow X$  rel  $Fr(I)$  es llamada la **clase de trayectoria de  $f$**  y se denota por  $[f]$ .

**Teorema 2.8** Sean  $f_0, f_1, g_0, g_1 : I \rightarrow X$  trayectorias en un espacio  $X$  con

$$f_0 \simeq f_1 \text{ rel } Fr(I) \text{ y } g_0 \simeq g_1 \text{ rel } Fr(I).$$

Si  $f_0(1) = f_1(1) = g_0(0) = g_1(0)$ , entonces  $f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1$  rel  $Fr(I)$ .

**Demostración.** Supongamos que  $F : f_0 \simeq f_1 \text{ rel } Fr(I)$  y que  $G : g_0 \simeq g_1 \text{ rel } Fr(I)$ . Definimos  $K : I \times I \rightarrow X$  de la siguiente manera:

$$K(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases} \text{ para cada } t \in I.$$

Observe que, como

$$K\left(\frac{1}{2}, t\right) = \begin{cases} F(1, t) = f_0(1) = f_1(1) \\ G(0, t) = g_0(0) = g_1(0) \end{cases}$$

y  $f_1(1) = g_1(0)$ , entonces por el Lema 1.1  $K$  es continua. Más aún,

$$K(s, 0) = \begin{cases} F(2s, 0) = f_0(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s - 1, 0) = g_0(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

lo que indica que  $K(s, 0) = f_0 * g_0$ . Análogamente  $K(s, 1) = f_1 * g_1$ . Resta verificar que  $K(a, t) = f_0 * g_0(a) = f_1 * g_1(a)$ , para todo  $a \in Fr(I)$  y  $t \in I$ . Para esto observemos que

$$\begin{aligned} K(0, t) &= F(0, t) = f_0(0) = f_0 * g_0(0) = f_1(0) = f_1 * g_1(0) \quad y, \\ K(1, t) &= G(1, t) = g_0(1) = f_0 * g_0(1) = g_1(1) = f_1 * g_1(1). \end{aligned}$$

Por tanto  $K : f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1 \text{ rel } Fr(I)$ . □

**Definición 2.7** Sea  $X$  un espacio, si  $f : I \rightarrow X$  es una trayectoria de  $x_0$  a  $x_1$ , llamamos a  $x_0$  **origen de  $f$**  y lo denotamos por  $x_0 = \alpha(f)$ , y a  $x_1$  el **final de  $f$**  y lo denotamos por  $x_1 = \omega(f)$ . Una trayectoria  $f$  es **cerrada** en  $x_0$  si  $\alpha(f) = \omega(f)$ . A una trayectoria cerrada  $f$  en  $x_0$  también la conocemos como **lazo basado en  $x_0$** .

Observemos que si  $f \simeq g \text{ rel } Fr(I)$ , entonces  $\alpha(f) = \alpha(g)$  y  $\omega(f) = \omega(g)$ . Así, podemos hablar del inicio y final de una clase de trayectoria  $[f]$  y lo denotamos por  $\alpha[f]$  y  $\omega[f]$ , respectivamente.

**Teorema 2.9** Sea  $X$  un espacio topológico. Entonces el conjunto de todas las clases de trayectorias de  $X$  bajo la operación binaria  $[f][g] = [f * g]$  forma un sistema algebraico llamado **grupoide** y satisface las siguientes condiciones.

- i) Cada clase de trayectoria de  $[f]$  tiene un origen  $\alpha[f] = p$  y un final  $\omega[f] = q$ , con  $p, q \in X$ . Además,

$$[i_p][f] = [f] = [f][i_q].$$

- ii) La asociatividad se cumple siempre y cuando sea posible.

- iii) Si  $p = \alpha[f]$  y  $q = \omega[f]$ , entonces

$$[f][f^{-1}] = [i_p] \text{ y } [f^{-1}][f] = [i_q].$$

**Demostración.**

- i) Sean  $p, q \in X$ . Sólo mostramos que  $i_p * f \simeq f \text{ rel } Fr(I)$ . (La otra parte es similar.) Nuestro objetivo es encontrar una función continua  $H : I \times I \rightarrow X$ , tal que  $H : i_p * f \simeq f \text{ rel } Fr(I)$ .

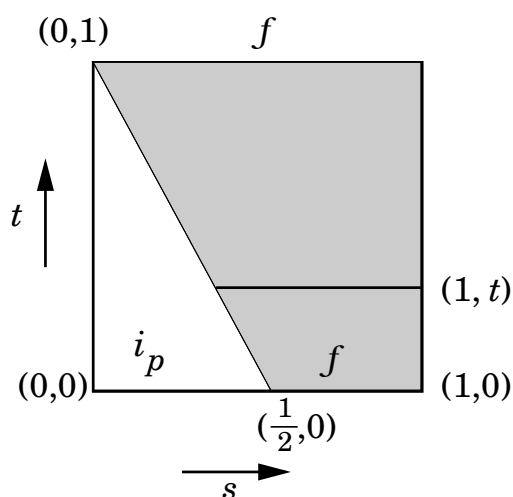


Figura 2.4:

Observemos en la Figura 2.4, la ecuación de la recta que une los puntos  $(0, 1)$  y  $(\frac{1}{2}, 0)$  es  $2s = 1 - t$ . Por otro lado, sea  $t$  fijo, definimos la ecuación de la recta que une los puntos  $(\frac{1-t}{2}, 0)$  y  $(1, 1)$ , con pendiente  $m = \frac{2}{1+t}$  por  $\theta_t(s) = \frac{2}{1+t}(s-1) + 1 = \frac{s-(1-t)/2}{1-(1-t)/2}$ .

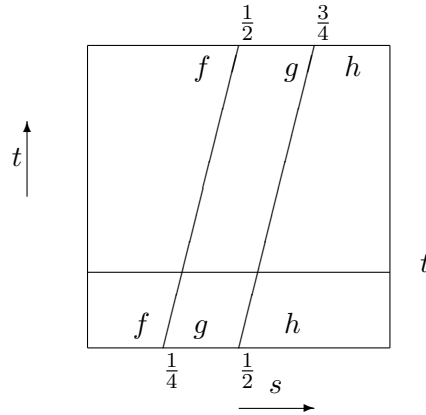
Definimos  $H : I \times I \rightarrow X$  como

$$H(s, t) = \begin{cases} p & \text{si } 2s \leq 1 - t \\ f(\theta_t(s)) & \text{si } 2s \geq 1 - t; \end{cases}$$

Notemos que  $H$  coincide con  $i_p$  en la parte no sombreada de la Figura 2.4 y con  $f$  la parte sombreada de la Figura 2.4. Además, si  $s = \frac{1-t}{2}$ , el valor que toma  $H$  es  $p$ , por el Lema 1.1  $H$  es continua.

Tenemos  $H(s, 0) = p = i_p$  para  $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$  y  $H(s, 0) = f(2s - 1)$  para  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  lo que indica que  $H(s, 0) = (i_p * f)(s)$  y  $H(s, 1) = f(s)$  para  $0 \leq s \leq 1$ . Más aún,  $H(0, t) = p = i_p * f(0) = f(0)$  y  $H(1, t) = q = i_p * f(1) = f(1)$ . Por tanto  $H : i_p * f \simeq f$  rel  $Fr(I)$ , de aquí que  $[i_p][f] = [i_p * f] = [f]$ .

ii) Para la demostración de la asociatividad seguiremos un esquema similar a la demostración anterior. Ahora considérese el siguiente diagrama.



Para un  $t$  fijo definimos tres funciones continuas  $\theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3$ , donde

$$\theta_t^1 : [0, \frac{t+1}{4}] \rightarrow [0, 1], \quad \theta_t^2 : [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}] \rightarrow [0, 1] \quad \text{y} \quad \theta_t^3 : [\frac{t+2}{4}, 1] \rightarrow [0, 1]$$

definidas por  $\theta_t^1(s) = \frac{4s}{t+1}$ ,  $\theta_t^2(s) = 4s - t - 1$  y  $\theta_t^3(s) = \frac{4s-t-2}{2-t}$ , respectivamente. Definimos  $H : I \times I \rightarrow X$  como:

$$H(s, t) = \begin{cases} f(\frac{4s}{t+1}) & 4s - 1 \leq t \\ g(4s - t - 1) & 4s - 2 \leq t \leq 4s - 1 \\ h(\frac{4s-t-2}{2-t}) & t \leq 4s - 2. \end{cases}$$

Es fácil probar que  $H$  es continua y además  $H : (f * g) * h \simeq f * (g * h)$  rel  $Fr(I)$ .

iii) Sea  $H : I \times I \rightarrow X$  definida por

$$H(s, t) = \begin{cases} f(2s(1-t)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(2(1-s)(1-t)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Se puede ver que  $H : f * f^{-1} \simeq i_p \text{ rel } Fr(I)$ .

Por otro lado, para mostrar que  $f^{-1} * f \simeq i_q \text{ rel } Fr(I)$  definimos  $F$  por

$$F(s, t) = \begin{cases} f(2s(t-1)+1) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ f(2(1-s)(t-1)+1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Es fácil ver que  $F : f^{-1} * f \simeq i_q \text{ rel } Fr(I)$  □

**Teorema 2.10** *Sea  $X$  un espacio topológico, y  $x_0 \in X$  fijo. El conjunto*

$$\pi_1(X, x_0) = \{[f] : [f] \text{ es una clase de trayectoria en } X \text{ con } \alpha[f] = x_0 = \omega[f]\}$$

*es un grupo para cada  $x_0 \in X$ , con la operación binaria  $[f][g] = [f * g]$ .*

**Demostración.** Sea  $x_0 \in X$ . Todas las propiedades excepto la cerradura se deducen del Teorema 2.9. Para comprobar la cerradura sean  $[f], [g]$  clases de trayectorias con  $\alpha[f] = \alpha[g] = x_0 = \omega[f] = \omega[g]$ . Dado que  $[f][g] = [f * g]$ , es una clase de trayectoria entonces lo único que nos resta verificar es que  $f * g$  es una trayectoria cerrada en  $x_0$ , pero esto se tiene de la definición pues  $f * g(0) = f(0) = x_0$  y  $f * g(1) = g(1) = x_0$ . De aquí que  $f * g$  es una trayectoria cerrada. Por lo tanto,  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo. □

**Definición 2.8** *Sea  $X$  un espacio topológico. Dado un punto  $x_0 \in X$  fijo lo llamamos **punto base**. El **grupo fundamental de  $X$**  con punto base  $x_0$  es el grupo  $\pi_1(X, x_0)$ .*

**Lema 2.1** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos y  $f, g : I \rightarrow X$  trayectorias tales que  $f$  y  $g$  son homotópicas rel  $Fr(I)$ . Si  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  es una función continua, entonces  $h \circ f \simeq h \circ g \text{ rel } Fr(I)$ .*

**Demostración.** Basta definir la homotopía  $K : I \times I \rightarrow Y$  como  $K(x, t) = h \circ H(x, t)$ , donde  $H : f \simeq g \text{ rel } Fr(I)$ .  $\square$

**Teorema 2.11**  $\pi_1 : \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Grup}$  es un funtor covariante. Más aún, si las funciones  $h, k : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  son tales que  $h \simeq k \text{ rel } \{x_0\}$ , entonces  $\pi_1(h) = \pi_1(k)$ , donde  $(X, x_0), (Y, y_0) \in \text{Obj } \mathbf{Top}^*$ .

**Demostración.** Probemos los axiomas de **i)** a **iv)** de la Definición 1.3.

**i)** Se tiene del Teorema 2.10.

**ii)** Sean  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ , y una función continua  $h : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ . Definimos  $\pi_1(h)$  por  $\pi_1(h)[f] = [h \circ f]$ . Note que la composición  $h \circ f : (I, Fr(I)) \rightarrow (Y, y_0)$  es una trayectoria cerrada de  $Y$  en el punto  $y_0$ , pues  $h \circ f(0) = h(f(0)) = h(x_0) = y_0$ , y  $h \circ f(1) = h(f(1)) = h(x_0) = y_0$ ; entonces  $[h \circ f] \in \pi_1(Y, y_0)$ . También  $\pi_1(h)$  está bien definida pues si  $f \simeq f' \text{ rel } Fr(I)$ , entonces por el Lema 2.1  $h \circ f \simeq h \circ f' \text{ rel } Fr(I)$ . Ahora si  $f, g$  son trayectorias cerradas de  $X$  en el punto  $x_0$ , entonces

$$h \circ (f * g) = \begin{cases} h(f(2s)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(g(2s - 1)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

lo que implica  $h \circ (f * g) = (h \circ f) * (h \circ g)$ . Así,  $\pi_1(h)([f][g]) = \pi_1(h)([f * g]) = [h \circ (f * g)] = [(h \circ f) * (h \circ g)] = [h \circ f][h \circ g] = \pi_1(h)[f]\pi_1(h)[g]$ . De aquí que  $\pi_1(h)$  es un morfismo.

**iii)** Si  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  y  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  son funciones continuas y  $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$  arbitrario, entonces

$$\pi_1(g \circ f)[\sigma] = [(g \circ f) \circ \sigma] = [g \circ (f \circ \sigma)] = \pi_1(g)[f \circ \sigma] = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)[\sigma].$$

**iv)** Si  $1_{(X, x_0)}$  es la identidad en el espacio  $(X, x_0)$ , entonces  $\pi_1(1_{(X, x_0)})[\sigma] = [1_{(X, x_0)} \circ \sigma] = [\sigma] = 1_{\pi_1(X, x_0)}([\sigma])$ , para todo  $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ .

Así, de **i)** a **iv)**,  $\pi_1$  es un funtor covariante.

Ahora, si  $h \simeq k \text{ rel } \{x_0\}$ , entonces  $h \circ f \simeq k \circ f \text{ rel } Fr(I)$ , siempre que  $f$  sea una trayectoria cerrada de  $X$  en  $x_0$ . Así,  $[h \circ f] = [k \circ f]$  para toda  $f$ , es decir,  $\pi_1(h) = \pi_1(k)$ .  $\square$



Usualmente escribimos  $h_*$  en lugar de  $\pi_1(h)$  y llamamos  $h_*$  la **función inducida por  $h$** .

Recordemos que  $\mathbf{htop}^*$  es la categoría de los espacios homotópicos punteados. En particular, tomemos  $Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)) = [(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)]$  y observemos que se define una operación que lo hace grupo, (vea el Teorema 2.12). Para lograr esto primero tenemos que estudiar el siguiente lema.

**Lema 2.2** *Sea  $X$  espacio topológico y  $x_0 \in X$ . Si  $f, g : I \rightarrow X$  son trayectorias en  $X$  con  $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = x_0$ , entonces se tiene lo siguiente:*

- i) *Existe una función continua  $f' : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$  dada por  $f'(e^{2\pi it}) = f(t)$ .*
- ii) *Si  $f \simeq g \text{ rel } Fr(I)$ , entonces  $f' \simeq g' \text{ rel } \{1\}$ .*
- iii) *Si  $f \simeq f_1 \text{ rel } Fr(I)$  y  $g \simeq g_1 \text{ rel } Fr(I)$ , entonces  $f' * g' \simeq f'_1 * g'_1 \text{ rel } \{1\}$ .*

**Demostración.**

i) Recordemos que  $exp(t) = e^{2\pi it}$  es una función cociente (vea [2], pág. 86), y  $\{0, 1\} = exp^{-1}(\{1\})$ . Por hipótesis,  $f(\{0, 1\}) = \{x_0\}$ . Luego  $f$  es constante para cada  $t \in I$ . Por tanto  $f'(e^{2\pi it}) = f(t)$ . Es decir, el diagrama que se muestra a continuación, conmuta:

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \exp \downarrow & \searrow f & \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f'} & X \end{array}$$

ii) Supongamos que  $H : f \simeq g \text{ rel } Fr(I)$ , entonces

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s) \\ H(s, 1) &= g(s) \\ H(a, t) &= f(a) = g(a), \text{ para } a \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Dado que  $f'$  y  $g'$  hacen conmutar los diagramas a) y b), respectivamente

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \exp \downarrow & \searrow f & \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f'} & X \end{array}$$

a)

$$\begin{array}{ccc} I & & \\ \exp \downarrow & \searrow g & \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{g'} & X \end{array}$$

b)

Proponemos  $F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow X$ , dada por  $F(e^{2\pi is}, t) = H(s, t)$ . Es claro que esta función es continua. Más aún, se tiene

$$\begin{aligned} F(e^{2\pi is}, 0) &= H(s, 0) = f(s) = f'(e^{2\pi is}) \\ F(e^{2\pi is}, 1) &= H(s, 1) = g(s) = g'(e^{2\pi is}) \\ F(1, t) &= F(e^{2\pi i(1)}, t) = H(1, t) = f(1) = g(1) = f'(1) = g'(1). \end{aligned}$$

Es así como  $F : f' \simeq g' \text{ rel } \{1\}$ .

**iii)** Supongamos que  $F : f \simeq f_1 \text{ rel } Fr(I)$  y  $G : g \simeq g_1 \text{ rel } Fr(I)$ . Por **ii)** existen  $F' : f' \simeq f'_1 \text{ rel } Fr(I)$  y  $G' : g' \simeq g'_1 \text{ rel } Fr(I)$ . Sea  $K : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow X$ , definida por

$$K(s, t) = \begin{cases} F' \circ (\exp \times id)(2s, t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G' \circ (\exp \times id)(2s - 1, t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

se tiene que

$$K(s, 0) = \begin{cases} F'(e^{2\pi i(2s)}, 0) = f'(e^{2\pi i(2s)}) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G'(e^{2\pi i(2s-1)}, 0) = g'(e^{2\pi i(2s-1)}) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

Es decir,  $K(s, 0) = f' * g'(s)$ . Análogamente se puede verificar que  $K(s, 1) = f'_1 * g'_1(s)$ .

También se cumple que

$$K(1, t) = G'(e^{2\pi i(1)}, t) = G(1, t) = g(1) = g'(1) = x_0 = f' * g'(1) = f'_1 * g'_1(1).$$

Notemos que como

$$K(1/2, t) = \begin{cases} F'(e^{2\pi i(1)}, t) = F(1, t) = f(1) = f_1(1) = x_0 \\ G'(e^{2\pi i(0)}, t) = G(0, t) = g(0) = g_1(0) = x_0. \end{cases}$$

Entonces por el Lema 1.1,  $K$  es continua. Por tanto,  $K : f' * g' \simeq f'_1 * g'_1 \text{ rel } \{1\}$ .  $\square$

El objetivo del siguiente teorema consiste en dotar de una operación al conjunto  $Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  y probar que se cumplen los axiomas de grupo.

**Teorema 2.12** *Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado. El conjunto  $Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)) = [(\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)]$  con la operación  $[f'][g'] = [(f * g)']$  es un grupo, donde  $f', g', (f * g)'$  son como en el Lema 2.2i).*

**Demostración.** Aseguramos que la operación está bien definida.

En efecto, sean  $[f'], [g'] \in Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  y  $f'_1 \in [f'], g'_1 \in [g']$ , es decir, existen  $F' : f' \simeq f'_1 \text{ rel } \{1\}$  y  $G' : g' \simeq g'_1 \text{ rel } \{1\}$ . Luego  $F : f' \circ exp \simeq f'_1 \circ exp \text{ rel } Fr(I)$  y  $G : g' \circ exp \simeq g'_1 \circ exp \text{ rel } Fr(I)$ . Por tanto  $F : f \simeq f_1 \text{ rel } Fr(I)$  y  $G : g \simeq g_1 \text{ rel } Fr(I)$ . Entonces, por el Teorema 2.8 se tiene que  $f * g \simeq f_1 * g_1 \text{ rel } Fr(I)$  y del Lema 2.2  $(f * g)' \simeq (f_1 * g_1)' \text{ rel } \{1\}$ . Por tanto  $[f'][g'] = [(f * g)'] = [(f_1 * g_1)'] = [f'_1][g'_1]$ .

Del Teorema 2.9 y el Lema 2.2ii) el neutro de  $Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  es  $[i'_{x_0}]$ , donde  $i_{x_0} = i'_{x_0} \circ exp$ , e  $i_{x_0}$  es la trayectoria constante en  $x_0$ , y el inverso de  $[f'] \in Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  es  $[(f^{-1})']$ , donde  $f^{-1}$  es la trayectoria inversa  $f$  y  $f^{-1} = (f^{-1})' \circ exp$ . La asociatividad es clara del Teorema 2.9 de hecho, la prueba es análoga a la demostración del Teorema 2.9ii).  $\square$

En el Teorema 2.13 se prueba que  $Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  es isomorfo al grupo fundamental de un espacio topológico punteado.

**Teorema 2.13** *Sea  $(X, x_0)$  un espacio topológico punteado. Entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)).$$

**Demostración.** Definimos  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  por  $\varphi([f]) = [f']$ , donde  $f'$  es como en Lema 2.2i). Probamos que  $\varphi$  está bien definida. Sea  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ , y  $g \in [f]$ , es decir,  $f \simeq g \text{ rel } Fr(I)$ . Entonces, por el Lema 2.2ii) se tiene que  $f' \simeq g' \text{ rel } \{1\}$ . Luego  $[f'] = [g']$ . Por otro lado,  $\varphi([f][g]) = \varphi([f * g]) = [(f * g)'] = [f'][g'] = \varphi([f])\varphi([g])$ ;  $\varphi$  es un morfismo de grupos. Además  $\varphi$  es sobre ya que para  $[f'] \in Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$ , existe una trayectoria cerrada  $f : I \rightarrow X$  tal que  $f'(exp(s)) = f(s)$ . Luego se cumple  $\varphi([f]) = [f']$ . Por último, resta probar que  $\varphi$  es inyectiva. Si  $\varphi([f]) = \varphi([g])$ , entonces  $[f'] = [g']$ , es decir,  $f' \simeq g' \text{ rel } \{1\}$ . Luego  $f' \circ exp \simeq g' \circ exp \text{ rel } Fr(I)$ , lo que implica que  $f \simeq g \text{ rel } Fr(I)$ . Por tanto,  $[f] = [g]$ . Con todo  $\varphi$  es un isomorfismo.  $\square$

Sea  $(X, x_0) \in Obj \mathbf{Top}^*$  y  $\varphi_X = \varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0))$  como en el Teorema 2.13, una familia de morfismos de grupos.  $\varphi_X$  es una transformación natural entre los funtores  $Hom((\mathbb{S}^1, 1), -)$  y  $\pi_1$ , pues  $\varphi_X$  es isomorfismo para cada  $(X, x_0)$  y hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Hom((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)) & \xrightarrow{\varphi_X} & \pi_1(X, x_0) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ Hom((\mathbb{S}^1, 1), (Y, y_0)) & \xrightarrow{\varphi_Y} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

Así, podemos también definir a  $\pi_1$  por  $\pi_1(X, x_0) = \varphi_X(\text{Hom}((\mathbb{S}^1, 1), (X, x_0)))$ .

**Teorema 2.14** *Sea  $X$  espacio topológico. Si  $x_0 \in X$  y  $X_0$  es la componente por trayectoria de  $X$  que contiene  $x_0$ , entonces*

$$\pi_1(X_0, x_0) \cong \pi_1(X, x_0).$$

**Demostración.** Aseguramos que  $j_* : \pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  es un isomorfismo, donde  $j : (X_0, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$  es la inclusión. En efecto, si  $[f] \in \ker j_*$ , entonces  $j_*[f] = [j \circ f] = [x_0]$ , donde  $x_0$  es la trayectoria constante. Luego sea  $F : j \circ f \simeq x_0 \text{ rel } Fr(I)$  la homotopía cómo  $F(0, 0) = x_0$ ; y dado que  $F(I \times I)$  es conectable por trayectorias, se sigue que  $F(I \times I) \subset X_0$ . Es simple verificar que  $F : f \simeq x_0 \text{ rel } Fr(I)$ . De aquí que  $\ker j_* = [x_0]$ . Por lo tanto  $j_*$  es inyectiva. Para verificar que  $j_*$  es sobre basta tomar  $f : I \rightarrow X$  una trayectoria cerrada en  $x_0$ . Entonces  $f(I) \subset X_0$ . Definimos  $f' : I \rightarrow X_0$  por  $f'(t) = f(t)$  para todo  $t \in I$ . Notemos que  $j_*[f'] = [j \circ f'] = [f]$ , entonces  $j_*$  es sobreyectiva. Por tanto  $j_*$  es un isomorfismo de grupos.  $\square$

El resultado siguiente asegura que el grupo fundamental de un espacio  $X$  es independiente de la elección del punto base siempre que  $X$  sea conectable por trayectorias.

**Teorema 2.15** *Si  $X$  es conectable por trayectorias y  $x_0, x_1 \in X$ , entonces*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1).$$

**Demostración.** Sea  $\gamma$  una trayectoria en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ . Definamos  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$  por  $\varphi([f]) = [\gamma^{-1}][f][\gamma]$ . Es claro que  $\varphi$  está bien definida. Más aún  $\varphi$  es un isomorfismo con inversa  $\psi$ , dada por  $\psi([g]) = [\gamma][g][\gamma^{-1}]$ .  $\square$

El siguiente resultado se encuentra como ejercicio en [8] y nos dice que el grupo fundamental del producto de una familia arbitraria de espacios topológicos punteados se puede ver como el producto de los grupos fundamentales de cada uno de los espacios topológicos punteados de la familia.

**Teorema 2.16** *Sea  $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$  una familia de espacios topológicos, donde  $\mathcal{A}$  es un conjunto de índices, entonces  $\pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}}(X_\alpha, x_\alpha)) \cong \prod_{\alpha \in \mathcal{A}}(\pi_1(X_\alpha, x_\alpha))$ .*

**Demostración.** Probemos que  $\{\pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}}(X_\alpha, x_\alpha)), P_{\alpha_*}\}$  cumple la propiedad universal del producto directo de la familia de grupos  $\{\pi_1(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ , donde  $P_\alpha$  son las proyecciones naturales del producto cartesiano. (Vea Definición 1.2)

Es decir, dado  $\{G, q_\alpha\}$  un par tal que  $G$  es grupo y  $q_\alpha : G \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  una familia de morfismos de grupos, entonces existe un único morfismo de grupos  $f : G \rightarrow \pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}}(X_\alpha, x_\alpha))$ , tal que  $P_{\alpha_*} \circ f = q_\alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & & G \\ & \swarrow f & \downarrow q_\alpha \\ \pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}}(X_\alpha, x_\alpha)) & \xrightarrow{P_{\alpha_*}} & \pi_1(X_\alpha, x_\alpha) \end{array}$$

Hacemos la prueba en tres pasos:

- 1) La existencia de  $f$ .
- 2) La unicidad de  $f$ .
- 3)  $f$  es un morfismo de grupos.

1) Para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$  sean  $g \in G$  y  $q_\alpha(g) \in \pi_1(X_\alpha, x_\alpha)$  y  $\sigma_\alpha \in q_\alpha(g)$  un lazo basado en  $x_\alpha$ . Consideremos  $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  la familia de lazos basados en  $x_\alpha$ .

Como  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  cumple en **Top<sup>1</sup>** la propiedad universal del producto, entonces existe una única función continua  $\sigma : I \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$  tal que  $P_\alpha \circ \sigma = \sigma_\alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Por tanto, el siguiente diagrama conmuta en la categoría de **Top<sup>1</sup>**.

$$\begin{array}{ccc} & & I \\ & \swarrow \sigma & \downarrow \sigma_\alpha \\ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha & \xrightarrow{P_\alpha} & X_\alpha \end{array}$$

Así,  $\sigma$  es un lazo basado en  $(x_\alpha)_\alpha$ , pues

$$P_\alpha \circ \sigma(0) = \sigma_\alpha(0) = x_\alpha = P_\alpha \circ \sigma(1) \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A}.$$

De donde,  $\sigma(0) = (x_\alpha)_\alpha = \sigma(1)$ . Luego, definimos  $f(g) = [\sigma]$ . Probemos que  $f$  está bien definida. Sea  $\delta_\alpha$  otra familia de lazos basados en  $x_\alpha$ , con  $\sigma_\alpha \simeq \delta_\alpha$  rel  $Fr(I)$  para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tal que existe un único lazo  $\delta : (I, Fr(I)) \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}}(X_\alpha, x_\alpha)$  el cual cumple que  $P_\alpha \circ \delta = \delta_\alpha$  para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Afirmamos que  $\delta \simeq \sigma$  rel  $Fr(I)$ . En efecto, dado que existe una familia de homotopías relativas a la frontera de  $I$ ,  $H_\alpha : \sigma_\alpha \simeq \delta_\alpha$  rel  $Fr(I)$ . Entonces, existe una única función continua  $H : I \times I \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & I \times I & \\ & \swarrow H & \downarrow H_\alpha \\ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha) & \xrightarrow{P_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha). \end{array}$$

Es decir,  $P_\alpha \circ H = H_\alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Verifiquemos que  $H : \delta \simeq \sigma$  rel  $Fr(I)$ . Tenemos que  $H(-, 0) : I \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha)$  hace conmutar el siguiente diagrama, donde  $P_\alpha \circ H(s, 0) = \sigma_\alpha$ .

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \swarrow H(-, 0) & \downarrow \sigma_\alpha \\ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha) & \xrightarrow{P_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha). \end{array}$$

Dado que  $H(-, 0)$  es única, debe de coincidir con  $\sigma$ . Así  $H(s, 0) = \sigma(s)$ . De manera similar  $H(s, 1) = \delta(s)$ .

Finalmente,  $P_\alpha \circ H(Fr(I), t) = H_\alpha(Fr(I), t) = \sigma_\alpha(Fr(I)) = \delta_\alpha(Fr(I)) = x_\alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Se sigue que  $H(Fr(I), t) = \sigma(Fr(I)) = \delta(Fr(I)) = (x_\alpha)_\alpha$ . Así,  $H : \delta \simeq \sigma$  rel  $Fr(I)$ . Por tanto  $f$  está bien definida.

2) Probemos la unicidad de  $f$ . Supongamos que existe  $f'$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ & \swarrow f, f' & \downarrow q_\alpha \\ \pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha)) & \xrightarrow{P_{\alpha_*}} & \pi_1(X_\alpha, x_\alpha). \end{array}$$

Sean  $\sigma, \delta : (I, Fr(I)) \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha)$  trayectorias cerradas y  $g \in G$ , tales que  $f(g) = [\sigma]$  y  $f'(g) = [\delta]$ . Luego  $P_{\alpha_*}(f(g)) = [P_\alpha \circ \sigma] = [\sigma_\alpha]$  y  $P_{\alpha_*}(f'(g)) = [P_\alpha \circ \delta] = [\delta_\alpha]$ , donde  $\sigma_\alpha, \delta_\alpha : (I, Fr(I)) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  son trayectorias cerradas. Dado que  $P_{\alpha_*} \circ f(g) = q_\alpha(g) = P_{\alpha_*} \circ f'(g)$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , entonces  $[\sigma_\alpha] = [\delta_\alpha]$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , es decir, existe una función continua  $H_\alpha : I \times I \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$  para cada  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tal que  $H_\alpha : \sigma_\alpha \simeq \delta_\alpha$  rel  $Fr(I)$ . Luego, existe una única función

continua  $H : I \times I \rightarrow \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & I \times I & \\ & \swarrow H & \downarrow H_\alpha \\ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha) & \xrightarrow{P_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha). \end{array}$$

Es decir,  $P_\alpha \circ H = H_\alpha$ , para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Es fácil ver que  $H : \sigma \simeq \delta$  rel  $Fr(I)$  (vea 1). Así,  $f(g) = [\sigma] = [\delta] = f'(g)$ . Por tanto  $f$  es única.

3) Sean  $g, h \in G$ . Supongamos que  $q_\alpha(g) = [\sigma_\alpha]$  y  $q_\alpha(h) = [\delta_\alpha]$ , luego  $q_\alpha(gh) = [\sigma_\alpha * \delta_\alpha]$ . Sea  $\{\sigma_\alpha * \delta_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  una familia de lazos basados en  $x_\alpha$ . Dado que  $P_\alpha \circ (\sigma * \delta) = P_\alpha \sigma * P_\alpha \delta = \sigma_\alpha * \delta_\alpha$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $\sigma * \delta$  es la única función que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ & \swarrow \sigma * \delta & \downarrow \sigma_\alpha * \delta_\alpha \\ \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha) & \xrightarrow{P_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha). \end{array}$$

Así,  $f(gh) = [\sigma * \delta] = [\sigma][\delta] = f(g)f(h)$ . Por tanto  $f$  es morfismo de grupos.

Con 1), 2) y 3) se tiene que  $\pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha)) \cong \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (\pi_1(X_\alpha, x_\alpha))$ .  $\square$

Notemos la importancia que tiene el haber aplicado conceptos de categorías en la demostración del Teorema 2.16, pues utilizando la propiedad universal del producto evitamos la difícil tarea de dar un isomorfismo explícito entre  $\pi_1(\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (X_\alpha, x_\alpha))$  y  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (\pi_1(X_\alpha, x_\alpha))$ .

El siguiente resultado se puede ver como un caso particular del Teorema 2.16, la razón por la cual exponemos su prueba es que en este caso mostramos como está definido el isomorfismo explícitamente.

**Teorema 2.17** *Si  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  son espacios punteados, entonces*

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**Demostración.** Sean  $p : (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (X, x_0)$  y  $q : (X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow (Y, y_0)$  las proyecciones naturales.

Sea  $f : I \rightarrow X \times Y$  una trayectoria cerrada en  $(x_0, y_0)$ . Tenemos que  $(p_*, q_*) :$

$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$  dado por  $(p_*, q_*)([f]) = (p_*[f], q_*[f]) = ([pf], [qf])$ , es un morfismo de grupos.

Mostremos que  $(p_*, q_*)$  es un isomorfismo dando su inversa. Sean  $g$  una trayectoria cerrada de  $X$  en  $x_0$  y  $h$  una trayectoria cerrada de  $Y$  en  $y_0$ . Definimos  $\theta : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  por  $\theta([g], [h]) = [(g, h)]$ , donde  $(g, h) : I \rightarrow X \times Y$  es definida por  $t \mapsto (g(t), h(t))$ ; es fácil verificar que la función está bien definida y que es la inversa de  $(p_*, q_*)$ . De aquí que  $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ .  $\square$

De aquí hasta el final de la sección, lo que presentamos es un compendio de propiedades importantes del grupo fundamental.

**Teorema 2.18** *Si  $X$  y  $Y$  son espacios conectables por trayectorias que tienen el mismo tipo de homotopía, entonces para cada  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$ , se tiene que*

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0).$$

**Demostración.** Sea  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una equivalencia homotópica (vea Definición 2.2). Es decir, existe  $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  tal que  $g \circ f \simeq 1_X$  y  $f \circ g \simeq 1_Y$ , entonces:

$$\begin{aligned}\pi_1(g \circ f) &= g_* \circ f_* \simeq 1_{\pi_1(X)} \\ \pi_1(f \circ g) &= f_* \circ g_* \simeq 1_{\pi_1(Y)}.\end{aligned}$$

Por tanto  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$ .  $\square$

Notemos la manera en como la definición de funtor simplifica la prueba del Teorema 2.18.

**Lema 2.3** *Si  $X = \{x_0\}$ , entonces  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ .*

**Demostración.** Claramente  $\{1\} \subseteq \pi_1(X, x_0)$ . Sea  $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ , observe que si  $f : I \rightarrow X$ , entonces  $f$  es la trayectoria constante en  $x_0$ . Luego  $[f] = [i_{x_0}] = 1$ . Por tanto  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ .  $\square$

El siguiente resultado se desprende del Teorema 2.18.



**Corolario 2.3** Si  $X$  es un espacio contraíble y  $x_0 \in X$ , entonces

$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}.$$

**Demostración.** Dado que  $X$  es contraíble, entonces  $X$  tiene el mismo tipo de homotopía que un punto  $Y = \{x_0\}$ . Así, por el Lema 2.3 se tiene que

$$\pi_1(Y, x_0) = \{1\},$$

Aplicando el Teorema 2.18 se tiene que  $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$ .  $\square$

**Definición 2.9** Un espacio  $X$  es llamado **simplemente conexo** si es conectable por trayectorias y  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$  para cada  $x_0 \in X$ .

### 2.3.1. Cálculo de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$

Hemos dado ejemplos de espacios topológicos que son simplemente conexos (espacios convexos, contraíbles, el espacio de un sólo elemento), es decir, con grupo fundamental trivial. Es natural preguntarnos si existe al menos un espacio topológico con grupo fundamental no trivial.

En esta sección nos encargamos de desarrollar los resultados suficientes para demostrar que la circunferencia es un espacio topológico con grupo fundamental no trivial. Más aún, su grupo fundamental es  $\mathbb{Z}$ .

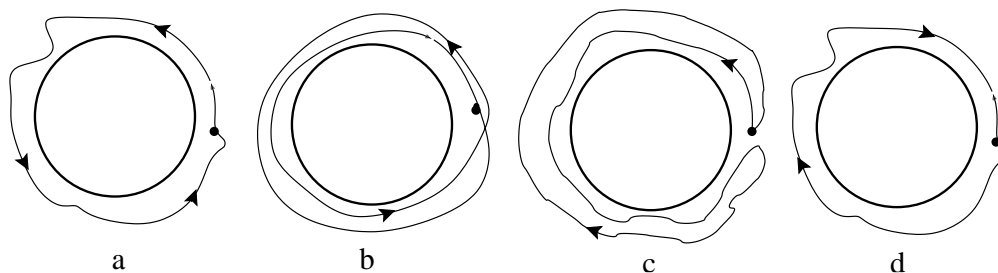


Figura 2.5: Ejemplos de lazos alrededor de  $\mathbb{S}^1$ .

Antes de iniciar el análisis vamos a tratar de intuir tal resultado. En la Figura 2.5 observamos que ninguno de los lazos son homotópicos. Una explicación posible es que en Figura 2.5a el lazo da una vuelta completa a  $\mathbb{S}^1$ ; en Figura 2.5b da dos vueltas; en Figura 2.5c no da vuelta alguna y por último en Figura 2.5d. da menos una vuelta, es decir, vuelta recorrida en sentido contrario.

Lo anterior sugiere que existen lazos alrededor de  $\mathbb{S}^1$  salvo homotopía, que están caracterizados por el número de vueltas que dan. Es decir, tenemos una biyección entre  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  y  $\mathbb{Z}$ , dado por  $[\alpha] \mapsto \#$  de vueltas de  $\alpha$ , donde  $\alpha : (I, Fr(I)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ . Podemos observar que si componemos un camino que da  $n$ -vueltas con otro que da  $m$ -vueltas alrededor de  $\mathbb{S}^1$  este es un nuevo lazo que da  $m + n$ -vueltas a  $\mathbb{S}^1$ . Lo anterior nos da pauta para considerar a  $\mathbb{Z}$  bajo la operación suma y demostrar que la biyección antes mencionada es un isomorfismo.

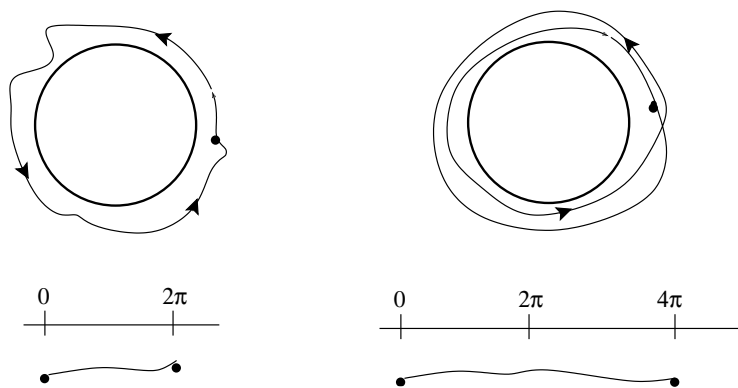


Figura 2.6:

El reto al cual nos enfrentamos es: definir de manera rigurosa el número de vueltas. Una manera muy sencilla de definir el número de vueltas es contar cuántas veces el lazo pasa por el punto base. Pero esto no funciona en general. Por ejemplo, vemos en Figura 2.5c que pasa dos veces por el punto base. Sin embargo, no da vuelta alguna. Entonces, hay que tener en cuenta la dirección en la que pasa por el punto base. La manera correcta es cortar el lazo por el punto base y desenrollarlo sobre  $\mathbb{R}$  como lo ilustra la Figura 2.6.

Con el siguiente lema probamos que todo lazo se puede desenrollar en  $\mathbb{R}$ .

Recordemos que  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  denota a una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$ .

**Lema 2.4** Sean  $X$  un subconjunto compacto y convexo de  $\mathbb{R}^k$  para algún  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  una función continua,  $t_0 \in \mathbb{Z}$ , y  $\exp(t)$  que denota  $e^{2\pi it}$ . Entonces existe una única función continua  $\tilde{f} : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}, t_0)$  con  $\exp \circ \tilde{f} = f$ . Además, se tiene que  $\exp(\tilde{f}(x_0)) = f(x_0) = 1$  y  $\tilde{f}(x_0) = t_0$  como lo muestra el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, t_0) & & \\ \tilde{f} \uparrow & \searrow \exp & \\ (X, x_0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{S}^1, 1). \end{array}$$

**Demostración.** Dado que  $X$  es métrico y compacto,  $f$  es uniformemente continua. Sea  $\epsilon > 0$  tal que siempre que  $\|x - x'\| < \epsilon$ , entonces  $\|f(x) - f(x')\| < 2$ , donde  $2 = \text{diam } \mathbb{S}^1$ . Esto garantiza que  $f(x)$  y  $f(x')$  no son antipodales, es decir,  $f(x)f(x') \neq -1$ .

El hecho de que  $X$  sea acotado implica la existencia de un entero positivo  $n$  con  $\|x - x_0\|/n < \epsilon$  para toda  $x \in X$ .

Para cada  $x \in X$  dividimos el segmento de línea  $\overline{x_0 x}$  (por convexidad este segmento está contenido en  $X$ ) en  $n$  segmentos de igual longitud generando puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n = x$  determinados de manera única. Como  $\|x_j - x_{j+1}\| = \|x - x_0\|/n < \epsilon$ , entonces  $f(x_j)^{-1}f(x_{j+1}) \neq -1$ . Para cada  $j$  con  $0 \leq j \leq n-1$ , la función  $g_j : X \rightarrow \mathbb{S}^1 - \{-1\}$  definida por

$$g_j(x) = f(x_j)^{-1}f(x_{j+1})$$

es continua, ya que si consideramos  $x_j = x_j(x) = x_0 + \frac{j}{n}(x - x_0)$ , entonces  $g_j(x)$  es una composición de funciones continuas. Note que  $g_j(x_0) = 1$  para todo  $j$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_n) = f(x_0)f(x_0)^{-1}f(x_1)f(x_1)^{-1} \dots f(x_{n-1})f(x_{n-1})^{-1}f(x_n) \\ &= f(x_0)[f(x_0)^{-1}f(x_1)][f(x_1)^{-1}f(x_2)] \dots [f(x_{n-1})^{-1}f(x_n)] \\ &= f(x_0)[g_0(x)g_1(x) \dots g_{n-1}(x)]. \end{aligned}$$

Sabemos que la restricción de  $\exp$  a  $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$  es un homeomorfismo de  $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$  a  $\mathbb{S}^1 - \{-1\}$ ; tomamos su inversa  $\lambda = ((1/2\pi i)\log)$  notemos que  $\lambda(1) = 0$ . En vista de que la im  $g_j \subset \mathbb{S}^1 - \{-1\}$  para todo  $j$  (donde im  $g_j$  denota la imagen de  $g_j$ ), entonces cada  $\lambda \circ g_j$  está definida y además es continua. Definimos  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tilde{f}(x) = t_0 + \lambda(g_0(x)) + \lambda(g_1(x)) + \dots + \lambda(g_{n-1}(x)).$$

Se tiene que  $\tilde{f}$  es continua dado que es la suma de funciones continuas. También  $\tilde{f}(x_0) = t_0$  pues  $g_j(x_0) = 1$  para todo  $j$ ,  $\lambda(1) = 0$  y además  $\exp \circ \tilde{f} = f$ . Para probar la unicidad de  $\tilde{f}$ , supongamos que  $\tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua con  $\exp \circ \tilde{g} = f$  y  $\tilde{g}(x_0) = t_0$ . Definimos  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)$ . Es claro que  $h$  es continua, más aún

$$\exp(h(x)) = \exp(\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)) = \exp(\tilde{f}(x))/\exp(\tilde{g}(x)) = 1,$$

pero  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  es un morfismo de grupos con kernel igual a  $\mathbb{Z}$ . Por lo tanto im  $h \subseteq \mathbb{Z}$  y dado que  $X$  es convexo en particular conexo se sigue que  $h$  es constante. Finalmente,  $h(x_0) = \tilde{f}(x_0) - \tilde{g}(x_0) = t_0 - t_0 = 0$ . Así,  $\tilde{f} = \tilde{g}$ . Por tanto, existe una única función continua  $\tilde{f}$ .  $\square$

Bajo las hipótesis del Lema 2.4, la función  $\tilde{f}$  se define como la **elevación de  $f$** .

**Teorema 2.19** *Sea  $f : (I, Fr(I)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  una función continua. Se tiene lo siguiente:*

**i)** *Existe una única función continua  $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\exp \circ \tilde{f} = f$  y  $\tilde{f}(0) = 0$ .*

ii) Si  $g : (I, Fr(I)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  es continua y  $f \simeq g$  rel  $Fr(I)$ , entonces  $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$  rel  $Fr(I)$ ; más aún  $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$ .

**Demostración.**

i) Se sigue del Lema 2.4 pues  $I$  es convexo y compacto.

ii) Observemos que  $I \times I$  es compacto y convexo. Elegimos  $(0, 0)$  como un punto base. Si  $F : (I \times I, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  es una homotopía relativa a  $Fr(I)$ , es decir,  $F : f \simeq g$  rel  $Fr(I)$ , entonces el Lema 2.4 garantiza una función continua única  $\tilde{F} : (I \times I, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^1, 0)$ , tal que  $\exp \circ \tilde{F} = F$  con  $F(0, 0) = 0$ , de aquí que  $\tilde{F}$  es la elevación de  $F$ .

Aseguramos que  $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$  rel  $Fr(I)$ . En efecto, si  $\varphi_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  es definida por  $\varphi_0(t) = \tilde{F}(t, 0)$ , entonces  $\exp(\varphi_0(t)) = \exp(\tilde{F}(t, 0)) = F(t, 0) = f(t)$ . Además  $\varphi_0(0) = \tilde{F}(0, 0) = 0$ , lo cual indica que  $\varphi_0$  es la elevación de  $f$ , es decir,  $\tilde{f} = \varphi_0$  por ser  $\tilde{f}$  única.

Sea  $\varphi_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi_1(t) = \tilde{F}(t, 1)$ . Así  $\exp(\varphi_1(t)) = F(t, 1) = g(t)$  y  $\varphi_1(0) = \tilde{F}(0, 1) = 0$ ; luego  $\varphi_1 = \tilde{g}$ .

Por otro lado, definimos  $\theta_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\theta_0(t) = \tilde{F}(0, t)$ . Así, por el Lema 2.4,  $\exp(\theta_0(t)) = \exp(\tilde{F}(0, t)) = F(0, t) = g(0) = f(0) = 1$  indica que  $\theta_0(t)$  es una constante; más aún,  $\theta_0(0) = \tilde{F}(0, 0) = 0$  y  $\theta_0(t) = \tilde{F}(0, t) = 0 = \tilde{g}(0) = \tilde{f}(0)$ .

Por último, definimos la función  $\theta_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\theta_1(t) = \tilde{F}(1, t)$ . Por el Lema 2.4, la cadena de igualdades  $\exp(\theta_1(t)) = \exp(\tilde{F}(1, t)) = F(1, t) = f(1) = g(1) = 1$ , indica que  $\theta_1$  es la función constante  $\tilde{f}(1)$ . Como  $\theta_1(t) = \tilde{F}(1, t) = \tilde{f}_1(1) = \tilde{g}(1)$ . Así,  $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$  rel  $Fr(I)$  y  $\tilde{f}_1(1) = \tilde{g}(1)$ .  $\square$

**Definición 2.10** Si  $f : (I, Fr(I)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  es una función continua, se define el **grado de  $f$**  por  $\deg f = \tilde{f}(1)$ , donde  $\tilde{f}$  es la única elevación de  $f$  con  $\tilde{f}(0) = 0$ .

**Observación 2.1** Notemos que  $\exp(\tilde{f}(1)) = f(1) = 1$ . Esto quiere decir que  $\tilde{f}(1) \in \ker \exp = \mathbb{Z}$ . Entonces,  $\deg f \in \mathbb{Z}$  para cada  $f : (I, Fr(I)) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$ .

También, si  $f(z) = z^m$ , es decir,  $f(t) = \exp(mt)$ , entonces  $\tilde{f}(t) = mt$ . Así,  $\tilde{f}(1) = m$ .

A continuación presentamos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.20** *La función  $d : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  dada por  $d([f]) = \deg f$  es un isomorfismo de grupos.*

**Demostración.** Sea  $[f] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . Si  $g \in [f]$ , por el Teorema 2.19ii) def  $f = \deg g$ , es decir, la función  $d$  está bien definida.

Sean  $f$  y  $g$  trayectorias cerradas de  $\mathbb{S}^1$  en 1, de grados  $m$  y  $n$ , respectivamente. Sea  $\tilde{g}$  la elevación de  $g$  y  $\tilde{f}$  la elevación de  $f$ . Definimos  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  una trayectoria en  $\mathbb{R}$  de  $m$  a  $m+n$  dada por  $\tilde{\gamma}(t) = m + \tilde{g}(t)$ . Luego  $\tilde{f} * \tilde{\gamma}$  es una trayectoria en  $\mathbb{R}$  con  $(\tilde{f} * \tilde{\gamma})(0) = \tilde{f}(0) = 0$  y  $(\tilde{f} * \tilde{\gamma})(1) = \tilde{\gamma}(1) = m+n$ . Más aún, se tiene que  $(\tilde{f} * \tilde{\gamma})$  es la elevación de  $f * g$  pues,

$$\exp(\tilde{f} * \tilde{\gamma}(t)) = \begin{cases} \exp(\tilde{f}(2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \exp(\tilde{\gamma}(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por tanto, como  $\exp(\tilde{f}(2t)) = f(2t)$  para  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  y  $\exp(\tilde{\gamma}(2t-1)) = \exp(m + \tilde{g}(2t-1)) = e^{2\pi im} g(2t-1) = g(2t-1)$ , para  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  se sigue que  $\exp \circ \tilde{f} * \tilde{\gamma} = f * g$ , de aquí que  $\tilde{f} * \tilde{\gamma}$  es la elevación de  $f * g$ . Por lo tanto,

$$\deg(f * g) = (\tilde{f} * \tilde{\gamma})(1) = m + n = \deg f + \deg g.$$

Sean  $[f], [g] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ . Entonces  $d([f][g]) = d([f * g]) = \deg f + \deg g = d([f]) + d([g])$ . Por tanto  $d$  es un morfismo de grupos.

Claramente  $d$  es sobreyectiva pues dada la Observación 2.1, para cada  $m \in \mathbb{Z}$ , la función  $f(z) = z^m$  tiene grado  $m$ .

Veamos ahora que  $\ker d$  es trivial. Si  $f$  es una trayectoria cerrada de  $\mathbb{S}^1$  en 1 tal que  $\deg f = \tilde{f}(1) = 0$ , entonces  $\tilde{f}$  es una trayectoria cerrada de  $\mathbb{R}$  en 0.

Por otro lado,  $\exp : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{S}^1, 1)$  induce un morfismo de grupos entre  $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$  y  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ , definido por  $[\tilde{f}] \mapsto [\exp \circ \tilde{f}] = [f]$ . Pero dado que  $\mathbb{R}$  es convexo, entonces

es contraíble ( $\pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{1\}$ ). De aquí que  $[f] = 1_{(\mathbb{S}^1, 1)}$ . Entonces  $\ker d$  es trivial. Por tanto  $d$  es inyectiva.

Con todo lo anterior  $d$  es un isomorfismo.  $\square$

Con el Teorema 2.20 confirmamos las sospechas que planteamos al inicio de esta sección, los únicos lazos distintos en la circunferencia, salvo homotopías, consisten en dar vueltas sobre  $\mathbb{S}^1$ .

**Corolario 2.4**  $\mathbb{S}^1$  no es simplemente conexo.

**Corolario 2.5** Dos trayectorias cerradas de  $\mathbb{S}^1$  en 1 son homotópicas rel  $Fr(I)$  si y sólo si tienen el mismo grado.

**Demostración.** Supongamos que  $f \simeq g$  rel  $Fr(I)$ . Entonces debemos probar que  $\deg f = \deg g$  lo cual se tiene al ser  $d$  bien definida. Recíprocamente, supongamos que  $\deg f = \deg g$ , entonces  $[f] = [g]$  pues  $d$  es inyectiva.  $\square$

## 2.4. Teorema de Seifert y Van Kampen

En las secciones anteriores hemos conseguido asignar a cada espacio topológico un grupo. Pero a la hora de determinar tal grupo parece ser una tarea no tan sencilla, como vimos en la Sección 2.3.1 cuando obtuvimos el grupo fundamental de un espacio topológico tan simple como la circunferencia  $\mathbb{S}^1$ . Además, el método que seguimos no parece ser fácil de generalizar. Nos podemos preguntar si existe alguna forma de determinar el grupo fundamental de cualquier espacio topológico, pero lo cierto es que no existe tal. Esto nos indica lo complicado que se hace la Teoría de Homotopía y el cálculo de los grupos fundamentales desde el comienzo. Lo que podemos hacer es determinar grupos fundamentales de espacios topológicos que tengan mucho que ver con la circunferencia o desarrollar alguna fórmula que

en algunos casos, determine el grupo fundamental de un espacio topológico en términos de los grupos fundamentales de porciones de él.

El teorema de Seifert y Van Kampen permite determinar el grupo fundamental de una unión de subespacios abiertos a partir de los grupos fundamentales de estos y de la forma cómo el grupo fundamental de la intersección se relaciona con los primeros.

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de Seifert y Van Kampen.

Antes de pasar a la fórmula general, y a manera de ejemplo analicemos primero un caso especial.

Consideremos el espacio topológico  $X$  formado por dos circunferencias  $A$  y  $B$  interseccionados en un sólo punto, digamos el punto base  $x_0$ . De los cálculos en la Sección 2.3.1 sabemos que  $\pi_1(A)$  es  $\mathbb{Z}$  generado por un lazo  $\mathbf{a}$  alrededor de  $A$ . Análogamente,  $\pi_1(B)$  es una copia de  $\mathbb{Z}$  generado por un lazo  $\mathbf{b}$  alrededor de  $B$ . Cada producto de potencias de  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  dan un elemento del grupo libre  $\pi_1(X) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ . Por ejemplo, el producto  $\mathbf{a}^5\mathbf{b}^2\mathbf{a}^{-3}$  es un lazo que da cinco vueltas alrededor de  $A$ , dos vueltas alrededor de  $B$  y tres vueltas en dirección opuesta alrededor de  $A$ . El conjunto de todas las palabras que consisten de potencias de  $\mathbf{a}$  alternadas de potencias de  $\mathbf{b}$  forman un grupo usualmente denotado por  $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ .

El siguiente resultado es un caso particular del teorema de Seifert y Van Kampen.

**Teorema 2.21** *Sea  $X = X_1 \cup X_2$ , con  $X_1, X_2$  abiertos. Si  $X_1$  y  $X_2$  son simplemente conexos y  $X_1 \cap X_2$  es conectable por trayectorias, entonces  $X$  es simplemente conexo.*

**Demostración.** Sea  $\lambda : I \rightarrow X$  un lazo basado en un punto  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . Puesto que  $\lambda$  es una función continua, tenemos que  $\{\lambda^{-1}(X_1), \lambda^{-1}(X_2)\}$  es una cubierta abierta de  $I$ . Entonces existe un número de Lebesgue  $\delta > 0$  para esta cubierta (vea [14], pág. 175), de tal manera que si  $0 \leq t - s \leq \delta$ , entonces  $[s, t] \subset \lambda^{-1}(X_1)$  o  $[s, t] \subset \lambda^{-1}(X_2)$ . Así se tiene una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  del intervalo



$I$ , tal que

$$\lambda([t_0, t_1]) \subset X_1, \lambda([t_1, t_2]) \subset X_2, \dots, \lambda([t_{k-1}, t_k]) \subset X_2. \quad (1)$$

Ya que  $\lambda(t_i) \in X_1 \cap X_2$ , y por ser  $X_1 \cap X_2$  conecatable por trayectorias, existen trayectorias  $\omega_i$  de  $x_0$  a  $\lambda(t_i)$  en  $X_1 \cap X_2$ , para  $i = 1, \dots, k - 1$ . Más aún, es claro que las trayectorias  $\omega_0$  y  $\omega_k$  son constantes en  $x_0 = \lambda(t_0) = \lambda(0) = \lambda(1) = \lambda(t_k)$ . La Figura 2.7 ilustra esta idea.

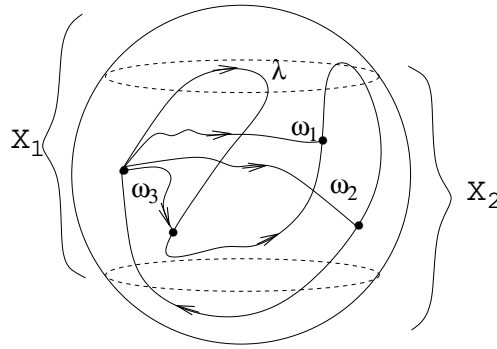


Figura 2.7:

$$\text{El lazo } \mu_i(t) = \begin{cases} \omega_{i-1}(3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \lambda_i(3t - 1) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \omega_i(3 - 3t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

donde  $\lambda_i(t) = \lambda((1-t)t_{i-1} + tt_i)$  es la porción de  $\lambda$  en el intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ . Dado que  $\omega_i$  son trayectorias en  $X_1 \cap X_2$ , entonces  $\lambda_i$  determina si  $\mu_i$  está en  $X_1$  o en  $X_2$  (por (1)). Por tanto  $\mu_i, i = 1, 2, \dots, k$ , son nulo homotópicas, es decir,  $\mu_i \simeq i_{x_0}$  rel  $Fr(I)$ , donde  $i_{x_0}$  es la trayectoria constante en  $x_0$ . Dado que  $\lambda \simeq \mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_k$  rel  $Fr(I)$ , se tiene que  $[\lambda] = [\mu_1][\mu_2] \dots [\mu_k] = [i_{x_0}]$ , entonces  $\lambda$  es nulo homotópica, pero dada la arbitrariedad de  $\lambda$ , tenemos que  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$ ; más aún,  $X$  es c.p.t. Por tanto  $X$  es simplemente conexo.  $\square$

El siguiente ejemplo es una aplicación importante del Teorema 2.21.

**Ejemplo 2.3** Sea  $n > 1$ . Entonces la  $n$ -esfera,  $\mathbb{S}^n$  es simplemente conexo, en particular la 2-esfera,  $\mathbb{S}^2$  es simplemente conexo.

En efecto, si  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y  $S = (0, \dots, 0, -1)$  son los polos de la esfera  $\mathbb{S}^n$  y  $X_1 = \mathbb{S}^n - S$ ,  $X_2 = \mathbb{S}^n - N$  se cumplen las hipótesis del Teorema 2.21 ya que  $X_1$  y  $X_2$  son contraíbles (vea [2], pág. 279) y  $X_1 \cap X_2$  es conectable por trayectorias, pues  $X_1 \cap X_2 \approx \mathbb{S}^{n-1}$ . Así,  $\mathbb{S}^n$  es simplemente conexo.

Estudiamos la teoría necesaria para demostrar y comprender de mejor manera el Teorema de Seifert y Van Kampen.

De aquí en adelante hasta el final de esta sección, vamos a tomar  $X = X_1 \cup X_2$  un espacio topológico, con  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  y  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ . Consideremos las inclusiones de espacios topológicos  $i_1, i_2, j_1, j_2$  como se muestran en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_1 \cap X_2 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \\ \downarrow i_2 & & \downarrow j_1 \\ X_2 & \xrightarrow{j_2} & X \end{array}$$

La funtorialidad de  $\pi_1$ , induce un diagrama conmutativo de morfismos de grupos, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, x_0) \\ \downarrow i_{2*} & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow{j_{2*}} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Diagrama 1

Luego, tenemos el siguiente hecho.

**Lema 2.5** Si  $X_1, X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son abiertos en  $X$  y conectables por trayectorias, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  está generado por las imágenes de  $\pi_1(X_1, x_0)$  y  $\pi_1(X_2, x_0)$  bajo  $j_{1*}$  y  $j_{2*}$ , respectivamente. Por lo tanto, el morfismo de grupos

$$\varphi : \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

inducido por  $j_{1*}$  y  $j_{2*}$  es un epimorfismo.

**Demostración.** La demostración de este resultado sigue, en esencia, los mismos pasos que la del Teorema 2.21. Sea  $[\lambda] \in \pi_1(X, x_0)$  un elemento arbitrario y  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  una partición de  $[0, 1]$ , tal que

$$\lambda([t_0, t_1]) \subset X_1, \lambda([t_1, t_2]) \subset X_2, \dots, \lambda([t_{k-1}, t_k]) \subset X_2.$$

Así,  $\lambda(t_i) \in X_1 \cap X_2$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Sean  $\lambda_i(t) = \lambda((1-t)t_{i-1} + tt_i)$  para cada  $i = 0, \dots, k$ , y  $\omega_i : I \rightarrow X$  para  $i = 1, \dots, k-1$  una trayectoria de  $x_0$  a  $\lambda(t_i)$  en  $X_1 \cap X_2$ ; más aún, sean  $\omega_0 = i_{x_0} = \omega_k$ . Tenemos de esta forma, para cada  $i = 0, \dots, k$ , el lazo

$$\mu_i(t) = \begin{cases} \omega_{i-1}(3t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ \lambda_i(3t-1) & \text{si } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ \omega_i(3-3t) & \text{si } \frac{2}{3} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que está en  $X_1$  o en  $X_2$  como se observó en la prueba del Teorema 2.21 y que, por tanto, representan elementos de  $\pi_1(X, x_0)$ , ya sea en la imagen de  $\pi_1(X_1, x_0)$  o de  $\pi_1(X_2, x_0)$ .

Por lo tanto,  $[\mu_1][\mu_2] \cdots [\mu_{k-1}][\mu_k] = [\lambda]$ , resulta ser un elemento arbitrario que está en el grupo generado por las imágenes de  $j_{1*}$  y  $j_{2*}$ .  $\square$

Sea  $g \in \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$ , con representación reducida  $g = [\sigma_1][\sigma_2][\sigma_3] \cdots [\sigma_n]$ . Es fácil ver que el morfismo  $\varphi$  del Lema 2.5 está dado por

$$\varphi(g) = j_{\nu_1*}([\sigma_1])j_{\nu_2*}([\sigma_2])j_{\nu_3*}([\sigma_3]) \cdots j_{\nu_n*}([\sigma_n]),$$

donde  $j_{\nu_i*} = j_{1*}$ , si  $[\sigma_i] \in \pi_1(X_1, x_0)$  o  $j_{\nu_i*} = j_{2*}$ , si  $[\sigma_i] \in \pi_1(X_2, x_0)$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

Bajo las hipótesis del Lema 2.5, si llamamos  $j_{1*} \cdot j_{2*}$  al epimorfismo  $\varphi$ . Se deduce que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / \ker(j_{1*} \cdot j_{2*}).$$

En lo que sigue hasta el final de la sección suponemos las hipótesis del Lema 2.5 y calculamos  $\ker(j_{1*} \cdot j_{2*})$ .

**Observación 2.2** Sea  $\alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ . Entonces, por el Diagrama 1  $j_{1*} \cdot j_{2*}(i_{1*}(\alpha)) = j_{1*}i_{1*}(\alpha) = j_{2*}i_{2*}(\alpha) = j_{1*} \cdot j_{2*}(i_{2*}(\alpha))$ , por lo que  $i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} \in \ker(j_{1*}j_{2*})$ . En consecuencia,  $\ker(j_{1*}j_{2*})$  contiene al subgrupo normal de  $\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$  generado por los elementos de la forma  $i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1}$ , para  $\alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ .

Veamos en adelante que ambos grupos coinciden. Para ello vamos a requerir de algunos resultados.

Antes de continuar y para facilitar el lenguaje, en lo que sigue hasta el final de esta sección, definimos  $G = \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$  y  $N \subset G$  es el subgrupo normal generado por los elementos de la forma  $i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1}$ , para  $\alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ .

Así mismo, si  $\lambda : I \rightarrow X$  es un lazo basado en  $x_0$  que está ya sea en  $X_\nu$  para  $\nu = 1, 2$  o en  $X_1 \cap X_2$ , identificamos  $[\lambda]$  por  $[\lambda]_\nu$  si  $[\lambda] \in \pi_1(X_\nu, x_0)$  o por  $[\lambda]_{12}$  si  $[\lambda] \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$ , a su clase de homotopía respectiva.

**Lema 2.6** Sea  $\lambda$  un lazo en  $X_1 \cap X_2$  basado en  $x_0$ , se tiene entonces que  $[\lambda]_1 N = [\lambda]_2 N \in G/N$ .

**Demostración.** Dado que  $\lambda$  yace en  $X_1 \cap X_2$ , por el Diagrama 1 tenemos que

$$\begin{aligned} j_{1*}(i_{1*}[\lambda]) &= j_{2*}(i_{2*}[\lambda]) \\ j_{1*}([i_1 \circ \lambda]) &= j_{2*}([i_2 \circ \lambda]) \\ j_{1*}([\lambda]_1) &= j_{2*}([\lambda]_2) \\ [\lambda]_1 &= [\lambda]_2 \end{aligned}$$

Así, las clases laterales  $[\lambda]_1 N$  y  $[\lambda]_2 N$  son iguales.  $\square$

Aclaremos que la siguiente observación está bajo las hipótesis del Lema 2.5.

**Observación 2.3** Sea  $\lambda : I \rightarrow X$  una trayectoria cerrada en  $x_0$  nulo homotópica, es decir, existe una función continua  $H : I \times I \rightarrow X$ , tal que  $H(s, 0) = \lambda(s)$  y  $H(0, t) = H(1, t) = H(s, 1) = x_0$ ,  $s, t \in I$ . Observemos la siguiente construcción.

- a) Se descompone el cuadrado  $I^2 = I \times I$  en una cuadrícula de subcuadrados. Como  $X_1$  y  $X_2$  son abiertos al tomar un número de Lebesgue para la cubierta abierta  $\{H^{-1}(X_1), H^{-1}(X_2)\}$  de  $I^2$  y la longitud del lado de cada subcuadrado  $Q$ , menor que, la mitad del número de Lebesgue, vea la Figura 2.8, se asegura que para cada subcuadrado  $Q$ ,  $H(Q) \subset X_1$  o  $H(Q) \subset X_2$ . A esta división de  $I^2$  la llamamos subdivisión de Lebesgue.

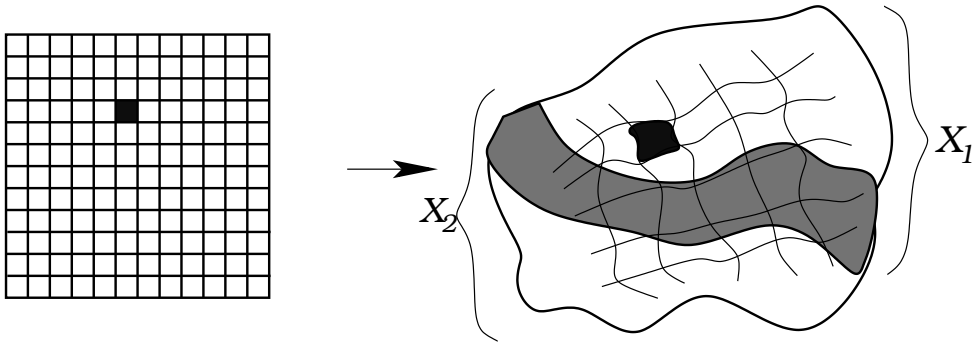


Figura 2.8:

- b) Para cada vértice  $v$  de la retícula, sea  $\mu_v : I \rightarrow X$  una trayectoria auxiliar de  $x_0$  a  $H(v)$  y sea  $\mu_v^{-1}$  la trayectoria inversa, de modo que si  $H(v)$  está, ya sea en  $X_\nu$  o en  $X_1 \cap X_2$ ,  $\nu = 1, 2$ , entonces  $\mu_v$  también está ahí. Esto es posible dado que  $X_1, X_2$  y  $X_1 \cap X_2$ , son conectables por trayectorias.
- c) Para cada arista  $a$  de la cuadrícula, al considerarla como trayectoria  $a : I \rightarrow I^2$  (en la dirección creciente),  $H \circ a : I \rightarrow X$  es una trayectoria de  $H(a(0))$  a  $H(a(1))$ , que, por **a**) está en  $X_1$  o en  $X_2$ . Por lo tanto,  $\lambda_a = \mu_{a(0)} * (H \circ a) * \mu_{a(1)}^{-1}$  es un lazo, que asimismo, está en  $X_1$  o en  $X_2$ . Esta construcción la ilustra la Figura 2.9. En consecuencia, los elementos  $[\lambda_a]_1$  o  $[\lambda_a]_2$  en  $G$  están definidos. Es decir, cada arista de la subdivisión de Lebesgue del cuadrado,  $I^2$ , determina un lazo en  $X$ . Denotemos por  $\hat{a} \in G/N$  a la clase lateral  $[\lambda_a]_1N$  o  $[\lambda_a]_2N$ . Por el Lema 2.6, si  $[\lambda_a]_1N$  y  $[\lambda_a]_2N$  están definidas, entonces  $[\lambda_a]_1N = [\lambda_a]_2N$ . Finalmente, sean  $a_1^0, \dots, a_n^0$  las aristas inferiores de la cuadrícula y  $a_1^n, \dots, a_n^n$  las aristas superiores como en la Figura 2.9.

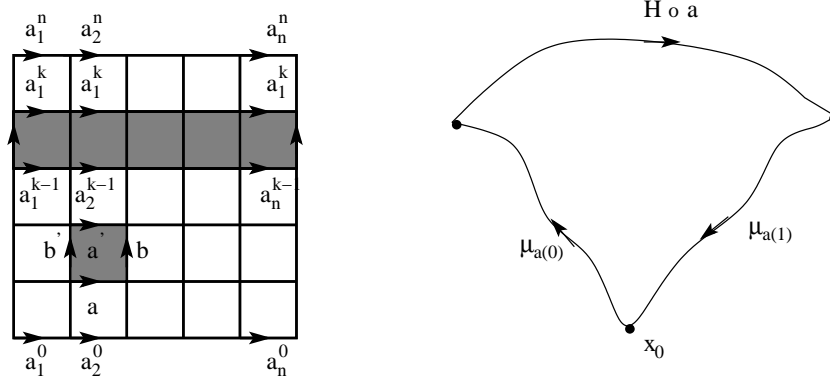


Figura 2.9:

Las hipótesis del lema siguiente están bajo el contexto de la Observación 2.3.

**Lema 2.7** *En  $G/N$  se tiene la igualdad  $\hat{a}_1^0 \dots \hat{a}_n^0 = 1$*

**Demostración.** Sea  $Q$  un subcuadrado fijo con aristas  $a, b, a', b'$ , vea Figura 2.9. En  $Q$  se tiene que  $ab \simeq b'a'$  rel  $Fr(I)$ , ya que  $Q$  es simplemente conexo. Si se aplica  $H$  ( $H$  es la homotopía definida en la Observación 2.3), y se conectan las trayectorias auxiliares correspondientes, se obtiene que  $\lambda_a \lambda_b \simeq \lambda_{b'} \lambda_{a'}$  rel  $Fr(I)$ , ya sea en  $X_1$  o en  $X_2$  según  $H(Q) \subset X_1$  o  $H(Q) \subset X_2$ . En cualquier caso,  $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}'\hat{a}'$  en  $G/N$ , es decir, para cualquier  $Q$  se tiene la igualdad  $\hat{a} = \hat{b}'\hat{a}'\hat{b}^{-1}$ .

Si ahora tomamos una hilera de subcuadrados, y multiplicamos las correspondientes igualdades, obtenemos

$$\hat{a}_1^{i-1} \dots \hat{a}_n^{i-1} = \hat{a}_1^i \dots \hat{a}_n^i,$$

pues los elementos  $\hat{b}_i^j$  correspondientes a las aristas intermedias se cancelan y  $\hat{b}_i^0 = 1 = \hat{b}_i^n$ , ya que la homotopía  $H$  es constante en los lados verticales de  $I^2$  ( $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ ). Inductivamente obtenemos la siguiente igualdad

$$\hat{a}_1^0 \dots \hat{a}_n^0 = \hat{a}_1^n \dots \hat{a}_n^n.$$

Pero dado que  $H$  es constante también en el lado superior de  $I^2$  ( $H(s, 1) = x_0$ ),  $\hat{a}_i^n = 1, i = 1, 2, \dots, n$ . Lo que prueba la igualdad deseada.  $\square$

Todo lo anterior fue desarrollado para poder probar el Teorema de Seifert y Van Kampen, es decir, para identificar  $\ker (j_{1*} \cdot j_{2*})$ .

**Teorema 2.22** (*Seifert-Van Kampen*) Sea  $X = X_1 \cup X_2$ , con  $X_1, X_2$  abiertos. Si  $X_1, X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son no vacíos y conectables por trayectorias, entonces

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) / N_{\{i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}},$$

para  $x_0 \in X_1 \cap X_2$ .

**Demostración.** En la terminología que se introdujó a lo largo de la sección, debemos probar que  $\ker (j_{1*} \cdot j_{2*})$  es  $N = N_{\{i_{1*}(\alpha)i_{2*}(\alpha)^{-1} \mid \alpha \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)\}}$ . Pero por la Observación 2.2 se tiene que  $N \subset \ker (j_{1*} \cdot j_{2*})$ . Vamos a demostrar que  $N \supset \ker (j_{1*} \cdot j_{2*})$

Sea  $\beta \in \ker (j_{1*} \cdot j_{2*})$ , es decir,  $(j_{1*} \cdot j_{2*})(\beta) = 1$ ; veremos que  $\beta \in N$ . Podemos escribir  $\beta = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \in G$ , donde  $\alpha_i \in \pi_1(X_1, x_0)$  o  $\alpha_i \in \pi_1(X_2, x_0)$ , aunque no requerimos que esta descomposición sea reducida. Sea  $\lambda_i$  un lazo en  $X_\nu$  que represente a  $\alpha_i$ ,  $\nu = 1$  o  $2$ . Ya que  $(j_{1*} \cdot j_{2*})(\beta) = 1$ ,  $[\lambda_1][\lambda_2] \cdots [\lambda_k] = 1$  en  $\pi_1(X, x_0)$ , donde las clases de homotopía se toman en  $X$ . Subdividimos  $I$  en  $k$  subintervalos de la misma longitud y tomamos el lazo  $\lambda : I \rightarrow X$ , que en el  $i$ -ésimo intervalo coincide con  $\lambda_i$  reparametrizando adecuadamente,  $i = 1, \dots, k$ . Dado que  $[\lambda] = [\lambda_1][\lambda_2] \cdots [\lambda_k] = 1$  significa que  $\lambda$  es una lazo contraíble; sea  $H : I^2 \rightarrow X$  una nulo homotopía para  $\lambda$ . Descomponemos  $I^2$  en subcuadrados, como en la Observación 2.3, de modo que cada uno de los  $k$  subintervalos de  $I$  sea la unión de algunas de las aristas  $a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0$ , lo cual es posible si se toma  $n$  como múltiplo suficientemente grande de  $k$ .

Si el primer intervalo en el que está definido  $\lambda_1$  es la unión de  $a_1^0, a_2^0, \dots, a_{i_1}^0$ , entonces  $\lambda_1 \simeq \lambda_{a_1^0} \lambda_{a_2^0} \cdots \lambda_{a_{i_1}^0}$  rel  $Fr(I)$  en  $X_1$  o en  $X_2$ , según  $\lambda_1$  se encuentre en  $X_1$  o en  $X_2$ . En cualquier caso, se tiene que  $\alpha_1 N = \hat{a}_1^0 \hat{a}_2^0 \cdots \hat{a}_{i_1}^0$  en  $G/N$ . Hay igualdades correspondientes para los  $k-1$  subintervalos restantes, las cuales, al multiplicarlas,

dan la igualdad  $\beta N = (\alpha_1 N)(\alpha_2 N) \cdots (\alpha_k N) = \hat{a}_1^0 \hat{a}_2^0 \cdots \hat{a}_n^0$  en  $G/N$ . Del Lema 2.7 se tiene que  $\beta N = N \in G/N$ , es decir,  $\beta \in N$ , como se deseaba probar.  $\square$

**Corolario 2.6** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.22, resulta que:*

a) *Si  $X_2$  es simplemente conexo, entonces*

$$j_{1*} : \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*es un epimorfismo y  $\ker j_{1*}$  es el normalizador del subgrupo*

$$i_{1*}(\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0));$$

b) *Si  $X_1 \cap X_2$  es simplemente conexo, entonces*

$$j_{1*} \cdot j_{2*} : \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*es un isomorfismo;*

c) *Si tanto  $X_2$  como  $X_1 \cap X_2$  son simplemente conexos, entonces*

$$j_{1*} : \pi_1(X_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*es un isomorfismo.*

Para la prueba vea [2], pág. 406.

## 2.5. Homotopía de dimensiones superiores

El análisis de los grupos de Homotopía de dimensiones superiores resulta ser bastante desconocido incluso para espacios topológicos muy sencillos. El propósito de esta sección es precisamente el estudio de algunos aspectos de estos.

El primero en estudiar estos grupos fue Hurewicz en los años 30's del siglo pasado cuando generalizó la idea de  $\pi_1(X, x_0)$  a  $\pi_n(X, x_0)$  vea [23], pág. 83.



Como se ha mencionado anteriormente, vamos a definir los grupos de homotopía de orden superior  $\pi_n(X, x_0)$  desde el punto de vista homotópico, y vamos a encontrar una manera recursiva de expresarlos. La estructura que seguimos para lograr nuestro objetivo es la siguiente: establecer la teoría necesaria para definir el espacio de lazos, posteriormente especificamos lo que es un  $H$ -grupo con el objetivo de demostrar que el espacio de lazos es un  $H$ -grupo, también definimos  $H$ -cogrupo y se introduce el concepto de suspensión. Más aún, vamos a ver que una suspensión es un  $H$ -cogrupo. Luego definimos el grupo de homotopía de dimensiones superiores de manera homotópica, y con la ayuda de algunos resultados topológicos podremos deducir de manera natural la forma recursiva buscada. Aprovechando la gama de resultados ya establecidos se deduce fácilmente que los grupos de homotopía de dimensiones superiores para  $n \geq 2$  son abelianos.

### 2.5.1. Espacio de lazos

Consideramos el conjunto  $M(X, Y)$  donde  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos, que consiste de todas las funciones continuas de  $X$  a  $Y$ . Este conjunto con la topología compacta abierta, forman un espacio topológico (vea [18], pág. 2).

**Teorema 2.23** (*Ley exponencial*) *Si  $X, Y$  y  $Z$  son espacios topológicos tales que  $X$  y  $Y$  son Hausdorff y  $Y$  localmente compacto, entonces*

$$\varphi : M(X \times Y, Z) \rightarrow M(X, M(Y, Z)),$$

*es un homeomorfismo, dado por  $\varphi(f)(x)(y) = f(x, y)$ .*

Para la prueba del Teorema 2.23 (vea [18], pág.5).

**Definición 2.11** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y  $B$  un subespacio de  $Y$ . Denotamos por  $\mathbf{M}(X, \mathbf{A}; Y, \mathbf{B})$  el subespacio de  $M(X, Y)$  que consiste de todas las funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  tales que  $f(A) \subset B$ .*

Notemos el parecido que existe entre  $Hom((X, A), (Y, B))$  en  $\mathbf{Top}^2$  (vea Ejemplo 1.1) y  $\mathbf{M}(X, \mathbf{A}; Y, \mathbf{B})$ . Se trata del mismo conjunto, pero se usa diferente notación ya que  $\mathbf{M}(X, \mathbf{A}; Y, \mathbf{B})$  es un espacio topológico con la topología compacta abierta.

**Definición 2.12** El subespacio  $M(\mathbf{X}, \mathbf{x}_0; \mathbf{Y}, \mathbf{y}_0)$ , se puede ver como un caso particular de  $M(X, A; Y, B)$ , el cual consiste de aquellas funciones continuas  $f : X \rightarrow Y$ , tales que  $f(x_0) = y_0$ , con  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$  siendo puntos específicos. Tales funciones son llamadas **funciones punteadas o funciones base**, denotadas por  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ , dado que ellas mandan un punto base  $x_0$  de  $X$  al punto base  $y_0$  de  $Y$ .

**Ejemplo 2.4** Sea  $I = [0, 1]$  y  $Fr(I) = \{0, 1\}$  su frontera. Consideremos entonces los espacios topológicos

$$M(I, Fr(I); X, x_0) \subset M(I, 0; X, x_0) \subset M(I, X)$$

para un espacio punteado  $(X, x_0)$ . Estos espacios son conocidos como los **espacios de trayectorias libres en  $X$** , los **espacios de trayectorias en  $X$  basados sobre  $x_0$** , y los **espacios de lazos en  $X$  basados en  $x_0$** , respectivamente. Usualmente denotamos  $M(I, Fr(I); X, x_0)$  por  $\Omega(X, x_0)$ .

**Definición 2.13** Consideremos  $(X, A), (Y, B) \in \text{Obj } \mathbf{Top}^2$ . Definimos su **producto** como el par

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y)).$$

Así  $(I, Fr(I)) \times (I, Fr(I)) = (I^2, Fr(I^2))$ , donde  $I^2$  es el cuadrado unitario en el plano y  $Fr(I^2)$  su frontera, el cual es homeomorfo al círculo  $\mathbb{S}^1$ .

Inductivamente se tiene,  $(I^n, Fr(I^n)) \times (I, Fr(I)) = (I^{n+1}, Fr(I^{n+1}))$ , donde  $I^{n+1}$  es el cubo unitario en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $Fr(I^{n+1})$ , es su frontera la cual es homeomorfa a la  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^n$ .

Por la ley exponencial la cual también se cumple para pares de espacios topológicos (vea [18], pág. 7). Tenemos que

$$\begin{aligned} M(I^{n+1}, Fr(I^{n+1}); X, x_0) &= M(I \times I^n, Fr(I) \times Fr(I^n); X, x_0) = \\ M((I, Fr(I)) \times (I^n, Fr(I^n)); X, x_0) &\approx M(I, Fr(I); M(I^n, Fr(I^n); X, x_0), \tilde{x}_0), \end{aligned}$$

donde  $\tilde{x}_0 \in M(I^n, Fr(I^n); X, x_0)$  es tal que  $\tilde{x}_0(Fr(I^n)) = x_0$ .

**Definición 2.14** Sea  $X$  espacio topológico punteado y  $x_0 \in X$  su punto base. El espacio  $M(I^n, Fr(I^n); X, x_0)$  se llama el **espacio de  $n$ -lazos de  $X$**  y se denota por

$$\Omega^n(X, x_0).$$

Si  $x_0$  es fijo en el contexto, entonces abusaremos de notación y escribimos  $\Omega^n(X)$ .

Dado que

$$\begin{aligned} \Omega^{n+1}(X, x_0) &= M(I^{n+1}, Fr(I^{n+1}); X, x_0) \\ &\approx M(I, Fr(I); M(I^n, Fr(I^n); X, x_0), \tilde{x}_0) \\ &= \Omega(M(I^n, Fr(I^n); X, x_0), \tilde{x}_0) \\ &= \Omega(\Omega^n(X, x_0), \tilde{x}_0). \end{aligned}$$

Entonces

$$\Omega(\Omega^n(X, x_0), \tilde{x}_0) \approx \Omega^{n+1}(X, x_0).$$

### 2.5.2. $H$ -espacio

De aquí en adelante hasta el final de la Sección 2.5 nos concentramos en el estudio de espacios topológicos punteados y funciones continuas punteadas.

Denotamos con  $M_*(X, Y)$  al conjunto de funciones continuas punteadas de  $X$  a  $Y$  bajo la topología compacta abierta.  $[X, Y]_*$  para el conjunto de clases de homotopía de las funciones continuas punteadas de  $X$  a  $Y$ ,  $[X, Y]_* = [X, x_0; Y, y_0]$ .

**Definición 2.15** Un espacio topológico  $W$  es un  **$H$ -espacio** si es un espacio topológico punteado y existe una función continua

$$\mu : W \times W \rightarrow W,$$

llamada la **H-multiplicación**, tal que  $\mu \circ (e, 1_W) \simeq \mu \circ (1_W, e) \simeq 1_W$ , donde  $e : W \rightarrow W$  es la función constante cuyo valor es el punto base  $w_0$ ,  $1_W$  es la identidad de  $W$  y  $\mu \circ (e, 1_W), \mu \circ (1_W, e)$  son como se muestra en el siguiente diagrama.

$$W \xrightarrow{(e, 1_W)} W \times W \xrightarrow{\mu} W, \quad W \xrightarrow{(1_W, e)} W \times W \xrightarrow{\mu} W.$$

Decimos que  $e$  es una **H-identidad**.

Por otro lado,  $W$  es **H-asociativo** si las composiciones  $\mu \circ (\mu \times 1_W), \mu \circ (1_W \times \mu) : W \times W \times W \rightarrow W$  son homotópicas, es decir, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} W \times W \times W & \xrightarrow{\mu \times 1_W} & W \times W \\ 1_W \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ W \times W & \xrightarrow{\mu} & W \end{array}$$

Una función  $j : W \rightarrow W$  es **H-inversa**, si las composiciones  $(1_W, j) \circ \mu, (j, 1_W) \circ \mu$  son nulo homotópicas a  $e : W \rightarrow W$ .

Podemos observar que las propiedades que acabamos de definir se parecen mucho a los axiomas de grupos. Cabe mencionar que sólo se cumplen bajo homotopía.

**Definición 2.16** Un espacio  $W$  que es  $H$ -espacio,  $H$ -asociativo dotado de una  $H$ -inversa es llamado **H-grupo**. Un  $H$ -espacio o un  $H$ -grupo  $W$ , es **H-abeliano** si las funciones  $\mu, \mu \circ T : W \times W \rightarrow W$ , son homotópicas, donde  $T : W \times W \rightarrow W \times W$  está definida por  $T(x, y) = (y, x)$ .

**Definición 2.17** Si  $W$  y  $W'$  son  $H$ -espacios y  $h : W \rightarrow W'$  es una función continua,  $h$  es un **H-homomorfismo** si las composiciones  $h \circ \mu, \mu' \circ h \times h$  son homotópicas, es decir, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xrightarrow{\mu} & W \\ h \times h \downarrow & & \downarrow h \\ W' \times W' & \xrightarrow{\mu'} & W' \end{array}$$

**Ejemplo 2.5** *Todo grupo topológico  $X$  es un  $H$ -espacio (vea [15], pág. 55); más aún, se puede ver que  $X$  es un  $H$ -grupo. Un ejemplo de  $H$ -homomorfismo es un homomorfismo de grupos topológicos (vea [17], pág. 112).*

Notemos que si  $(X, x_0)$  es un  $H$ -espacio, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es abeliano (vea [15], pág. 56). Más aún, del Ejemplo 2.5, si  $G$  es un grupo topológico, entonces  $\pi_1(G, e)$  es abeliano.

**Definición 2.18** *Sea  $W$  un espacio topológico punteado. Se dice que  $[X, W]_*$  tiene estructura natural de grupo en  $X$  si:*

- i) *Para cada espacio topológico punteado  $X$ ,  $[X, W]_*$  tiene estructura de grupo tal que la clase de la constante  $e : X \rightarrow W$ ,  $[e]$ , es la unidad del grupo, y si*
- ii) *Para cada función punteada  $f : X \rightarrow Y$ , donde  $Y$  es un espacio topológico punteado, la función inducida  $f^* : [Y, W]_* \rightarrow [X, W]_*$  definida por  $f^*([a]) = [a \circ f]$  es un morfismo de grupos.*

La multiplicación  $\mu$  de un  $H$ -espacio  $W$ , induce una multiplicación en  $M_*(X, W)$ . De hecho tenemos el siguiente resultado general.

**Teorema 2.24** *Sea  $W$  espacio topológico punteado. Para cada espacio topológico punteado  $X$ ,  $[X, W]_*$  tiene una estructura natural de grupo en  $X$  si y sólo si  $W$  es un  $H$ -grupo.*

**Demostración.** Supongamos que  $[X, W]_*$  tiene una estructura natural de grupo en  $X$ .

Sean  $p_1, p_2 : W \times W \rightarrow W$ , las proyecciones naturales,  $p_1$  sobre el primer factor y  $p_2$  sobre el segundo factor. Sea  $\mu : W \times W \rightarrow W$  la función que representa el producto  $[p_1][p_2]$  en la estructura de grupo en  $[W \times W, W]_*$ . Es fácil ver que  $\mu$  es una  $H$ -multiplicación que da a  $W$  la estructura de  $H$ -espacio. En efecto, sea

$(e, 1_W) : W \rightarrow W \times W$ , de la Definición 2.18ii)  $(e, 1_W)^* : [W \times W, W]_* \rightarrow [W, W]_*$  es un morfismo de grupos. Sea  $[\mu] \in [W \times W, W]_*$ , tenemos que

$$(e, 1_W)^*([\mu]) = [\mu \circ (e, 1_W)].$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (e, 1_W)^*([\mu]) &= (e, 1_W)^*([p_1][p_2]) = (e, 1_W)^*([p_1])(e, 1_W)^*([p_2]) \\ &= [p_1 \circ (e, 1_W)][p_2 \circ (e, 1_W)]. \end{aligned}$$

Notemos que  $p_1 \circ (e, 1_W)(w) = p_1(e_0, w) = w_0 = e(w)$  y  $p_2 \circ (e, 1_W)(w) = p_2(e_0, w) = w = 1_W(w)$ . Así,  $(e, 1_W)^*([\mu]) = [e][1_W] = [1_W]$ . Luego  $(e, 1_W)^*([\mu]) = [\mu \circ (e, 1_W)] = [1_W]$ . Por tanto,  $\mu \circ (e, 1_W) \simeq 1_W$ . Análogamente se puede demostrar  $\mu \circ (1_W, e) \simeq 1_W$  y que  $\mu$  da a  $W$  la estructura de  $H$ -espacio.

Por otro lado, existe una función  $j : W \rightarrow W$ , tal que  $[j] = [1_W]^{-1}$ . La función  $j$  es una  $H$ -inversa, luego  $W$  tiene una estructura de  $H$ -grupo. Vea [18], pág. 47.

Recíprocamente, si  $W$  es un  $H$ -grupo, veamos que  $[X, W]_*$  adquiere una estructura natural de grupo. Sean  $[f], [g] \in [X, W]_*$ , proponemos la siguiente operación  $[f][g] = [\mu \circ (f, g)]$ , donde  $\mu : W \times W \rightarrow W$  es la  $H$ -multiplicación. Probemos que esta operación está bien definida.

Sean  $H : f \simeq f' \text{ rel } \{x_0\}$  y  $G : g \simeq g' \text{ rel } \{x_0\}$ . Definimos  $K : X \times I \rightarrow W$ , por  $K(x, t) = \mu \circ (H, G)(x, t)$ . Esta función claramente es continua pues la composición de funciones continuas es continua. Más aún,

$$\begin{aligned} K(x, 0) &= \mu \circ (H, G)(x, 0) = \mu(H(x, 0), G(x, 0)) = \mu(f(x), g(x)) \\ &= \mu \circ (f, g)(x). \\ K(x, 1) &= \mu \circ (H, G)(x, 1) = \mu(H(x, 1), G(x, 1)) = \mu(f'(x), g'(x)) \\ &= \mu \circ (f', g')(x). \\ K(x_0, t) &= \mu \circ (H, G)(x_0, t) = \mu(H(x_0, t), G(x_0, t)) = \mu(f(x_0), g(x_0)) \\ &= \mu(f'(x_0), g'(x_0)) = \mu \circ (f, g)(x_0) = \mu \circ (f', g')(x_0). \end{aligned}$$

De aquí que  $K : \mu \circ (f, g) \simeq \mu \circ (f', g') \text{ rel } \{x_0\}$ . Por lo tanto,  $[f][g] = [\mu \circ (f, g)] = [\mu \circ (f', g')] = [f'][g']$ . Así, la operación está bien definida.

Sólo nos resta probar los axiomas de grupo.

Verifiquemos que la clase de la constante  $e : X \rightarrow W$  es la unidad del grupo  $[X, W]_*$ . Sea  $[f] \in [X, W]_*$  y dado que  $W$  es un  $H$ -espacio se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu \circ (1_W, e) &\simeq 1_W, \text{ entonces} \\ \mu \circ (1_W, e) \circ f &\simeq f \\ \mu \circ (f, e) &\simeq f,\end{aligned}$$

es decir,  $[f][e] = [\mu \circ (f, e)] = [f]$ , análogamente  $[e][f] = [f]$ .

Por otro lado, sea  $[f] \in [X, W]_*$ . Probemos la existencia del inverso. Sea  $j : W \rightarrow X$  la  $H$ -inversa. Aseguramos que el inverso de  $[f]$  es  $[j \circ f]$ . En efecto,

$$[f][j \circ f] = [\mu \circ (f, j \circ f)] = [\mu \circ (1_W, j) \circ f] = [e \circ f] = [e].$$

Para la asociatividad, en vista de que  $W$  es un  $H$ -grupo, entonces  $W$  es  $H$ -asociativo, es decir, para  $f, g, h : X \rightarrow W$  se tiene que

$$\begin{aligned}\mu \circ (\mu \times 1_W) &\simeq \mu \circ (1_W \times \mu) \\ \mu \circ (\mu \times 1_W) \circ ((f, g), h) &\simeq \mu \circ (1_W \times \mu) \circ (f, (g, h)) \\ \mu \circ (\mu \circ (f, g), h) &\simeq \mu \circ (f, \mu \circ (g, h))\end{aligned}$$

de aquí que  $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ .

Con todo, la condición **i)** de la Definición 2.18 está demostrada.

Probemos la condición **ii)** de la Definición 2.18. Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función punteada, donde  $Y$  es un espacio topológico punteado. Veamos que la función  $f^* : [Y, W]_* \rightarrow [X, W]_*$  es un morfismo de grupos. Sean  $[a], [b] \in [Y, W]_*$ , claramente  $f^*$  está bien definida. Además es un morfismo de grupos, pues

$$\begin{aligned}f^*([a][b]) &= f^*([\mu \circ (a, b)]) \\ &= [\mu \circ (a, b) \circ f] \\ &= [\mu \circ (a \circ f, b \circ f)] \\ &= [a \circ f][b \circ f] \\ &= f^*([a])f^*([b]).\end{aligned}$$

Así, la condición ii) de la Definición 2.18 está demostrada.

□

**Teorema 2.25** *Si  $h : W \rightarrow W'$  es un  $H$ -homomorfismo entre los  $H$ -grupos  $W$  y  $W'$ , entonces para cada espacio topológico punteado  $X$ ,  $h_* : [X, W]_* \rightarrow [X, W']_*$ , dada por  $h_*([a]) = [h \circ a]$  es un morfismo de grupos.*

**Demostración.** Sean  $[a], [b] \in [X, W]_*$ . La función  $h$  claramente está bien definida. Sean  $\mu$  y  $\mu'$  las  $H$ -multiplicaciones de  $W$  y  $W'$ , respectivamente. De la Definición 2.17, se tiene que  $\mu' \circ (h \times h) \simeq h \circ \mu$ . Entonces

$$\begin{aligned} h_*([a][b]) &= h_*([\mu \circ (a, b)]) \\ &= [h \circ \mu \circ (a, b)] \\ &= [(h \circ \mu) \circ (a, b)] \\ &= [\mu' \circ (h \times h) \circ (a, b)] \\ &= [\mu' \circ (h \circ a, h \circ b)] \\ &= [h \circ a][h \circ b] \\ &= h_*([a])h_*([b]). \end{aligned}$$

□

Un ejemplo fundamental de  $H$ -grupo es el espacio de lazos de un espacio topológico punteado.

**Observación 2.4** *Si  $Y$  es un espacio topológico punteado con punto base  $y_0$ , entonces su espacio de lazos  $\Omega Y$  tiene la estructura de un  $H$ -grupo. Sea  $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ , dada por*

$$\mu(\alpha, \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para lazos  $\alpha, \beta \in \Omega Y$ ,

Por el Lema 1.1  $\mu$  es continua. También es fácil demostrar (vea [18], pág. 48) que



- a)  $\mu$  es una  $H$ -multiplicación.
- b)  $\mu$  es  $H$ -asociativa.
- c) Si  $j : \Omega Y \rightarrow \Omega Y$  es tal que  $j(\alpha)(t) = \alpha(1 - t)$ , entonces  $j$  es  $H$ -inversa.

Como una consecuencia de la Observación 2.4 se obtiene el siguiente resultado.

**Teorema 2.26** Sean  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos punteados. Entonces se tiene lo siguiente:

- i)  $[X, \Omega Y]_*$  es un grupo.
- ii) Si  $f : X \rightarrow X'$  es continua, entonces

$$f^* : [X', \Omega Y]_* \rightarrow [X, \Omega Y]_*$$

es un morfismo de grupos, donde  $X'$  es un espacio topológico punteado.

- iii) Si  $g : Y \rightarrow Y'$  es una función punteada ( $g(y_0) = y'_0$ ), donde  $Y'$  es un espacio topológico punteado, entonces  $\Omega g : \Omega Y \rightarrow \Omega Y'$  definida por  $\Omega(g)(h) = g \circ h$ , es un  $H$ -homomorfismo, por lo tanto,

$$(\Omega g)_* : [X, \Omega W]_* \rightarrow [X, \Omega W']_*$$

es un morfismo de grupos.

**Demostración.**

- i) De la Observación 2.4 y del Teorema 2.24  $[X, \Omega Y]_*$  tiene estructura natural de grupo. En particular  $[X, \Omega Y]_*$  es un grupo.
- ii) Dado que  $[X, \Omega Y]_*$  tiene estructura natural de grupo, entonces el resultado se tiene de la condición ii) de la Definición 2.18.
- iii) Se puede ver que  $\Omega(g)$  es un  $H$ -homomorfismo. Del Teorema 2.25  $(\Omega g)_*$  es un morfismo de grupos. □

### 2.5.3. $H$ -Coespacio

El propósito de esta sección es considerar espacios topológicos punteados  $Q$ , de tal forma que  $[Q, Y]_*$  sea un grupo para un espacio topológico punteado arbitrario  $Y$ . Además, siempre que  $g : Y \rightarrow Y'$  sea continua para un espacio topológico punteado  $Y'$ , entonces  $g_* : [Q, Y]_* \rightarrow [Q, Y']_*$  sea un morfismo de grupos.

De la misma manera que la noción de producto topológico se necesita para definir un  $H$ -espacio, ahora necesitamos el dual del concepto de producto topológico pero en el caso punteado.

**Definición 2.19** Sean  $(X, x_0)$  y  $(Y, y_0)$  espacios topológicos punteados. Su **producto topológico**  $X \times Y$  es también un espacio topológico punteado con punto base  $(x_0, y_0)$ . Además, el **coproducto reducido** o la **suma cuña** de  $X$  y  $Y$  es considerado como un subespacio de  $X \times Y$ , y está definido por

$$X \vee Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = x_0 \text{ o } y = y_0\}.$$

Es decir,  $X \vee Y = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$ , como se observa en la Figura 2.10.

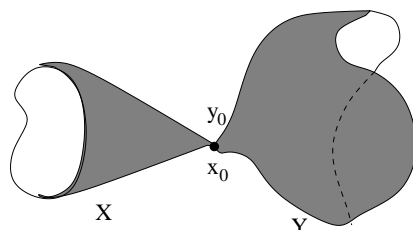


Figura 2.10:

Para funciones punteadas  $f : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$  y  $g : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  está definida una función punteada  $\langle f, g \rangle : X \vee Y \rightarrow Z$  por

$$\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } y = y_0, \\ g(y) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Por otro lado, si  $f : X \rightarrow X'$ ,  $g : Y \rightarrow Y'$  son funciones punteadas, éstas definen otra función punteada  $f \vee g : X \vee Y \rightarrow X' \vee Y'$ , dada por

$$(f \vee g)(x, y) = (f(x), g(y)).$$

Dado un número finito de espacios topológicos punteados  $X_1, \dots, X_k$ , su cuña es  $X_1 \vee \dots \vee X_k$  y puede ser visto como el subespacio

$$\{(x_1, \dots, x_k) \in X_1 \times \dots \times X_k \mid x_i \text{ es el punto base para al menos un } X_i\}.$$

**Definición 2.20** Un espacio topológico  $Q$  es un **H-coespacio** si es un espacio topológico punteado y existe una función continua

$$\nu : Q \rightarrow Q \vee Q,$$

llamada **H-comultiplicación**, tal que  $\langle 1_Q, e \rangle \circ \nu \simeq \langle e, 1_Q \rangle \circ \nu \simeq 1_Q$ , donde  $e : Q \rightarrow Q$  es la función constante cuyo valor es el punto base  $q_0$ ,  $1_Q$  es la identidad de  $Q$  y  $\langle 1_Q, e \rangle \circ \nu, \langle e, 1_Q \rangle \circ \nu$  son como se muestra en el siguiente diagrama.

$$Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{\langle 1_Q, e \rangle} Q, \quad Q \xrightarrow{\nu} Q \vee Q \xrightarrow{\langle e, 1_Q \rangle} Q$$

Decimos que  $e$  es una **H-coidentidad**.

Por otro lado,  $Q$  es **H-coasociativo**, si las composiciones  $(\nu \vee 1_Q) \circ \nu, (1_Q \vee \nu) \circ \nu : Q \rightarrow Q \vee Q \vee Q$ , son homotópicas, es decir, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\nu} & Q \vee Q \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \vee 1_Q \\ Q \vee Q & \xrightarrow{1_Q \vee \nu} & Q \vee Q \end{array}$$

Una función  $j : Q \rightarrow Q$  es una **H-coinversa**, si las composiciones  $\langle j, 1_Q \rangle \circ \nu$  y  $\langle 1_Q, j \rangle \circ \nu$  son nulo homotópicas a  $e : Q \rightarrow Q$ .

**Definición 2.21** Un espacio  $Q$  que es H-coespacio, H-coasociativo dotado de una H-coinversa es llamado **H-cogruppo**. Un H-coespacio, o un H-cogruppo  $Q$ , es **H-coabeliano**, si las funciones  $\nu, S \circ \nu : Q \rightarrow Q \vee Q$ , son homotópicas, donde  $S :$

$Q \vee Q \rightarrow Q \vee Q$  es la restricción de  $T : Q \times Q \rightarrow Q \times Q$  que está definida por  $T(x, y) = (y, x)$ .

**Definición 2.22** Si  $Q$  y  $Q'$  son  $H$ -coespacios y  $k : Q' \rightarrow Q$  es una función continua, decimos que  $k$  es un  **$H$ -cohomomorfismo** si las composiciones  $\nu \circ k$  y  $k \vee k \circ \nu'$  son homotópicas, es decir, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía.

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{k} & Q \\ \downarrow \nu' & & \downarrow \nu \\ Q' \vee Q' & \xrightarrow{k \vee k} & Q \vee Q \end{array}$$

**Definición 2.23** Sea  $Q$  un espacio topológico punteado. Decimos que  $[Q, Y]_*$  tiene estructura natural de grupo en  $Y$  si

- i) Para cada espacio topológico punteado  $Y$ ,  $[Q, Y]_*$  tiene estructura de grupo tal que la clase de la constante  $e : Q \rightarrow Y$ ,  $[e]$ , es la unidad del grupo, y si
- ii) Para cada función punteada  $f : Y \rightarrow X$ , donde  $X$  es un espacio topológico punteado, la función inducida  $f_* : [Q, Y]_* \rightarrow [Q, X]_*$  definida por  $f_*([a]) = [f \circ a]$  es un morfismo de grupos.

Notemos que la diferencia entre Definición 2.18i) y Definición 2.23i) es que  $[X, W]_*$  es grupo para todo  $X$  y  $[Q, Y]_*$  es grupo para todo  $Y$ , respectivamente. También es de resaltar que en Definición 2.18ii) los morfismos de grupos se componen por la derecha en clase y en Definición 2.23ii) se componen por la izquierda en clase.

**Teorema 2.27** Sea  $Q$  un espacio topológico punteado. Para cada espacio topológico punteado  $Y$ ,  $[Q, Y]_*$  tiene estructura natural de grupo en  $Y$  si y sólo si  $Q$  es un  $H$ -cogrupo.

**Demostración.**

Supongamos que  $[Q, Y]_*$  tiene una estructura natural de grupo en  $Y$ .

Sean  $i_1, i_2 : Q \rightarrow Q \vee Q$ , las inclusiones,  $i_1$  sobre el primer cofactor y  $i_2$  sobre el segundo cofactor. Sea  $\nu : Q \rightarrow Q \vee Q$  la función que representa el producto

$[i_1][i_2]$  según la estructura de grupo en  $[Q \vee Q, Q]_*$ . Es fácil ver que  $\nu$  es una  $H$ -comultiplicación que da a  $Q$  la estructura de  $H$ -coespacio. En efecto, sea  $\langle 1_Q, e \rangle : Q \vee Q \rightarrow Q$ , de la Definición 2.23ii);  $\langle 1_Q, e \rangle_* : [Q, Q \vee Q]_* \rightarrow [Q, Q]_*$  es un morfismo de grupos. Sea  $[\nu] \in [Q, Q \vee Q]_*$ , tenemos que

$$\langle 1_Q, e \rangle_*([\nu]) = [\nu \circ \langle 1_Q, e \rangle].$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \langle 1_Q, e \rangle_*([\nu]) &= \langle 1_Q, e \rangle_*([i_1][i_2]) = \langle 1_Q, e \rangle_*([i_1])\langle 1_Q, e \rangle_*([i_2]) \\ &= [\langle 1_Q, e \rangle \circ i_1][\langle 1_Q, e \rangle \circ i_2]. \end{aligned}$$

Notemos que  $\langle 1_Q, e \rangle \circ i_1(q) = \langle 1_Q, e \rangle(q, q_0) = 1_Q(q) = q$  y  $\langle 1_Q, e \rangle \circ i_2(q) = \langle 1_Q, e \rangle(q_0, q) = e(q) = q_0$ . Así,  $\langle 1_Q, e \rangle_*([\nu]) = [1_Q][e] = [1_Q]$ . Luego  $\langle 1_Q, e \rangle_*([\nu]) = [\nu \circ \langle 1_Q, e \rangle] = [1_Q]$ . Por tanto,  $\nu \circ \langle 1_Q, e \rangle \simeq 1_Q$ . Análogamente se puede demostrar  $\nu \circ \langle e, 1_Q \rangle \simeq 1_Q$  y que  $\nu$  da a  $Q$  la estructura de  $H$ -coespacio.

Por otro lado, existe una función  $j : Q \rightarrow Q$ , tal que  $[j] = [1_Q]^{-1}$ . La función  $j$  es una  $H$ -coinversa, luego  $Q$  tiene una estructura de  $H$ -cogruppo. Vea [18], pág. 53.

Recíprocamente, supongamos que  $Q$  es un  $H$ -cogruppo, entonces  $[Q, Y]_*$  adquiere una multiplicación dada por  $[f][g] = [\langle f, g \rangle \circ \nu]$ , donde  $[f], [g] \in [Q, Y]_*$  y  $\nu : Q \rightarrow Q \vee Q$  es la  $H$ -comultiplicación de  $Q$ . Es fácil probar que con esta operación  $[Q, Y]_*$  adquiere una estructura natural de grupo en  $Y$ , de hecho la prueba es análoga a la del Teorema 2.24.  $\square$

**Teorema 2.28** *Si  $k : Q' \rightarrow Q$  es un  $H$ -cohomomorfismo entre los  $H$ -cogruppos  $Q$  y  $Q'$ , entonces para cada espacio topológico punteado  $Y$ ,  $k^* : [Q, Y]_* \rightarrow [Q', Y]_*$  dado por  $k^*([a]) = [a \circ k]$  es un morfismo de grupos.*

**Demostración.** Se toman dos clases en  $[Q, Y]_*$  y se le aplica la definición de  $k^*$ , después se usa el hecho de que  $\nu \circ k$  y  $k \vee k \circ \nu'$  son homotópicas. La demostración es análoga paso por paso a la prueba del Teorema 2.25.  $\square$

El típico ejemplo de un  $H$ -cogruppo está dado por la suspensión reducida de un espacio topológico punteado.

**Definición 2.24** Si  $(X, x_0)$  es un espacio topológico punteado, definimos la **suspensión reducida**  $\Sigma X$  como el cociente

$$\Sigma X = X \times I / (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\{x_0\} \times I),$$

la cual es otra vez un espacio topológico punteado cuyo punto base es el que resulta de contraer  $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I$  a un punto. Al punto base de  $\Sigma X$  lo denotamos por  $\bar{x}_0$ .

En la Figura 2.11 se ve la suspensión reducida de un espacio topológico.

Denotemos por  $x \wedge t$  la clase de  $(x, t) \in X \times I$ , para  $t \in \{0, 1\}$  y  $x \neq x_0$ . Además, la clase de  $(x_0, t), (x, 0), (x, 1) \in X \times I$  para  $t \in (0, 1)$  y  $x \in X$  es denotada por  $\bar{x}_0 = x_0 \wedge t = x \wedge 0 = x \wedge 1$ .

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función punteada, entonces  $f \times 1_I$  (donde  $1_I$  es la identidad del intervalo  $[0, 1]$ ) induce una función punteada  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  la cual satisface que  $\Sigma f(x \wedge t) = f(x) \wedge t$ .

**Observación 2.5** Si  $X$  es un espacio punteado con punto base  $x_0$ , entonces su suspensión reducida  $\Sigma X$  tiene la estructura de  $H$ -cogruppo, como sigue. Sea  $\nu : \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ , dada por

$$\nu(x \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge 2t, \bar{x}_0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\bar{x}_0, x \wedge (2t - 1)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Por el Lema 1.1  $\nu$  es continua. Además,

a)  $\nu$  es una  $H$ -comultiplicación.

b)  $\nu$  es  $H$ -coasociativa.

c) Si  $j : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  es tal que  $j(x \wedge t) = x \wedge 1 - t$ , entonces  $j$  es  $H$ -coinverta.

En efecto, (sólo demostraremos **a**), las pruebas de los incisos restantes son análogas a las de la Observación 2.4 (vea [18], pág. 48)) sea  $e : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$  el mapeo constante cuyo valor es el punto base de  $\Sigma X$ ,  $\bar{x}_0$ . Tenemos que demostrar  $\langle 1_{\Sigma X}, e \rangle \circ \nu \simeq 1_{\Sigma X}$  y  $\langle e, 1_{\Sigma X} \rangle \circ \nu \simeq 1_{\Sigma X}$ .

Definimos  $F : \Sigma X \times I \rightarrow \Sigma X$ , por

$$F(x \wedge t, s) = \begin{cases} x \wedge \frac{2t}{1+s} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ \bar{x}_0 & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Aseguramos que  $F : \langle 1_{\Sigma X}, e \rangle \circ \nu \simeq 1_{\Sigma X}$ . En efecto,

$$F(x \wedge t, 0) = \begin{cases} x \wedge 2t & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{x}_0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

pero  $F(x \wedge t, 0) = \langle 1_{\Sigma X}, e \rangle \circ \nu(x \wedge t)$  y  $F(x \wedge t, 1) = x \wedge t = 1_{\Sigma X}(x \wedge t)$ , para  $0 \leq t \leq 1$ . La homotopía entre  $\langle e, 1_{\Sigma X} \rangle \circ \nu$  y  $1_{\Sigma X}$  se define de manera similar a  $F$ . De aquí que  $\nu$  es una comultiplicación. Por tanto  $\Sigma X$  es un  $H$ -coespacio.

La Figura 2.11 muestra el efecto de  $\nu$ .

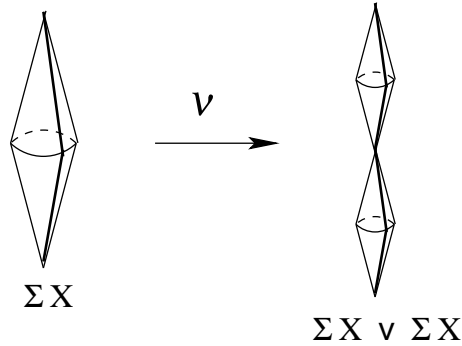


Figura 2.11:

De la Observación 2.5  $\Sigma X$  es un  $H$ -cogrupa.

**Teorema 2.29** *Para cada espacio topológico punteado  $X$ ,  $\Sigma X$  es un  $H$ -cogrupa. Entonces, para cada espacio topológico  $Y$ ,  $[\Sigma X, Y]_*$  es un grupo. Además si  $g : Y' \rightarrow Y$  es continua, entonces*

$$g_* : [\Sigma X, Y']_* \rightarrow [\Sigma X, Y]_*$$

*es un morfismo de grupos. Finalmente si  $f : X \rightarrow X'$  es una función punteada, entonces  $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma X'$  es un  $H$ -cohomomorfismo,*

$$(\Sigma f)^* : [\Sigma X', Y]_* \rightarrow [\Sigma X, Y]_*$$

*es un morfismo de grupos.*

**Demostración.**

De la Observación 2.5 y del Teorema 2.27,  $[\Sigma X, Y]_*$  tiene estructura natural de grupo. Por otro lado del Teorema 2.28  $(\Sigma f)^*$  es un morfismo de grupos.  $\square$

Los siguientes dos resultados son muy importantes pues en ellos nos basamos para expresar recursivamente los grupos de homotopía de dimensiones superiores.

**Teorema 2.30** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Existe un homeomorfismo*

$$M_*(\Sigma X, Y) \approx M_*(X, \Omega Y)$$

*tal que la biyección inducida*

$$[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$$

*es un isomorfismo de grupos.*

**Demostración.** Definimos las funciones  $\varphi : M_*(\Sigma X, Y) \rightarrow M_*(X, \Omega Y)$  y  $\psi : M_*(X, \Omega Y) \rightarrow M_*(\Sigma X, Y)$  por  $\varphi(g) = \hat{g}$  y  $\psi(f) = \tilde{f}$ , donde  $\hat{g}(x)(t) = g(x \wedge t)$  y  $\tilde{f}(x \wedge t) = f(x)(t)$ . Además, es claro que  $\varphi$  y  $\psi$  son continuas. Más aún,  $\varphi$  es la inversa de  $\psi$ , pues  $\varphi \circ \psi(f) = \varphi(\tilde{f}) = \hat{\tilde{f}}$ , pero  $\hat{\tilde{f}}(x)(t) = \tilde{f}(x \wedge t) = f(x)(t)$ ,



como  $f$  y  $\hat{f}$  tienen el mismo dominio y la misma imagen se tiene que  $f = \hat{f}$ , por tanto  $\varphi \circ \psi(f) = f$ . De manera similar se puede ver que  $\psi$  es la inversa de  $\varphi$ . Estas funciones inducen el homeomorfismo entre  $M_*(\Sigma X, Y)$  y  $M_*(X, \Omega Y)$ . A su vez este homeomorfismo establece una biyección de componentes por trayectorias, pues si definimos  $\Phi : [\Sigma X, Y]_* \rightarrow [X, \Omega Y]_*$ , por  $\Phi([g]) = [\hat{g}]$  y  $\Gamma : [X, \Omega Y]_* \rightarrow [\Sigma X, Y]_*$ , por  $\Gamma([f]) = [\tilde{f}]$ , es fácil ver que  $\Phi$  y  $\Gamma$  son morfismos de grupos; más aún,  $\Phi$  es el inverso de  $\Gamma$ . Por tanto  $[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$ .  $\square$

**Teorema 2.31** *Si  $n > 0$ , la  $n$ -esfera,  $\mathbb{S}^n$ , es la suspensión reducida de la  $(n-1)$ -esfera, es decir,  $\mathbb{S}^n \approx \Sigma \mathbb{S}^{n-1}$ .*

**Demostración.** Sea  $N = (1, 0, \dots, 0)$  el punto base de  $\mathbb{S}^n$ . Consideremos a  $\mathbb{R}^{n+1}$  encajado en  $\mathbb{R}^{n+2}$  como el conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^{n+2}$  cuya  $n+2$  coordenada es 0. Luego  $\mathbb{S}^n$  está contenida en  $\mathbb{S}^{n+1}$  como el ecuador, pues  $\mathbb{S}^n = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : \|z\| = 1 \text{ y } z_{n+2} = 0\}$ . Consideremos el siguiente conjunto  $E^{n+1} = \{z \in \mathbb{R}^{n+2} : \|z\| \leq 1 \text{ y } z_{n+2} = 0\}$  claramente  $E^{n+1}$  está contenido en  $E^{n+2}$ .

Sea  $H_+ = \{z \in \mathbb{S}^{n+1} : z_{n+2} \geq 0\}$  y  $H_- = \{z \in \mathbb{S}^{n+1} : z_{n+2} \leq 0\}$  los dos hemisferios cerrados de  $\mathbb{S}^{n+1}$  definidos por el ecuador  $\mathbb{S}^n$ . Entonces  $\mathbb{S}^{n+1} = H_+ \cup H_-$  y  $\mathbb{S}^n = H_+ \cap H_-$ . Más aún, la proyección  $p : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  induce las proyecciones  $p_+ : H_+ \rightarrow E^{n+1}$  y  $p_- : H_- \rightarrow E^{n+1}$ . Claramente  $p_+$  y  $p_-$  son homeomorfismos. Sea  $f : \Sigma \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  dada por

$$f(z \wedge t) = \begin{cases} p_-^{-1}(2tz + (1-2t)N) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p_+^{-1}((2-2t)z + (2t-1)N) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

se puede ver que  $f$  es el homeomorfismo buscado.  $\square$

**Definición 2.25** *Sea  $X$  un espacio topológico punteado. Definimos el  $n$ -ésimo grupo de homotopía de  $X$  como el conjunto de clases de homotopía de funciones punteadas de  $\mathbb{S}^n$  a  $X$  y es denotado por  $\pi_n(X) = [\mathbb{S}^n, X]_*$ .*

**Teorema 2.32** *Sea  $X$  un espacio topológico punteado. Entonces para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 1$  se tiene que  $\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega X)$ .*

**Demostración.** De los Teoremas 2.30 y 2.31 tenemos que para  $n \geq 1$

$$\pi_n(X) = [\mathbb{S}^n, X]_* \cong [\Sigma \mathbb{S}^{n-1}, X]_* \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X]_* = \pi_{n-1}(\Omega X).$$

□

Si consideramos la biyección  $[\Sigma^2 X, Y]_* \cong [\Sigma X, \Omega Y]_*$ , donde  $\Sigma^2(X)$  denota a  $\Sigma(\Sigma(X))$ , obtenemos dos estructuras de grupo en el conjunto de la derecha dado que  $\Sigma X$  da una estructura de grupo y  $\Omega Y$  da otra. Inspirado en este hecho observemos como el siguiente resultado de teoría de conjuntos tiene como consecuencia que  $\pi_n(X)$  es abeliano, para  $n \geq 2$ .

**Lema 2.8** *Sea  $G$  un conjunto dotado con dos multiplicaciones  $\bullet, *$  tal que*

- a)  $\bullet, *$  tienen una unidad bilateral común,  $e$ . Es decir, si  $e*x = x*e = x = e\bullet x = x\bullet e$ , para todo  $x \in G$ .
- b)  $\bullet, *$  son mutuamente distributivas, es decir, si  $(w*x)\bullet(y*z) = (w\bullet y)*(x\bullet z)$ , para  $x, y, w, z \in G$ .

*Entonces  $\bullet$  y  $*$  coinciden y ambas son conmutativas y asociativas.*

**Demostración.** Por a) y b) tenemos que

$$x*y = (x\bullet e)*(e\bullet y) = (x*e)\bullet(e*y) = x\bullet y,$$

luego  $*$  y  $\bullet$  coinciden. Más aún

$$x*y = (e\bullet x)*(y\bullet e) = (e*y)\bullet(x*e) = y\bullet x = y*x,$$

de aquí que la operación  $*$  es conmutativa. Finalmente

$$x*(y*z) = (x\bullet e)*(y\bullet z) = (x*y)\bullet(e*z) = (x*y)*z,$$

entonces la operación  $*$  es asociativa. Análogamente, se prueba la conmutatividad y asociatividad de  $\bullet$ .  $\square$

**Corolario 2.7** *Si  $Q$  es un  $H$ -cogruppo y  $W$  un  $H$ -grupo, entonces las dos estructuras multiplicativas inducidas en  $[Q, W]_*$  satisfacen las hipótesis del Lema 2.8.*

**Demostración.** De los Teoremas 2.24 y 2.27 tenemos las siguientes operaciones  $\bar{\nu} : [Q, W]_* \times [Q, W]_* \rightarrow [Q, W]_*$ ,  $\bar{\mu} : [Q, W]_* \times [Q, W]_* \rightarrow [Q, W]_*$ , donde  $\bar{\nu}([f], [g]) = \langle f, g \rangle \circ \nu$  y  $\bar{\mu}([f], [g]) = \mu \circ (f \times g)$ , para  $[f], [g] \in [Q, W]_*$ , donde  $\mu$  y  $\nu$  son la  $H$ -multiplicación y  $H$ -comultiplicación, respectivamente.

Sean  $[f], [g], [h], [k] \in [Q, W]_*$  y también sea  $[e] \in [Q, W]_*$  la unidad. Es claro que estas operaciones tienen en común la unidad bilateral, pues

$$\bar{\mu}([f], [e]) = \bar{\mu}([e], [f]) = [f] = \bar{\nu}([f], [e]) = \bar{\nu}([e], [f]).$$

Resta probar que estas operaciones son mutuamente distributivas. Partimos de la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \langle (f, g), (h, k) \rangle &= (\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle), \text{ entonces} \\ (\mu \circ \langle (f, g), (h, k) \rangle) \circ \nu &= \mu \circ ((\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle) \circ \nu) \end{aligned}$$

pero esto nos indica que:

$$\begin{aligned} \langle \mu \circ (f, g), \mu \circ (h, k) \rangle \circ \nu &= \mu \circ (\langle f, h \rangle \circ \nu, \langle g, k \rangle \circ \nu). \text{ Luego} \\ [\langle \mu \circ (f, g), \mu \circ (h, k) \rangle \circ \nu] &= [\mu \circ (\langle f, h \rangle \circ \nu, \langle g, k \rangle \circ \nu)]. \text{ De aquí que} \\ \bar{\nu}(\bar{\mu}([f], [g]), \bar{\mu}([h], [k])) &= \bar{\mu}(\bar{\nu}([f], [h]), \bar{\nu}([g], [k])) \end{aligned}$$

que era lo que queríamos demostrar. Por tanto  $[Q, W]_*$  cumple con las hipótesis del Lema 2.8, y es así como  $[Q, W]_*$  tiene estructura de grupo abeliano.  $\square$

**Teorema 2.33** *Si  $Q$  es un  $H$ -cogruppo y  $W$  es un  $H$ -grupo, entonces el conjunto  $[Q, W]_*$  tiene estructura de un grupo abeliano.*

**Demostración.** Del Corolario 2.7 y del Lema 2.8 se tiene que  $[Q, W]_*$  tiene estructura de un grupo abeliano.  $\square$

**Corolario 2.8** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Para  $n \geq 2$ , los grupos isomorfos

$$[\Sigma^n X, Y]_* \cong [X, \Omega^n Y]_*$$

son abelianos.

**Demostración.** Del Teorema 2.30 tenemos que  $[\Sigma X, Y]_* \cong [X, \Omega Y]_*$ . Además,

$$[\Sigma^n X, Y]_* = [\Sigma(\Sigma^{n-1} X), Y]_* \cong [\Sigma^{n-1} X, \Omega Y]_* = [\Sigma(\Sigma^{n-2} X), \Omega Y]_*$$

Sabemos que la suspensión reducida es un  $H$ -cogruppo y el espacio de lazos es un  $H$ -grupo. Luego, las hipótesis del Teorema 2.33 se satisfacen, así  $[\Sigma^n X, Y]_*$  es un grupo abeliano. Más aún, dado que  $[\Sigma^n X, Y]_*$  y  $[X, \Omega^n Y]_*$  son isomorfos, entonces  $[X, \Omega^n Y]_*$  es un grupo abeliano, para  $n \geq 2$ .  $\square$

Un caso en particular:

**Corolario 2.9** Sea  $X$  espacio topológico punteado. El  $n$ -ésimo grupo de homotopía,  $\pi_n(X)$ , es abeliano para  $n \geq 2$ .

**Demostración.** Por definición sabemos que

$$\pi_n(X) = [\mathbb{S}^n, X]_* \cong [\Sigma \mathbb{S}^{n-1}, X]_* \cong [\mathbb{S}^{n-1}, \Omega X]_* \cong [\Sigma \mathbb{S}^{n-2}, \Omega X]_* \cong [\mathbb{S}^{n-2}, \Omega^2 X]_*.$$

Del Corolario 2.8 se tiene el resultado.  $\square$

Con esto hemos demostrado que los grupos  $\pi_n(X)$  para  $n \geq 2$  son abelianos.

Antes de terminar la sección es importante mencionar que al igual que en el caso de  $\pi_1$ , se tiene que  $\pi_n$  es un funtor para  $n \geq 2$ . Vea [1], pág. 340.

## Capítulo 3

# Grupos de Homología Singular

En la Topología Algebraica existen diferentes teorías de homología. Entre las más conocidas se encuentran la homología: singular, simplicial y celular. En esta tesis sólo vamos a estudiar la homología singular, la razón es que la homología singular está definida sobre toda la categoría  $\mathbf{Top}^1$ . Otra ventaja importante que esta teoría nos ofrece, es la de establecer un funtor que relaciona la categoría  $\mathbf{Top}^1$  con la categoría  $\mathbf{Ab}$ .

El objetivo de este capítulo es exponer todos los resultados necesarios de la teoría de homología singular para poder desarrollar algunas de las aplicaciones presentadas en el Capítulo 4.

### 3.1. Complejos singulares y el funtor de homología singular

Si trazamos una curva cerrada sobre la superficie de una esfera, esta es la frontera común de dos porciones disjuntas de ella, vea la Figura 3.1a). Podemos hacer algo análogo a la superficie del toro: si denotamos por  $\alpha$  a un generador del grupo fundamental del toro, la curva  $\alpha$  **no** divide al toro en dos partes disjuntas, vea la Figura 3.1b). La posibilidad de trazar una curva sobre una superficie sin que la divida en dos partes disjuntas es una propiedad topológica invariante, en el sigui-

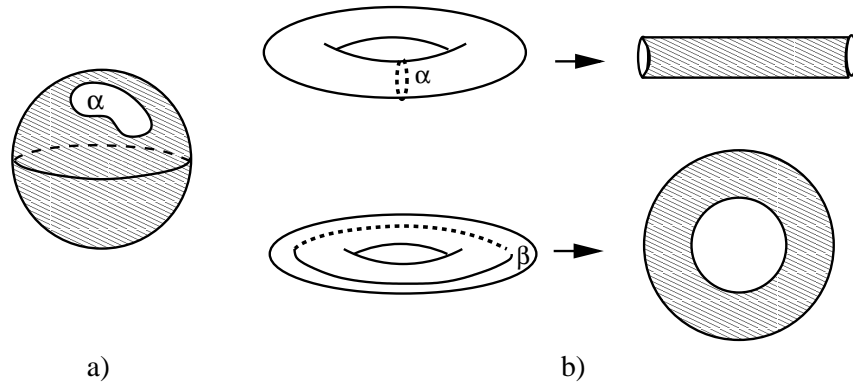


Figura 3.1: Ejemplo de invariante topológico.

ente sentido. Si  $S$  es una superficie,  $\sigma$  una curva cerrada sobre  $S$ ,  $S'$  una superficie homeomorfa a  $S$  y  $\sigma'$  la curva que mediante el homeomorfismo corresponde a  $\sigma$  sobre  $S'$ , entonces  $\sigma$  divide a  $S$  en dos partes disjuntas, si y sólo si  $\sigma'$  hace lo propio sobre  $S'$ . Entonces esta propiedad topológica invariante es una manera de distinguir dos superficies distintas.

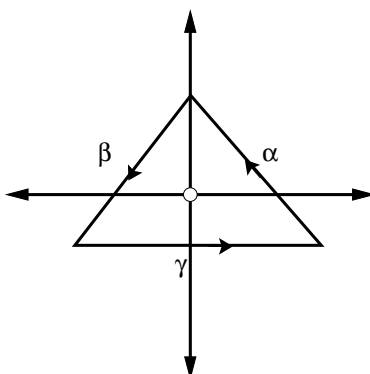
Generalicemos la idea para superficies, expuesta en el párrafo anterior, a otros espacios topológicos. En lugar de considerar, cuándo ciertas curvas son frontera o no, podemos tomar “agujeros” de dimensiones arbitrarias (nos referimos a la dimensión del agujero como la dimensión de la frontera que lo envuelve) en el espacio topológico  $X$  y ver si son o no frontera de algún subespacio de  $X$ .

Ilustremos esto con el siguiente ejemplo:

Sea  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ , y sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  los 1-simplejos (vea Definición 3.1), como se ilustra en la Figura 3.2. Observemos que es imposible envolver el agujero de  $X$  con un 2-simplejo, pero sí con  $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ , de aquí que  $X$  tiene un agujero unidimensional.

La homología singular es un modo de contar agujeros de cualquier dimensión en un espacio topológico, y en ese sentido, es una medida de complejidad de dicho espacio.

En esta sección, vamos a construir los funtores de homología  $H_n : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Ab}$

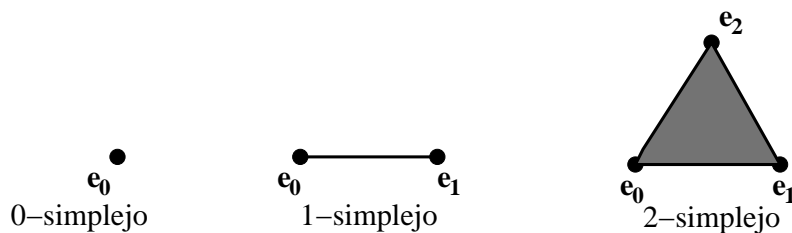
Figura 3.2:  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

para cada  $n \geq 0$ . También mostramos que para un espacio topológico  $X$ ,  $H_0(X)$  da exactamente la misma información que  $\pi_0(X)$ . Después enunciamos el teorema de invarianza por homotopía. Finalmente vamos a establecer el teorema de Hurewicz, que relaciona el grupo  $H_1(X)$  con  $\pi_1(X, x_0)$ .

### Definición 3.1

El conjunto  $\Delta^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n+1\}$ , le llamamos el ***n-simplejo estándar***.

Sea  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ . El mínimo conjunto convexo que contiene a  $e_0, \dots, e_n$  es denotado por  $[e_0, e_1, \dots, e_n]$ .

Figura 3.3: Ejemplos de  $n$ -simplejos estándar.

**Observación 3.1** *Entre las propiedades topológicas más interesantes de los  $n$ -simplejos  $\Delta^n$  están las siguientes:*

- a)  $\Delta^n$  es convexo cerrado y acotado. Más aún,  $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ . (Vea [9], pág. 19.)
- b)  $\Delta^n \approx D^n$ . Más adelante para efectos de cálculo identificaremos el intervalo  $I=[0,1]$  con  $\Delta^1 = [e_0, e_1]$ , pues existe una biyección bicontinua entre  $I$  y  $\Delta^1$ . (Vea [9], pág. 22.)

**Definición 3.2** *Sea  $X$  un espacio topológico. Un  $n$ -simplejo singular en  $X$  es una función continua  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ , donde  $\Delta^n$  es el  $n$ -simplejo estándar.*

Al  $n$ -simplejo singular, sólo se le llama  $n$ -simplejo.

**Observación 3.2** *Dado que  $\Delta^1 \approx I$  (donde  $I$  es el intervalo  $[0,1]$ ) un 1-simplejo se identifica como una trayectoria en  $X$ . Análogamente dado que  $\Delta^0 = \{e_0\}$ , a un 0-simplejo se le identifica con un punto en  $X$ .*

**Definición 3.3** *Sea  $X$  un espacio topológico. Para cada  $n \geq 0$ , definimos  $S_n(X)$  como el grupo abeliano libre generado por los  $n$ -simplejos, es decir,*

$$S_n(X) = \langle \sigma : \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ es continua} \rangle,$$

donde la base de  $S_n(X)$  son los  $n$ -simplejos. Definimos  $S_{-1}(X) = 0$ . Los elementos de  $S_n(X)$  son llamados  **$n$ -cadenas en  $X$** .

**Observación 3.3** *En la Observación 3.2 los 1-simplejos se identifican con trayectorias en  $X$ , entonces redefinimos  $S_1(X)$  como el grupo abeliano libre con base todas las trayectorias  $\sigma : I \rightarrow X$ . De manera similar los 0-simplejos se identifican con puntos en  $X$ , entonces  $S_0(X)$  es el grupo abeliano libre con base  $X$ . Más aún, definimos  $\partial_1 : S_1(X) \rightarrow S_0(X)$ , dado por  $\partial_1\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$ , para cada trayectoria  $\sigma$  en  $X$ .*



Una función  $T : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  para algún  $k \geq 1$  y  $n \geq 0$  se llama afín si satisface

$$T\left(\sum t_j p_j\right) = \sum t_j T(p_j)$$

siempre que la  $\sum t_j = 1$ . Observemos que para definir una función afín  $T$ , basta mostrar la acción de  $T$  sobre  $p_j$ .

**Definición 3.4** La *i-ésima cara*  $\xi_i^n : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  es una función afín, donde la acción sobre los vértices de  $\Delta^{n-1}$  está dada por

$$\xi_i^n(e_j) = \begin{cases} e_j & \text{si } j < i \\ e_{j+1} & \text{si } j \geq i. \end{cases}$$

El superíndice  $n$  indica que la imagen de  $\xi_i^n$  está en  $\Delta^n$ , para  $i = 0, \dots, n$ , y  $j = 0, \dots, n - 1$ .

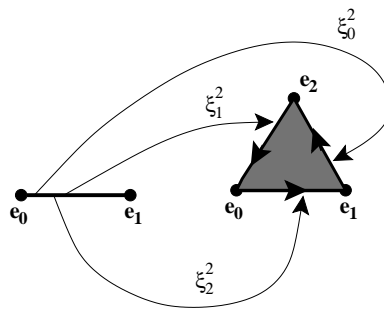


Figura 3.4: Caras.

**Ejemplo 3.1** Sea  $\xi_i^2 : \Delta^1 \rightarrow \Delta^2$ , para  $i = 0, 1, 2$ . En la Figura 3.4, se ilustra como actúa  $\xi_i^2$ , en  $\Delta^1 = [e_0, e_1]$ .

Una orientación de  $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ , es un orden lineal de sus vértices.

Por ejemplo, la orientación  $e_0 < e_1 < e_2$  de  $\Delta^2$  da un recorrido en contra de las manecillas del reloj. Es claro que dos orientaciones diferentes pueden dar el mismo recorrido. Observemos que  $e_0 < e_1 < e_2$ ,  $e_2 < e_0 < e_1$  y  $e_1 < e_2 < e_0$  son orientaciones que dan un recorrido en contra de las manecillas del reloj, mientras que otra

orientación diferente a las anteriores da un recorrido a favor de las manecillas del reloj, por ejemplo  $e_1 < e_2 < e_0$ .

Hasta aquí sólo hemos considerado caras no orientadas, pero dada una orientación de  $\Delta^n$ , existe una orientación inducida en sus caras. Tal orientación se define al orientar la  $i$ -ésima cara de la forma  $(-1)^i[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ , donde  $-[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$  denota la  $i$ -ésima cara sin el vértice  $i$  con orientación opuesta a  $[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ .

Retomando el Ejemplo 3.1 pero ahora considerando a  $\Delta^2$  con una orientación en contra de las manecillas del reloj, la 0-cara de  $\Delta^2$ ,  $\xi_0^2$  es  $[e_1, e_2]$ , y su orientación es de  $e_1$  a  $e_2$ , la 1-cara,  $\xi_1^2$  es  $[e_0, e_2]$ , en la dirección opuesta, es decir,  $-[e_0, e_2] = [e_2, e_0]$  que está orientada de  $e_2$  a  $e_0$ ; la 2-cara,  $\xi_2^2$  es  $[e_0, e_1]$  y su orientación es de  $e_0$  a  $e_1$ . La anterior orientación en sentido contrario a las manecillas del reloj ratifica que la orientación de  $\Delta^2$  definida en el párrafo anterior es compatible con la orientación de sus caras.

La frontera de  $\Delta^2$  es  $[e_1, e_2] \cup [e_0, e_2] \cup [e_0, e_1]$ , y la frontera orientada de  $\Delta^2$  es  $[e_1, e_2] \cup [e_2, e_0] \cup [e_0, e_1]$ . De manera general la frontera de  $\Delta^n = [e_0, \dots, e_n]$  es  $\bigcup_{i=0}^n [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$  y la frontera orientada es  $\bigcup_{i=0}^n (-1)^i [e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]$ .

Podemos tomar cada cara orientada de  $\Delta^2$  como trayectorias de  $e_1$  a  $e_2$ ,  $e_2$  a  $e_0$  y de  $e_0$  a  $e_1$ , respectivamente y dada la Observación 3.3 aplicar el morfismo de grupos  $\partial_1$  como sigue:

$$\partial_1(\xi_0^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2) = (e_2 - e_1) - (e_2 - e_0) + (e_1 - e_0) = 0,$$

es decir,  $\xi_0^2 - \xi_1^2 + \xi_2^2 \in \ker \partial_1$ . Por otro lado  $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 \notin \ker \partial_1$ , he aquí donde radica la importancia de la orientación de un  $n$ -simplejo.

La suma de las caras puede interpretarse como la suma algebraica de los bordes de  $\Delta^2$ , con los signos elegidos de modo que se empieza por  $e_0$  y se viaja alrededor de un lazo hasta volver a llegar a  $e_0$ . Observemos que en realidad no se trata de un lazo, sino de una suma formal con signo (dada la estructura de grupo  $S_1(\Delta^2)$ ) de tres caminos. La siguiente definición resume lo que acabamos de discutir.

**Definición 3.5** Si  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  es continua y  $n > 0$ . La **frontera de  $\sigma$** , denotada por  $\partial_n \sigma$  es

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \xi_i^n \in S_{n-1}(X).$$

Si  $n=0$ , definimos  $\partial_0 \sigma = 0$ .

Observemos que si  $X = \Delta^n$  y  $\delta : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  es la identidad, entonces  $\partial_n(\delta) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \xi_i^n$ .

Es importante mencionar que para cada  $n \geq 0$ , existe un único morfismo de grupos  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ , donde

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \xi_i^n, \text{ para cada } n\text{-simplejo singular } \sigma \text{ en } X.$$

En efecto, para la existencia de  $\partial_n$  sólo basta extender por linealidad. Ahora bien, supongamos que  $\partial_n$  y  $\partial'_n$  son morfismos de  $S_n(X)$  a  $S_{n-1}(X)$  para  $n \geq 0$ , tal que  $\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \xi_i^n = \partial'_n \sigma$ .

Sea  $\sum m_\lambda \sigma_\lambda \in S_n(X)$ , entonces

$$\begin{aligned} \partial'_n(\sum m_\lambda \sigma_\lambda) &= \sum m_\lambda \partial'_n \sigma_\lambda \\ &= \sum m_\lambda \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\lambda \xi_i^n \\ &= \sum m_\lambda \partial_n \sigma_\lambda \\ &= \partial_n(\sum m_\lambda \sigma_\lambda). \end{aligned}$$

Dado que  $\partial_n$  y  $\partial'_n$  tienen las mismas imágenes y dominio, tenemos que  $\partial_n = \partial'_n$ . De aquí que  $\partial_n$  es único.

Los morfismos de grupos  $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  son llamados **operadores de frontera**.

Una sucesión de grupos abelianos libres generados con sus respectivos operadores de frontera, es el **complejo singular de X** y es denotado por  $(S_*(X), \partial)$  o simplemente  $S_*(X)$  y lo representamos con el siguiente diagrama

$$S_*(X) : \cdots \longrightarrow S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

El siguiente lema nos da cierta conmutatividad en la composición de caras.

**Lema 3.1** *Si  $k < j$  las caras satisfacen*

$$\xi_j^{n+1}\xi_k^n = \xi_k^{n+1}\xi_{j-1}^n : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^{n+1}.$$

**Demostración.** La prueba se desarrolla por casos sobre los vértices  $e_i$  para  $0 \leq i \leq n-1$ . En todos los casos se recurre a la Definición 3.4.

**Caso I** ( $k < j < i$ ). Dado que  $j < i < i+1$  y  $j-1 < i$ , se tiene

$$\begin{aligned}\xi_j^{n+1}\xi_k^n(e_i) &= \xi_j^{n+1}(e_{i+1}) = e_{i+2}, \\ \xi_k^{n+1}\xi_{j-1}^n(e_i) &= \xi_k^{n+1}(e_{i+1}) = e_{i+2}.\end{aligned}$$

**Caso II** ( $i = j$ ). Sólo basta observar que  $k < j = i$  y  $j-1 < j = i$ .

$$\begin{aligned}\xi_j^{n+1}\xi_k^n(e_i) &= \xi_j^{n+1}(e_{i+1}) = e_{i+2}, \\ \xi_k^{n+1}\xi_{j-1}^n(e_i) &= \xi_k^{n+1}(e_{i+1}) = e_{i+2}.\end{aligned}$$

**Caso III** ( $k < i < j$ ). Tenemos que  $i < j$ , entonces  $i \leq j-1$ . Así,

$$\begin{aligned}\xi_j^{n+1}\xi_k^n(e_i) &= \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } k < i < j-1 \\ e_{i+2} & \text{si } k < i = j-1 \end{cases} \\ \xi_k^{n+1}\xi_{j-1}^n(e_i) &= \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } k < i < j-1 \\ e_{i+2} & \text{si } k < i = j-1. \end{cases}\end{aligned}$$

**caso IV** ( $i = k$ ). Se tiene que

$$\xi_j^{n+1}\xi_k^n(e_i) = \xi_j^{n+1}(e_{i+1}) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } i+1 < j \\ e_{i+2} & \text{si } i+1 = j. \end{cases}$$

Por otro lado

$$\xi_{j-1}^n(e_i) = \begin{cases} e_i & \text{si } k = i < j-1 \\ e_{i+1} & \text{si } i = j-1, \end{cases}$$

luego

$$\xi_k^{n+1}\xi_{j-1}^n(e_i) = \begin{cases} e_{i+1} & \text{si } k = i < j-1 \\ e_{i+2} & \text{si } k < i = j-1. \end{cases}$$

**Caso V** ( $i < k < j$ ).

$$\begin{aligned}\xi_j^{n+1}\xi_k^n(e_i) &= \xi_j^{n+1}(e_i) = e_i \\ \xi_k^{n+1}\xi_{j-1}^n(e_i) &= \xi_k^{n+1}(e_i) = e_i.\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.1** Para todo  $n \geq 0$ , se tiene  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ .

**Demostración.** Dado que  $S_{n+1}(X)$  es generado por todos los  $n + 1$  simplejos  $\sigma$ , es suficiente mostrar que  $\partial_n \partial_{n+1} \sigma = 0$ , para cada  $\sigma$ .

$$\begin{aligned}\partial_n \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \xi_i^{n+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \partial_n ((-1)^i \sigma \xi_i^{n+1}) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (-1)^j \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n \\ &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n.\end{aligned}\tag{1}$$

Ahora bien, para  $j < i$  del Lema 3.1 se tiene que  $\xi_i^{n+1} \xi_j^n = \xi_j^{n+1} \xi_{i-1}^n$ , luego (1) es igual a

$$\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n + \sum_{i > j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_j^{n+1} \xi_{i-1}^n,\tag{2}$$

si hacemos el cambio de variable  $t = j$  y  $r + 1 = i$  al segundo término de la ecuación (2), tenemos

$$\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n + \sum_{t \leq r} (-1)^{t+r+1} \sigma \xi_t^{n+1} \xi_r^n.\tag{3}$$

Cambiando nuevamente los índices  $t = i$  y  $r = j$  en (3), se tiene

$$\sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n + \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} \sigma \xi_i^{n+1} \xi_j^n = 0.$$

Por tanto,  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ . □

**Definición 3.6** *El grupo de  $n$ -ciclos en  $X$ , denotado por  $Z_n(X)$ , es  $\ker \partial_n$ ; el grupo de  $n$ -fronteras en  $X$ , denotado por  $B_n(X)$ , es  $\text{im } \partial_{n+1}$ .*

Retomemos el ejemplo de la introducción de la sección, donde  $X = \mathbb{R} - \{0\}$  y  $\alpha, \beta, \gamma$  son 1-simplejos. Un 1-ciclo en este caso corresponde a sumas de 1-simplejos orientados en  $X$ ,  $\alpha + \beta + \gamma$ , el cual no es una frontera de algún 2-simplejo en  $X$ .

Para detectar agujeros en  $X$ , deberíamos considerar sólo ciclos que no son fronteras, puesto que las fronteras son ciclos triviales ( $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ ). Claramente  $Z_n(X)$  y  $B_n(X)$  son subgrupos de  $S_n(X)$  para todo  $n \geq 0$ .

**Proposición 3.1** *Para todo espacio topológico  $X$  y para todo  $n \geq 0$ ,*

$$B_n(X) \subset Z_n(X) \subset S_n(X).$$

La prueba de esta proposición es clara. Sea  $\beta \in B_n(X)$ , es decir,  $\beta = \partial_{n+1} \alpha$  para algún  $\alpha \in S_{n+1}(X)$ . Así,  $\partial_n(\beta) = \partial_n \partial_{n+1} \alpha = 0$ , de donde se sigue que  $\beta \in Z_n(X)$ .

**Definición 3.7** *Para cada  $n \geq 0$ , el  $n$ -ésimo grupo de homología singular de un espacio topológico  $X$ , es el cociente*

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}.$$

Para  $n < 0$ , definimos  $H_n(X) = 0$ .

La clase lateral  $z_n + B_n(X)$ , donde  $z_n$  es un  $n$ -ciclo, es llamada **clase de homología** de  $z_n$  y es denotada por *cls*  $z_n$ .

La meta ahora es mostrar que existe un funtor  $H_n$  de  $\mathbf{Top}^1$  en  $\mathbf{Ab}$ .

Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua y  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$  es un  $n$ -simplejo en  $X$ , entonces  $f \circ \sigma : \Delta^n \rightarrow Y$  es un  $n$ -simplejo en  $Y$ . Extendiendo por linealidad tenemos un morfismo de grupos  $f_\# : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ , dado por

$$f_\#(\sum m_\sigma \sigma) = \sum m_\sigma (f \circ \sigma) = \sum m_\sigma f_\#(\sigma),$$

donde  $m_\sigma \in \mathbb{Z}$ .

Podemos observar que  $f_\#$  depende de  $n$ . De hecho existe  $f_\#$  para cada  $n \geq 0$ .

**Lema 3.2** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $\partial'_n f_\# = f_\# \partial_n$ . Es decir, para cada  $n \geq 0$ , existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1}(X) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow f_\# \\ S_n(Y) & \xrightarrow{\partial'_n} & S_{n-1}(Y). \end{array}$$

**Demostración.** Es suficiente con evaluar cada composición sobre un generador  $\sigma$  de  $S_n(X)$ .

$$\begin{aligned} f_\# \partial_n \sigma &= f_\# \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \xi_i^n \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ \sigma \xi_i^n = \partial_n (f \circ \sigma), \quad y \\ \partial'_n f_\# \sigma &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f_\# \sigma \xi_i^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ \sigma \xi_i^n = \partial_n (f \circ \sigma). \end{aligned}$$

Por tanto,  $f_\# \partial_n = \partial'_n f_\#$ . □

**Lema 3.3** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces para cada  $n \geq 0$ , se tiene que

$$f_\#(Z_n(X)) \subset Z_n(Y) \quad y \quad f_\#(B_n(X)) \subset B_n(Y).$$

**Demostración.** Sea  $\alpha \in Z_n(X)$ , entonces  $\partial\alpha = 0$ . Luego  $\partial'f_{\#}\alpha = f_{\#}\partial\alpha = f_{\#}(0) = 0$ . De aquí que  $f_{\#}\alpha \in \ker \partial'_n = Z_n(Y)$ . Si  $\beta \in B_n(X)$ , entonces  $\beta = \partial\gamma$  para algún  $\gamma \in S_{n+1}(X)$ , y  $f_{\#}\beta = f_{\#}\partial\gamma = \partial'f_{\#}\gamma \in \text{im } \partial'_{n+1} = B_n(Y)$ .  $\square$

**Teorema 3.2** Para cada  $n \geq 0$ ,  $H_n : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Ab}$  es un funtor, tal que a cada espacio topológico  $X$  le asigna  $H_n(X)$ .

**Demostración.** Vamos a demostrar los axiomas **i)**, **ii)**, **iii)** y **iv)** de la Definición 1.3.

**i)** Por definición  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$  es abeliano para cada espacio topológico  $X$ .

**ii)** Sean  $X, Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  continua, definimos

$$H_n(f) : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

por  $H_n(f)(z_n + B_n(X)) = f_{\#}(z_n) + B_n(Y)$ , donde  $z_n \in Z_n(X)$ .

El Lema 3.3 asegura que si  $z_n$  es un  $n$ -ciclo en  $X$ , entonces  $f_{\#}z_n$  es un  $n$ -ciclo en  $Y$ . Por otro lado, la definición de  $H_n(f)$  no depende de la elección del representante de  $z_n + B_n(X)$ , pues  $f_{\#}(B_n(X)) \subset B_n(Y)$ . En efecto, supongamos que  $\sigma' - \sigma \in B_n(X)$ , con  $\sigma', \sigma \in Z_n(X)$ . Así,  $f_{\#}(\sigma' - \sigma) \in B_n(Y)$ . Luego

$$\begin{aligned} H_n(f)(\sigma' - \sigma + B_n(X)) &= f_{\#}(\sigma' - \sigma) + B_n(Y) \\ &= f_{\#}(\sigma') - f_{\#}(\sigma) + B_n(Y) \\ &= B_n(Y). \end{aligned}$$

De aquí que  $f_{\#}(\sigma) + B_n(Y) = f_{\#}(\sigma') + B_n(Y)$ . Por tanto  $H_n(f)$  está bien definido.

**iii)** Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  funciones continuas.



Si  $z_n \in Z_n(X)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 H_n(g) \circ H_n(f)(z_n + B_n(X)) &= H_n(g)(f_{\#}(z_n)) + B_n(Y) \\
 &= g_{\#}(f_{\#}(z_n)) + B_n(Z) \\
 &= g_{\#} \circ f_{\#}(z_n + B_n(X)) \\
 &= (g \circ f)_{\#}(z_n + B_n(X)) \\
 &= H_n(g \circ f)(z_n + B_n(X)).
 \end{aligned}$$

Por tanto  $H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f)$ .

iv) Sea  $1_X : X \rightarrow X$ , entonces  $H_n(1_X) : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$

$$\begin{aligned}
 H_n(1_X)(z_n + B_n(X)) &= 1_{X\#}(z_n) + B_n(X) \\
 &= z_n + B_n(X).
 \end{aligned}$$

Es así como  $H_n(1_X) = 1_{H_n(X)}$ . □

Si no hay confusión, usualmente escribimos  $f_*$  en lugar de  $H_n(f)$  y llamamos a  $f_*$  la función inducida por  $f$ .

El siguiente corolario nos indica que cada grupo de homología  $H_n(X)$  es un invariante de  $X$ , esto es importante ya que si dos espacios topológicos tienen grupos de homología diferentes, entonces claramente no pueden ser homeomorfos.

**Corolario 3.1** *Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $X$  y  $Y$  son homeomorfos, entonces*

$$H_n(X) \cong H_n(Y), \text{ para todo } n \geq 0.$$

**Demostración.** Se tiene del axioma **iii)** de la Definición 1.3. □

Como una observación adicional, en esta tesis a la cardinalidad de un conjunto  $A$  la denotamos por **card A**.

Otra consecuencia del Corolario 3.1 es que el rango de  $H_n(X)$  es un invariante de  $X$  para cada  $n \geq 0$ . Recordemos que el **rango** de un grupo abeliano libre con base  $B$ , es **card B**. (Vea [15], pág. 61.)

**Definición 3.8** Para cada  $n \geq 0$ , el rango de  $H_n(X)$  es llamado el  **$n$ -ésimo número de Betti de  $X$** .

El siguiente teorema es de mucha utilidad en el Capítulo 4.

**Teorema 3.3** (*Axioma de dimensión*) Si  $X = \{x\}$ , entonces  $H_n(X) = 0$  para todo  $n > 0$ .

**Demostración.** Dado que  $X = \{x\}$ , entonces para cada  $n \geq 0$ , sólo existe un  $n$ -simplejo singular  $\sigma_n : \Delta^n \rightarrow X$ . De aquí que  $\sigma_n$  es la constante. Luego  $S_n(X) = \langle \sigma_n \rangle \cong \mathbb{Z}$ . Vamos a determinar los operadores frontera:

$$\partial_n(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_n \xi_i^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1}, \text{ se sigue que}$$

$$\partial_n \sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ par y positivo.} \end{cases}$$

De aquí que, si  $n$  es impar, entonces  $\partial_n$  es el morfismo de grupos cero y si  $n > 0$  es par, entonces  $\partial_n$  es un isomorfismo.

Por otro lado, consideremos la siguiente sucesión para  $n > 0$ :

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1}(X).$$

Si  $n$  es impar, del hecho que  $\partial_n = 0$  se tiene  $S_n(X) = \ker \partial_n = Z_n(X)$  y dado que  $n + 1$  es par,  $\partial_{n+1}$  es un isomorfismo. En particular  $\partial_{n+1}$  es sobreyectiva. Luego  $S_n(X) = \text{im } \partial_{n+1} = B_n(X)$ . Por tanto  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = S_n(X)/S_n(X) = 0$ .

Si  $n > 0$  es par, entonces  $\partial_n$  es un isomorfismo. Luego  $\partial_n$  es inyectiva. Así,  $Z_n(X) = \ker \partial_n = 0$ . Por tanto  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = 0$ .  $\square$

Dado que el Teorema 3.3 sólo nos da información de  $H_n(X)$  cuando  $X = \{x\}$  y  $n > 0$ , es natural preguntarnos que pasa con  $H_0(X)$ . A continuación vamos a determinar tal grupo.

**Ejemplo 3.2** Cálculo de  $H_0(X)$  cuando  $X = \{x\}$ .

Dado que  $X$  es un punto,  $S_0(X) = \langle \sigma_0 \rangle$ , donde  $\sigma_0$  es el 0-simplejo constante, entonces  $S_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Luego  $Z_0(X) = \ker \partial_0 = S_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Sea  $\sigma \in S_1(X)$ , entonces

$$\partial_1(\sigma) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i \sigma \xi_i^1 = \sigma \xi_0^1 - \sigma \xi_1^1 = \sigma_0 - \sigma_0 = 0.$$

Así,  $B_0(X) = \text{im } \partial_1 = 0$ . Por tanto  $H_0(X) = \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z}$ .

**Definición 3.9** Un espacio topológico  $X$  es llamado **acíclico** si  $H_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

Antes de enunciar el siguiente teorema recordemos que los elementos de una suma directa de una familia de grupos abelianos,  $\bigoplus G_\lambda$ , son aquellos “vectores”  $(g_\lambda)$  con un número finito de coordenadas no cero.

**Teorema 3.4** Si  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es el conjunto de componentes por trayectorias de  $X$ , entonces para cada  $n \geq 0$

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda).$$

**Demostración.** Si  $\delta = \sum m_\lambda \sigma_\lambda \in S_n(X)$ , en vista de que  $\sigma_\lambda : \Delta^n \rightarrow X$  es continua y de la Observación 3.1a)  $\Delta^n$  es convexo y compacto, luego se tiene que  $\sigma_\lambda(\Delta^n) \subseteq X_\lambda$ , entonces  $\sigma_\lambda$  es  $n$ -simplejo en  $X_\lambda$ . Más aún,  $m_\lambda \sigma_\lambda \in S_n(X_\lambda)$ . Podemos expresar  $\delta = \sum \delta_\lambda$ , donde  $\delta_\lambda$  es la suma de aquellos términos en  $\delta$  para los cuales  $\text{im } \sigma_\lambda \subset X_\lambda$ . Se puede ver que para cada  $n$ , la función  $\phi : S_n(X) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} S_n(X_\lambda)$ , dada por  $\phi(\delta) = (\delta_\lambda)$  es un isomorfismo. Observemos que  $\delta$  es un ciclo si y sólo si cada  $\delta_\lambda$  es un ciclo pues  $0 = \partial\delta = \sum \partial\delta_\lambda$ , esto implica que  $\partial\delta_\lambda = 0$  para toda  $\lambda$ . Entonces la función  $\theta_n : H_n(X) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda)$  dada por  $\theta_n(\text{cls } \delta) = (\text{cls } \delta_\lambda)$  está bien definida. Para verificar que  $\theta_n$  es un isomorfismo, proponemos la inversa  $\Phi_n : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_n(X_\lambda) \rightarrow H_n(X)$  de  $\theta_n$  dada por  $\Phi_n((\text{cls } \delta_\lambda)) = \text{cls } \sum \delta_\lambda$ .

$$\Phi_n \circ \theta_n(\text{cls } \delta) = \Phi_n((\text{cls } \delta_\lambda)) = \text{cls } \sum \delta_\lambda = \text{cls } \delta \quad y$$

$$\theta_n \circ \Phi_n((cls \delta_\lambda)) = \theta_n(cls \sum \delta_\lambda) = \theta_n(cls \delta) = (cls \delta_\lambda).$$

□

Para ejemplificar como funciona el Teorema 3.4 calculemos los grupos de homología singular de la 0-esfera,  $\mathbb{S}^0$ .

**Ejemplo 3.3** *Cálculo de  $H_n(\mathbb{S}^0)$ ,  $n \geq 0$ .*

Según definición de  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$  tiene dos componentes por trayectorias. Por el Teorema 3.4 tenemos que  $H_n(\mathbb{S}^0) = H_n(\{-1\}) \oplus H_n(\{1\})$ . Del Ejemplo 3.2 y el Teorema 3.3 concluimos que

$$H_n(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

El siguiente teorema nos da una manera de determinar  $H_0(X)$ , cuando  $X$  es conectable por trayectorias.

**Teorema 3.5**

- i) Si  $X$  es un espacio topológico no vacío conectable por trayectorias, entonces  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Más aún, si  $x_0, x_1 \in X$ , entonces  $cls x_0 = cls x_1$  es un generador de  $H_0(X)$ .
- ii) Para cualquier espacio topológico  $X$ , el grupo  $H_0(X)$  es un grupo abeliano libre de rango igual a  $\text{card } \Lambda$ , donde  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es el conjunto de c.p.t. de  $X$ .
- iii) Si  $X$  y  $Y$  son espacios topológicos conectables por trayectorias y  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $f_* : H_0(X) \rightarrow H_0(Y)$  manda un generador de  $H_0(X)$  a un generador de  $H_0(Y)$ .

**Demostración.**

- i) Observemos el final de los siguientes complejos singulares

$$\begin{aligned} S_1(X) &\xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0 \\ S_1(X) &\xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tenemos que  $Z_0(X) = \ker \partial_0 = S_0(X)$ , pues  $\partial_0 = 0$ . Entonces toda 0-cadena en  $X$  es un 0-ciclo. Luego un 0-ciclo tiene la forma  $\sum_{x \in X} m_x x$ , donde  $m_x \in \mathbb{Z}$  para casi todos los  $m_x = 0$ .

Consideremos el conjunto  $\{\sum m_x x \in S_0(X) : \sum m_x = 0\}$ . A continuación se muestra que tal conjunto coincide con  $B_0(X)$ .

Sea  $\gamma \in \{\sum m_x x \in S_0(X) : \sum m_x = 0\}$ , es decir,  $\gamma = \sum_{i=0}^k m_i x_i \in S_0(X)$  y  $\sum_{i=0}^k m_i = 0$ .

Sea  $x \in X$ , del hecho que  $X$  es no vacío y conectable por trayectorias, existe  $\sigma_i : I \rightarrow X$  una trayectoria en  $X$  de  $x$  a  $x_i$ , para cada  $i$ . Si identificamos  $I = [0, 1]$  con  $\Delta^1 = [e_0, e_1]$  tenemos que  $\partial_1(\sigma_i) = \sigma_i(e_1) - \sigma_i(e_0) = x_i - x$ . Sea  $\sum m_i \sigma_i \in S_1(X)$ , luego

$$\partial_1(\sum m_i \sigma_i) = \sum m_i \partial_1(\sigma_i) = \sum m_i (x_i - x) = (\sum m_i x_i) - (\sum m_i) x = \gamma,$$

pues  $\sum m_i = 0$ . Por tanto  $\gamma = \sum m_i x_i = \partial_1(\sum m_i \sigma_i) \in B_0(X)$ . De aquí que  $\{\sum m_x x \in S_0(X) : \sum m_x = 0\} \subset B_0(X)$ .

Ahora bien, si  $\gamma \in B_0(X)$ , entonces

$$\gamma = \partial_1(\sum n_j \tau_j) = \sum n_j (\tau_j(e_1) - \tau_j(e_0)) = \sum n_j \tau_j(e_1) - \sum n_j \tau_j(e_0), \quad (1)$$

donde  $n_j \in \mathbb{Z}$  y  $\tau_j$  es un 1-simplejo en  $X$ . Observemos que cada coeficiente  $n_j$  aparece dos veces con signos opuestos en la ecuación (1). Por tanto la suma de coeficientes es cero. De aquí que  $\gamma \in \{\sum m_x x \in S_0(X) : \sum m_x = 0\}$ . Por tanto,

$$B_0(X) = \{\sum m_x x \in S_0(X) : \sum m_x = 0\}.$$

Por otro lado, definimos  $\theta : Z_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\theta(\sum m_x x) = \sum m_x$ . Claramente  $\theta$  es sobreyectiva con kernel  $B_0(X)$ . Por el teorema fundamental de morfismos de grupos (vea [11], pág. 108) tenemos que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Sean  $x_0, x_1 \in X$ . Existe una trayectoria  $\sigma$  en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ . Además  $x_1 - x_0 = \partial_1 \sigma \in B_0(X)$ , lo cual implica que  $x_1 + B_0(X) = x_0 + B_0(X)$ . Es decir,  $\text{cls } x_0 = \text{cls } x_1$ .

Finalmente, si  $\text{cls } \gamma$  es un generador de  $H_0(X)$ , donde  $\gamma = \sum m_i x_i$ , entonces  $\theta(\gamma) = \sum m_i = \pm 1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\theta(\gamma) = 1$ . Si  $x_0 \in X$ , entonces  $\gamma = x_0 + (\gamma - x_0)$ . Dado que  $\gamma - x_0 \in B_0(X)$ , pues la suma de sus coeficientes es cero, tenemos que  $\text{cls } \gamma = \text{cls } x_0$  como queríamos.

ii) Del Teorema 3.4 y de i) tenemos que  $H_0(X) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_0(X_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbb{Z}$ . De aquí que el rango  $H_0(X) = \text{card } \Lambda$ .

iii) Si  $\text{cls } \gamma$  es un generador de  $H_0(X)$ , de la parte i)  $f_*(\gamma + B_0(X)) = f_\#(\gamma) + B_0(Y)$  tiene que ser un generador en  $H_0(Y)$ , pues cualquier elemento de  $H_0(Y)$  es un generador.  $\square$

Notemos que los funtores  $\pi_0$  y  $H_0$  muestran la misma información. En el sentido de que si nosotros determinamos el rango de  $H_0(X)$ , entonces inmediatamente sabemos cuantas componentes por trayectorias tiene  $X$ , lo cual está directamente relacionado con la definición de  $\pi_0(X)$ .

**Lema 3.4** *Sea  $A$  un subespacio topológico de  $X$  con inclusión  $j : A \hookrightarrow X$ . Entonces  $j_\# : S_n(A) \rightarrow S_n(X)$  es inyectiva para cada  $n \geq 0$ .*

**Demostración.** Sea  $\gamma = \sum m_i \sigma_i \in S_n(A)$  y supongamos que todos los  $\sigma_i$  son diferentes. Si  $\gamma \in \ker j_\#$ , entonces

$$0 = j_\#(\gamma) = j_\#(\sum m_i \sigma_i) = \sum m_i j \circ \sigma_i \quad (1)$$

Dado que todos los  $\sigma_i$  son diferentes, entonces todos los simplejos  $j \circ \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$  son distintos. Pero  $S_n(X)$ , es un grupo abeliano libre con base todos los  $n$ -simplejos en  $X$ , se sigue que en la ecuación (1) cada  $m_i = 0$ . Por tanto  $\gamma = 0$ . De aquí que  $j_\#$  es inyectiva.  $\square$

**Definición 3.10** *Si  $\zeta = \sum m_i \sigma_i \in S_n(X)$ , con  $m_i \neq 0$  y todos los  $\sigma_i$  diferentes, entonces el **soporte** de  $\zeta$ , denotado por  $\text{supp } \zeta$ , es  $\bigcup \sigma_i(\Delta^n)$ .*

Dado que la unión finita de subconjuntos compactos es compacta, entonces es claro que el  $\text{supp } \zeta$  es un subconjunto compacto de  $X$ .

**Teorema 3.6** (*Soporte compacto*) *Sea  $X$  espacio topológico. Si  $\text{cls } \zeta \in H_n(X)$ , entonces existe un subespacio topológico compacto  $A$  de  $X$  con  $\text{cls } \zeta \in \text{im } j_*$ , donde  $j : A \hookrightarrow X$  es la inclusión.*

**Demostración.** Afirmamos que  $A = \text{supp } \zeta$  es el subespacio topológico compacto de  $X$ .

En efecto, mostremos que  $\text{cls } \zeta \in \text{im } j_*$ . Si  $\zeta = \sum m_i \sigma_i$ , entonces para cada  $i$  podemos escribir  $\sigma_i = j \sigma'_i$ , donde  $\sigma'_i : \Delta^n \rightarrow A$ . Definimos  $\gamma = \sum m_i \sigma'_i \in S_n(A)$ , tenemos que  $j_{\#} \partial \gamma = \partial j_{\#} \gamma = \partial j_{\#} (\sum m_i \sigma'_i) = \partial (\sum m_i j \sigma'_i) = \partial (\sum m_i \sigma_i) = \partial \zeta = 0$ , pues  $\zeta$  es un  $n$ -ciclo en  $X$ ; dado que  $j_{\#}$  es inyectiva (vea Lema 3.4), se sigue que  $\partial \gamma = 0$ , es decir,  $\gamma$  es un  $n$ -ciclo en  $A$ . Por lo tanto,  $\text{cls } \gamma \in H_n(A)$ , luego  $j_* \text{cls } \gamma = \text{cls } j_{\#} \gamma = \text{cls } \sum m_i j \sigma'_i = \text{cls } \zeta$ . De aquí que  $\text{cls } \zeta \in \text{im } j_*$ .  $\square$

**Corolario 3.2** *Si  $X$  es un espacio topológico para el cual existe un entero  $n \geq 0$  con  $H_n(A) = 0$  para todo subespacio compacto  $A$  de  $X$ , entonces  $H_n(X) = 0$ .*

**Demostración.** Si  $\text{cls } \zeta \in H_n(X)$ , entonces el Teorema 3.6 nos da un subespacio compacto  $A$  de  $X$  y un elemento  $\text{cls } \gamma \in H_n(A)$  con  $j_* \text{cls } \gamma = \text{cls } \zeta$ , donde  $j : A \hookrightarrow X$  es la inclusión. Pero por hipótesis  $H_n(A) = 0$ , entonces  $\text{cls } \gamma = 0$ , por tanto  $0 = j_*(0) = \text{cls } \zeta$ . De aquí que  $H_n(X) = 0$ .  $\square$

El siguiente teorema es utilizado para probar el teorema de separación de Jordan-Brouwer como se ve en el Capítulo 4.

**Teorema 3.7** *Sean  $X = \bigcup_{p=1}^{\infty} X^p$  con  $X^p \subset X^{p+1}$  para todo  $p$ ,  $\lambda^p : X^p \hookrightarrow X$  y  $\varphi^p : X^p \hookrightarrow X^{p+1}$  las inclusiones. Si todo subespacio compacto  $A$  de  $X$  está contenido en algún  $X^p$ , entonces  $\text{cls } \zeta \in H_n(X)$  es cero si y sólo si existen  $p$  y  $\text{cls } \zeta' \in H_n(X^p)$  con*

$$\lambda_*^p \text{cls } \zeta' = \text{cls } \zeta \text{ y } \varphi_*^p \text{cls } \zeta' = 0.$$

$$\begin{array}{ccc}
 & X^{p+1} & \\
 \varphi^p \nearrow & & \searrow \lambda^{p+1} \\
 X^p & \xrightarrow{\lambda^p} & X
 \end{array}$$

**Demostración.** Supongamos que  $\text{cls } \zeta = 0$  en  $H_n(X)$ . Entonces  $\zeta = \sum m_i \sigma_i \in S_n(X)$  y existe  $\beta = \sum m'_k \tau_k \in S_{n+1}(X)$  tal que  $\partial\beta = \zeta$ . Sea  $A = \text{supp } \zeta \cup \text{supp } \beta$ , y  $p$  tal que  $A \subset X^p$ . Existen  $n$ -simplejos  $\sigma'_i : \Delta^n \rightarrow X^p$  y  $(n+1)$ -simplejos  $\tau'_k : \Delta^{n+1} \rightarrow X^p$ , con  $\sigma_i = \lambda^p \sigma'_i$  y  $\tau_k = \lambda^p \tau'_k$  para toda  $i, k$ . Más aún, si  $\zeta' = \sum m_i \sigma'_i$ , entonces  $\zeta'$  es un  $n$ -ciclo en  $S_n(X^p)$  y por el Teorema 3.6  $\lambda_*^p \text{cls } \zeta' = \text{cls } \zeta$ .

Por otro lado si  $\beta' = \sum c_k \tau'_k$ , entonces  $\partial\varphi_{\#}^p \beta' = \varphi_{\#}^p \partial\beta' = \varphi_{\#}^p \zeta' = 0$  en  $H_n(X^{p+1})$ .

Para la otra implicación basta observar que

$$0 = \lambda_*^{p+1}(\varphi_*^p(\text{cls } \zeta')) = \lambda_*^p(\text{cls } \zeta') = \text{cls } \zeta.$$

□

Las pruebas de los siguientes resultados son muy conocidas y dado que nuestra objetivo es aplicar los resultados de la teoría de homología singular, tales pruebas se omiten.

**Teorema 3.8** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Si  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, entonces

$$H_n(f) = H_n(g) \text{ para todo } n \geq 0.$$

Para la prueba del Teorema 3.8 vea [15], pág.75.

**Corolario 3.3** Si  $X$  y  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía, entonces  $H_n(X) \cong H_n(Y)$  para todo  $n \geq 0$ , donde el isomorfismo es inducido por la equivalencia homotópica.

**Demostración.** Sea  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  una equivalencia homotópica, entonces



existe  $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  tal que

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq 1_X \\ f \circ g &\simeq 1_Y. \end{aligned}$$

Aplicando el funtor  $H_n$  a cada una de las ecuaciones anteriores como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} H_n(g \circ f) &= g_* \circ f_* \simeq 1_{H_n(X)} \\ H_n(f \circ g) &= f_* \circ g_* \simeq 1_{H_n(Y)} \end{aligned}$$

Es así como  $H_n(X) \cong H_n(Y)$ . □

**Corolario 3.4** *Si  $X$  es contraíble, entonces  $H_n(X) = 0$  para todo  $n > 0$ .*

**Demostración.** Del Teorema 2.4  $X$  tiene el mismo tipo de homotopía de un punto, por el Corolario 3.3  $H_n(X) \cong H_n(\{*\})$ , luego del Teorema 3.3 se tiene el resultado. □

En la introducción de este capítulo dijimos que la homología singular es un modo de contar agujeros de cualquier dimensión en un espacio topológico. Pensemos en la circunferencia,  $S^1$ , y el disco  $D^2$  sabemos que el grupo fundamental de  $S^1$  y  $D^2$  es  $\mathbb{Z}$  y  $0$ , respectivamente. Es decir, de alguna manera el grupo fundamental detecta el agujero obvio de la circunferencia. Entonces nos preguntamos ¿existe alguna relación entre el grupo fundamental y el primer grupo de homología singular? el teorema de Hurewicz responde afirmativamente a esta pregunta. Cabe mencionar que en esta tesis se enuncia el Teorema de Hurewicz, pues es un resultado conocido en la Topología Algebraica que nos muestra una relación entre el grupo fundamental y el primer grupo de homología singular.

La prueba del teorema de Hurewicz se omite, pues es extensa y requiere de otras herramientas matemáticas, que no es nuestro objetivo estudiar. Sin embargo, la

prueba completa se puede consultar en [15] pág. 82.

A continuación presentamos a grandes rasgos lo necesario para enunciar el teorema de Hurewicz.

Definimos un homeomorfismo  $\eta : \Delta^1 \rightarrow I$  por  $\eta((1-t)e_0 + te_1) = t$ , luego existe un morfismo de grupos

$$\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X),$$

dado por  $\varphi([f]) = \text{cls } f\eta$ , donde  $f : I \rightarrow X$  es una trayectoria cerrada de  $X$  en  $x_0$ . La función  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  es denominada la **función de Hurewicz**.

**Teorema 3.9** (De Hurewicz) *Sea  $X$  un espacio topológico conectable por trayectorias, entonces la función de Hurewicz  $\varphi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  es sobreyectiva con kernel el subgrupo conmutador de  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $\pi_1(X, x_0)'$ . Luego, por teoremas de isomorfismos de grupos (vea [11], pág. 111)*

$$\pi_1(X, x_0)/\pi_1(X, x_0)' \cong H_1(X).$$

**Demostración.** Vea [15], pág. 82.

En [1], pág. 366 se puede encontrar un teorema de Hurewicz más general que el presentado aquí. Aquél relaciona los grupos de homotopía de dimensiones superiores con los grupos de homología singular, sin embargo aquí no se menciona pues el estudio de tal resultado sale de nuestro alcance.

## 3.2. La categoría **Comp**

Recordemos que en la Sección 3.1 establecimos el funtor de homología singular,  $H_n$  para  $n \geq 0$ , tal funtor establece una conexión entre la categoría **Top**<sup>1</sup> y la categoría **Ab**. El propósito de esta sección consiste en definir una categoría intermedia, **Comp**, de modo tal que se puedan establecer funtores de **Top**<sup>1</sup> a **Comp** y de **Comp** a **Ab**. Más aún, que se cumpla que la composición de tales funtores

sea el funtor  $H_n$ . Vamos a ver que podemos estudiar los grupos de homología en **Comp** y que por medio de la composición de funtores, descrita anteriormente, se pueden trasladar los resultados de homología obtenidos en **Comp**, a la homología singular en **Top**<sup>1</sup>. La categoría **Comp** se caracteriza por estudiar el álgebra homológica desde el punto de vista algebraico, en ese sentido existen muchos resultados parecidos a los de la teoría de grupos. Por ejemplo, al igual que en teoría de grupos aquí se establece la existencia de ciertas sucesiones exactas largas, tales sucesiones son muy útiles para determinar grupos de homología singular, pues ilustran conexiones entre la homología de un espacio topológico y la homología de sus subespacios.

**Definición 3.11** *Un complejo de cadena es una sucesión de grupos abelianos,  $S_n$  y morfismos de grupos,  $\partial_n : S_{n+1} \rightarrow S_n$ , tales que  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . El morfismo de grupos  $\partial_n$  es llamado la **frontera de grado  $n$** , y  $S_n$  es el **término de grado  $n$** .*

El complejo de cadena de la Definición 3.11 es denotado por  $(S_*, \partial)$  o simplemente como  $S_*$  y lo representamos con el siguiente diagrama

$$S_* : \cdots \longrightarrow S_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} S_n \xrightarrow{\partial_n} S_{n-1} \longrightarrow \cdots, n \in \mathbb{Z}.$$

**Observación 3.4** *Para el término de grado  $n$ , la condición  $\partial_n \partial_{n+1} = 0$  es equivalente a  $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$ .*

**Ejemplo 3.4** *Sea  $X$  un espacio topológico. El complejo singular  $(S_*(X), \partial)$  es un complejo de cadena, donde las fronteras de grado  $n$  son los operadores frontera. (Vea, Sección 3.1.)*

**Definición 3.12** *Una sucesión de dos morfismos de grupos*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

es **exacta en  $B$**  si  $\text{im } f = \ker g$ .

Un complejo de cadena  $(S_*, \partial)$ , es **exacta** si  $\text{im } \partial_{n+1} \supseteq \ker \partial_n$ , pues  $\text{im } \partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , es decir, es exacta en  $S_n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 3.13** Si  $(S_*, \partial)$  es un complejo de cadena, entonces el kernel,  $\ker \partial_n$ , es llamado el **grupo de  $n$ -ciclos** y es denotado por  $Z_n(S_*, \partial)$ . La imagen de  $\partial_{n+1}$ ,  $\text{im } \partial_{n+1}$ , es denominado el **grupo de las  $n$ -fronteras** y es denotado por  $B_n(S_*, \partial)$ . El  **$n$ -ésimo grupo de homología** de  $(S_*, \partial)$  se denota y se define por

$$H_n(S_*, \partial) = Z_n(S_*, \partial) / B_n(S_*, \partial).$$

Si  $z_n \in Z_n(S_*, \partial)$ , entonces  $z_n + B_n(S_*, \partial) \in H_n(S_*, \partial)$  es la **clase de homología** de  $z_n$  y es denotada por  $\text{cls } z_n$ ; si no hay confusión denotamos a  $H_n(S_*, \partial) = H_n(S_*)$ .

**Teorema 3.10** Un complejo de cadena  $(S_*, \partial)$  es exacta si y sólo si  $H_n(S_*, \partial) = 0$ , para cada  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Demostración.** Supongamos que  $(S_*, \partial)$  es exacta, por definición se tiene que  $\text{im } \partial_{n+1} = \ker \partial_n$ , luego  $Z_n(S_*, \partial) = B_n(S_*, \partial)$ , de aquí que  $H_n(S_*, \partial) = 0$ . Recíprocamente, supongamos que  $H_n(S_*, \partial) = 0$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces  $Z_n(S_*, \partial) = B_n(S_*, \partial)$ . Por tanto  $(S_*, \partial)$  es exacta.  $\square$

Por lo tanto, los grupos de homología miden que tan “lejos” está el complejo de cadena asociado de ser exacta.

Un complejo de cadena  $(S_*, \partial)$ , tal que  $H_n(S_*) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$  es llamado **complejo de cadena acíclico**.

**Definición 3.14** Si  $(S'_*, \partial')$  y  $(S_*, \partial)$  son complejos de cadena, una **función cadena**  $f : (S'_*, \partial') \rightarrow (S_*, \partial)$  es una sucesión de morfismos de grupos  $\{f_n : S'_n \rightarrow S_n : n \in \mathbb{Z}\}$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & S'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & S'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & S_n & \xrightarrow{\partial_n} & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

es decir,  $\partial_n \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial'_n$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . A  $f_n$  le llamamos el **término de grado  $n$** .

**Ejemplo 3.5** Sean  $X, Y$  espacios topológicos. En la Sección 3.1 se vio que si  $f : X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $f$  induce  $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ . Tal función es una función cadena.

**Definición 3.15** Se define la categoría **Comp** de los complejos de cadena, donde  $\text{Obj Comp}$  consta de la clase de todos los complejos de cadena,  $\text{Hom}(S_*, S'_*) = \{f : S_* \rightarrow S'_* \mid f \text{ es una función cadena}\}$  y la composición de funciones cadena se define término a término: si  $f : S_* \rightarrow S'_*$  y  $g : S'_* \rightarrow S''_*$ , entonces  $g \circ f : S_* \rightarrow S''_*$  es la sucesión de morfismos de grupos  $\{g_n \circ f_n : S_n \rightarrow S''_n : n \in \mathbb{Z}\}$ .

La categoría **Comp** tiene la propiedad que para cada par de complejos de cadena  $S'_*$  y  $S_*$ ,  $\text{Hom}(S'_*, S_*)$  es un grupo abeliano, pues si  $f = \{f_n\}$  y  $g = \{g_n\}$  pertenecen a  $\text{Hom}(S'_*, S_*)$ , entonces  $f + g$  es la función cadena cuyo término de grado  $n$  es  $f_n + g_n$ .

**Observación 3.5** Cabe mencionar que existe un funtor  $S_* : \mathbf{Top}^1 \rightarrow \mathbf{Comp}$  definido por  $S_*(X) = (S_*(X), \partial)$  y  $S_*(f) = f_{\#}$ , donde  $f$  es una función continua de espacios topológicos.

Otro funtor que existe para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , es  $H_n : \mathbf{Comp} \rightarrow \mathbf{Ab}$  con  $H_n(S_*) = Z_n(S_*)/B_n(S_*)$  y  $H_n(f) = f_* : H_n(S_*) \rightarrow H_n(S'_*)$  definido por  $f_*(cls z_n) = cls f_n(z_n)$ , para toda función cadena  $f : S'_* \rightarrow S_*$ .

Si componemos el funtor  $H_n$  seguido del funtor  $S_*$  obtenemos la construcción de  $H_n$  estudiado en la Sección 3.11. Esta es la razón por la cual nos interesa estudiar la categoría **Comp** pues es la categoría que conecta  $\mathbf{Top}^1$  con  $\mathbf{Ab}$ .

Las siguientes definiciones de la categoría **Comp** son semejantes a las que existen en la categoría **Ab**.

**Definición 3.16**

i) Definimos  $(S'_*, \partial')$  como el **subcomplejo** de  $(S_*, \partial)$ , si cada  $S'_n$  es un subgrupo de  $S_n$  y  $\partial'_n = \partial_n|_{S'_n}$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ .

ii) Si  $(S'_*, \partial')$  es un subcomplejo de  $(S_*, \partial)$ , el **complejo cociente** es el complejo de cadena

$$S_*/S'_* : \cdots \longrightarrow S_n/S'_n \xrightarrow{\bar{\partial}_n} S_{n-1}/S'_{n-1} \longrightarrow \cdots,$$

donde  $\bar{\partial}_n(s_n + S'_n) = \partial_n(s_n) + S'_{n-1}$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ .

iii) Una sucesión de complejos de cadena y funciones cadena

$$\cdots \longrightarrow A_*^{q+1} \xrightarrow{f^{q+1}} A_*^q \xrightarrow{f^q} A_*^{q-1} \longrightarrow \cdots$$

es **exacta** si  $\text{im } f^{q+1} = \ker f^q$  para todo  $q$ . Una **sucesión exacta corta de complejos de cadena** es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow S'_* \xrightarrow{i} S_* \xrightarrow{p} S''_* \longrightarrow 0.$$

Donde  $i, p$  son funciones cadena y  $0$  denota el complejo de cadena cero.

iv) Sean  $S'_*, S''_*$  subcomplejos de  $S_*$ . Entonces  $\mathbf{S}'_* \cap \mathbf{S}''_*$  es el subcomplejo de  $S_*$  cuyo  $n$ -ésimo término es  $S'_n \cap S''_n$ , y  $\mathbf{S}'_* + \mathbf{S}''_*$  es el subcomplejo de  $S_*$  cuyo  $n$ -ésimo término es  $S'_n + S''_n$ .

**Ejemplo 3.6** Un subcomplejo surge de un subespacio  $A$  de un espacio topológico  $X$ , ya que  $S_n(A)$  es subgrupo de  $S_n(X)$  bajo la inclusión  $j : A \hookrightarrow X$ , pues en el Lema 3.4 verificamos que  $j_\# : S_n(A) \rightarrow S_n(X)$  es inyectiva para toda  $n \geq 0$ . Notemos que existe una sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \longrightarrow S_*(A) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow S_*(X)/S_*(A) \longrightarrow 0.$$

**Observación 3.6**

- a) Si  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$  es exacta, entonces  $f$  es inyectiva, pues  $\ker f = \text{im } 0 = 0$ .
- b) Si  $B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$  es exacta, entonces  $g$  es sobreyectiva, ya que  $C = \ker f = \text{im } g$ .
- c) Si  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$  es exacta, entonces  $f$  es isomorfismo, por **a)** y **b)**  $f$  es biyectiva, luego isomorfismo.

Una propiedad fundamental de los funtores de homología  $H_n$  es que existe una conexión entre los grupos de homología de dos complejos de cadenas diferentes. Como se muestra en el Lema 3.5.

**Lema 3.5** Si  $0 \longrightarrow (S'_*, \partial') \xrightarrow{i} (S_*, \partial) \xrightarrow{p} (S''_*, \partial'') \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces para cada  $n \in \mathbb{Z}$  existe un morfismo de grupos

$$d_n : H_n(S''_*) \rightarrow H_{n-1}(S'_*),$$

dado por  $d_n(\text{cls } z''_n) = \text{cls } i_{n-1}^{-1} \partial_n p_n^{-1} z''_n$ .

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Vamos a guiarnos del siguiente diagrama para verificar que la función  $d_n$  está bien definida.

$$\begin{array}{ccccccc} S'_n & \xrightarrow{i} & S_n & \xrightarrow{p} & S''_n & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \partial' & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial'' & & \\ 0 \longrightarrow & S'_{n-1} & \xrightarrow{i} & S_{n-1} & \xrightarrow{p} & S''_{n-1} & \end{array}$$

Sea  $z'' \in Z''_n$ , es decir,  $\partial'' z'' = 0$ . De la Observación 3.6b) tenemos que  $p$  es sobreyectiva, entonces existe  $s_n \in S_n$  tal que  $p(s_n) = z''$ . Luego  $\partial''(p(s_n)) = \partial''(z'') = 0$ , pero  $\partial'' p = p \partial$ , de aquí que  $p(\partial(s_n)) = 0$ . Así,  $\partial(s_n) \in \ker p$ . Dado que  $\ker p = \text{im } i$ , tenemos que  $\partial(s_n) \in \text{im } i$ , es decir, existe un único (pues  $i$  es inyectiva, vea Observación 3.6a))  $s'_{n-1} \in S'_{n-1}$  tal que  $i(s'_{n-1}) = \partial(s_n)$ . Por otro lado, sea  $\sigma_n \in S_n$  con las mismas características de  $s_n$ . Entonces, existe  $\sigma'_{n-1} \in S'_{n-1}$  con  $i(\sigma'_{n-1}) = \partial(\sigma_n)$ .

Claramente  $s_n - \sigma_n \in \ker p$  pues,

$$p(s_n - \sigma_n) = p(s_n) - p(\sigma_n) = z'' - z'' = 0$$

pero  $\ker p = \text{im } i$ , entonces existe  $x'_n \in S'_n$  tal que  $i(x'_n) = s_n - \sigma_n$ . Así,

$$\partial(i(x'_n)) = \partial(s_n - \sigma_n) = \partial(s_n) - \partial(\sigma_n) = i(s'_{n-1}) - i(\sigma'_{n-1}) = i(s'_{n-1} - \sigma'_{n-1}),$$

como  $\partial \circ i = i \circ \partial'$ , se tiene que  $i(\partial'(x'_n)) = \partial(i(x'_n)) = i(s'_{n-1} - \sigma'_{n-1})$ .

Dado que  $i$  es inyectiva, tenemos que  $\partial'(x'_n) = s'_{n-1} - \sigma'_{n-1}$ . Por lo tanto,  $s'_{n-1} - \sigma'_{n-1} \in B_n(S'_*, \partial')$ . De aquí que  $d_n$  está bien definido.  $\square$

**Definición 3.17** *La función  $d_n$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$  del Lema 3.5 es llamada **morfismo de conexión**.*

**Teorema 3.11** (*Triángulo exacto*).

Si  $0 \longrightarrow (S'_*, \partial') \xrightarrow{i} (S_*, \partial) \xrightarrow{p} (S''_*, \partial'') \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de complejos de cadena, entonces existe una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_n(S_*) \xrightarrow{p_*} H_n(S''_*) \xrightarrow{d} H_{n-1}(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(S_*) \longrightarrow \cdots$$

**Demostración.**

- 1) Por hipótesis  $\text{im } i = \ker p$ , luego  $p_* \circ i_* = (p \circ i)_* = 0_* = 0$ . Por tanto,  $\text{im } i_* \subseteq \ker p_*$ .
- 2) Sea  $z + B \in \ker p_*$ , es decir,  $p_*(z + B) = pz + B'' = B''$ . De aquí que  $pz \in B''$ , luego existe  $s'' \in S''_*$  tal que  $pz = \partial'' s''$ . Notemos de la Observación 3.6b) que  $p$  es sobreyectiva, por lo que existe  $s \in S_*$  tal que  $p(s) = s''$ . Dado que  $\partial'' p = p \partial$  tenemos  $pz = \partial'' s'' = \partial'' p s = p \partial s$ , es así como  $p(z - \partial s) = 0$ , pero  $\ker p = \text{im } i$ , lo que implica que  $z - \partial s \in \text{im } i$ . Así pues, existe  $s' \in S'_*$ , con  $i(s') = z - \partial s$ . Entonces,

$$i \partial' s' = \partial i s' = \partial(z - \partial s) = \partial z - \partial \partial s = 0. \quad (1)$$



De (1) es claro que  $s' \in Z_n(S'_*, \partial)$ , pues  $i$  es inyectiva. Luego,

$$i_*(s' + B') = is' + B = z - \partial s + B = z + B.$$

Así,  $z + B \in \text{im } i_*$ . Por tanto  $\ker p_* \subseteq \text{im } i_*$ .

- 3) Vamos a probar que  $\text{im } p_* \subseteq \ker d$ , donde  $d$  es el morfismo de conexión. En efecto, sea  $z + B \in H_n(S_*)$ , para algún  $n \geq 0$ . Luego

$$dp_*(z + B) = d(pz + B'') = i^{-1}\partial p^{-1}(pz) + B'.$$

Dado que  $d$  está bien definida, tenemos  $z = p^{-1}(pz)$ . Así,

$$i^{-1}\partial p^{-1}(pz) = i^{-1}\partial z = i^{-1}(0) = 0.$$

De aquí que  $p_*(z + B) \in \ker d$ . Por tanto  $\text{im } p_* \subseteq \ker d$ .

- 4) Probemos que  $\ker d \subseteq \text{im } p_*$ . Sea  $z'' + B'' \in \ker d$ , es decir,  $d(z'' + B'') = x' + B' = B'$ , donde  $x' = i^{-1}\partial p^{-1}z'' \in B'$ . Dado que  $x' \in \text{im } \partial'$  existe  $s' \in S'_{n+1}$  tal que  $x' = \partial's'$ . Así,

$$\partial is' = i\partial's' = ix' = \partial p^{-1}z''. \quad (2)$$

De (2), tenemos que  $p^{-1}z'' - is' \in Z_n(S_*, \partial)$ . Luego

$$p_*((p^{-1}z'' - is') + B'') = pp^{-1}z'' - pis' + B'' = z'' + B''.$$

Por tanto,  $\ker d \subseteq \text{im } p_*$ .

- 5) Vamos a demostrar que  $\text{im } d \subseteq \ker i_*$ . Sea  $z'' + B'' \in H_n(S''_*)$ , para algún  $n \geq 0$ . Luego

$$i_*d(z'' + B'') = i_*(i^{-1}\partial p^{-1}z'' + B') = \partial p^{-1}z'' + B = B.$$

Por tanto  $\text{im } d \subseteq \ker i_*$ .

6) Probemos que  $\ker i_* \subseteq \operatorname{im} d$ . Sea  $z' + B' \in \ker i_*$ , es decir,  $i_*(z' + B') = iz' + B = B$ . De aquí que  $iz' = \partial s$  para algún  $s \in S_*$ . Luego  $\partial'' ps = p\partial s = pi z' = 0$ . Es así como  $ps \in Z(S''_*, \partial)$ . Finalmente, observemos que

$$d(ps + B'') = i^{-1}\partial p^{-1}ps + B' = i^{-1}\partial s + B' = i^{-1}iz' + B = z' + B'.$$

Por tanto  $\ker i_* \subseteq \operatorname{im} d$ .

De 1) y 2), se tiene  $\operatorname{im} i_* = \ker p_*$ ; 3) y 4) muestran que  $\ker d = \operatorname{im} p_*$ . Por último 5) y 6) prueban  $\ker i_* = \operatorname{im} d$ . Por tanto, la sucesión

$$\cdots \longrightarrow H_n(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_n(S_*) \xrightarrow{p_*} H_n(S''_*) \xrightarrow{d} H_{n-1}(S'_*) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(S_*) \longrightarrow \cdots$$

es exacta.  $\square$

**Teorema 3.12** (Naturalidad del morfismo de conexión) *Supongamos que existe un diagrama conmutativo de complejos de cadena con renglones exactos:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S'_* & \xrightarrow{i} & S_* & \xrightarrow{p} & S''_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & T'_* & \xrightarrow{j} & T_* & \xrightarrow{q} & T''_* & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

entonces existe un diagrama conmutativo de grupos abelianos con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(S'_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(S_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(S''_*) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(S'_*) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f'_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f''_* & & \downarrow f'_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(T'_*) & \xrightarrow{j_*} & H_n(T_*) & \xrightarrow{q_*} & H_n(T''_*) & \xrightarrow{d'} & H_{n-1}(T'_*) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

**Demostración.** Claramente el siguiente diagrama conmuta, pues  $H_n$  es un funtor.

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(S'_*) & \xrightarrow{i_*} & H_n(S_*) & \xrightarrow{p_*} & H_n(S''_*) & & \\ \downarrow f'_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f''_* & & \\ H_n(T'_*) & \xrightarrow{j_*} & H_n(T_*) & \xrightarrow{q_*} & H_n(T''_*) & & \end{array}$$

Ahora veamos la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} H_n(S_*'') & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(S_*') \\ \downarrow f_*'' & & \downarrow f_*' \\ H_n(T_*'') & \xrightarrow{d'} & H_{n-1}(T_*'). \end{array}$$

Sean  $S_* = (S_*, \partial)$  y  $T_* = (T_*, \Delta)$ . Si  $\text{cls } z'' \in H_n(S_*'')$ , en vista de que  $p$  es sobreyectiva existe  $s \in S_*$ , tal que  $\text{cls } z'' = \text{cls } ps$ , luego

$$\begin{aligned} f_*' d \text{cls } z'' &= f_*' d \text{cls } ps \\ &= f_*' \text{cls } i^{-1} \partial s \\ &= \text{cls } f_*' i^{-1} \partial s \\ &= \text{cls } j^{-1} f \partial s \\ &= \text{cls } j^{-1} \Delta f s \\ &= d' \text{cls } q f s \\ &= d' \text{cls } f'' p s \\ &= d' f_*'' \text{cls } p s \\ &= d' f_*'' \text{cls } z''. \end{aligned}$$

Por tanto,  $f_*' d = d' f_*''$ .

□

### 3.2.1. Homología relativa

La homología singular de un espacio topológico **relativa a** un subespacio, es una construcción en homología singular para pares de espacios topológicos.

La homología relativa es similar al cociente de grupos. Si  $X$  es un espacio topológico y  $A$  un subespacio de  $X$ , dos cadenas en  $X$  se dicen **iguales (mod A)** si su diferencia es una cadena en  $A$ . Una cadena en  $X$  es un **ciclo (mod A)**, si su frontera está contenida en  $A$ . Esto refleja la estructura de  $X - A$  y el modo en que está conectada con  $A$ . Entonces los cambios en el interior de  $A$  (fuera de su frontera con  $X - A$ ) no deberían alterar los grupos de homología de  $X - A$ .

Anteriormente ya habíamos señalado que si  $A$  es un subespacio de un espacio topológico  $X$ , las inclusiones inducen una sucesión exacta corta de complejos de cadena. (Vea Ejemplo 3.6.)

$$0 \longrightarrow S_*(A) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow S_*(X)/S_*(A) \longrightarrow 0.$$

Entonces vamos a darle nombre a la homología de un complejo cociente.

**Definición 3.18** *Sea  $X$  espacio topológico. Si  $A$  es un subespacio de  $X$ , entonces el  $n$ -ésimo grupo de homología relativa,  $H_n(X, A)$ , se define por  $H_n(X, A) = H_n(S_*(X)/S_*(A))$ .*

**Teorema 3.13** *(Sucesión exacta del par) Si  $A$  es un subespacio de  $X$ , entonces existe la siguiente sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{d} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Más aún, si  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  es una función continua de parejas, entonces existe el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Donde la función vertical es inducida por  $f$ .

**Demostración.** Para la prueba basta aplicar el Teorema 3.11 a la siguiente sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow (S_n(A), \partial|_{S_n(A)}) \xrightarrow{i^\#} (S_n(X), \partial) \xrightarrow{k^\#} (S_n(X)/S_n(A), \bar{\partial}_n) \longrightarrow 0.$$

Para la segunda parte se utiliza el Teorema 3.12. □

La siguiente observación nos muestra que existe un resultado similar al tercer teorema de isomorfismo de grupos (vea [11], pág. 111) en la categoría **Comp**.

**Observación 3.7** Si  $U_* \subset T_* \subset S_*$  son subcomplejos, entonces existe una sucesión exacta corta de complejos de cadena

$$0 \longrightarrow T_*/U_* \xrightarrow{i} S_*/U_* \xrightarrow{p} S_*/T_* \longrightarrow 0,$$

donde  $i_n : t_n + U_n \mapsto t_n + U_n$  y  $p_n : s_n + U_n \mapsto s_n + T_n$ , son tales que  $i = \{i_n : n \in \mathbb{Z}\}$  y  $p = \{p_n : n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Teorema 3.14** (Sucesión exacta triple  $(X, A, A')$ ). Si  $A' \subset A \subset X$  son subespacios del espacio topológico  $X$ , entonces existe la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(A, A') \longrightarrow H_n(X, A') \longrightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{d} H_{n-1}(A, A') \longrightarrow \cdots$$

Más aún, si existe el siguiente diagrama conmutativo de pares de espacios topológicos:

$$\begin{array}{ccccc} (A, A') & \longrightarrow & (X, A') & \longrightarrow & (X, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (B, B') & \longrightarrow & (Y, B') & \longrightarrow & (Y, B), \end{array}$$

entonces existe un diagrama conmutativo con renglones exactos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A, A') & \longrightarrow & H_n(X, A') & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A, A') & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B, B') & \longrightarrow & H_n(Y, B') & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B, B') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

**Demostración.**

De los Teoremas 3.11 y 3.12 aplicados a la sucesión exacta corta de complejos de cadena dada por la Observación 3.7.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_*(A)/S_*(A') & \longrightarrow & S_*(X)/S_*(A') & \longrightarrow & S_*(X)/S_*(A) & \longrightarrow & 0 & \text{ y a} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S_*(B)/S_*(B') & \longrightarrow & S_*(Y)/S_*(B') & \longrightarrow & S_*(Y)/S_*(B) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

□

Notemos que si  $A = \emptyset$ , entonces  $S_n(A) = 0$ , para  $n \in \mathbb{Z}$  y del Teorema 3.13 se sigue que  $H_n(X, \emptyset) \cong H_n(X)$ , es decir, los grupos de homología absoluta son en particular grupos de homología relativa.

La definición de grupos de homología relativa  $H_n(X, A)$  que hemos manejado hasta el momento no es adecuada para realizar ciertas pruebas. Es por eso que a continuación presentamos una definición equivalente. Para esto recordemos la definición de complejo cociente

$$S_*(X)/S_*(A) : \cdots \longrightarrow \frac{S_{n+1}(X)}{S_{n+1}(A)} \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} \frac{S_n(X)}{S_n(A)} \xrightarrow{\bar{\partial}_n} \frac{S_{n-1}(X)}{S_{n-1}(A)} \longrightarrow \cdots$$

Si  $\gamma \in S_n(X)$ , entonces  $\bar{\partial}_n(\gamma + S_n(A)) = \partial_n \gamma + S_{n-1}(A)$ . De aquí que

$$\begin{aligned} \ker \bar{\partial}_n &= \{\gamma + S_n(A) : \partial_n \gamma \in S_{n-1}(A)\}, \text{ y la} \\ \text{im } \bar{\partial}_{n+1} &= \{\gamma + S_n(A) : \gamma \in \text{im } \partial_{n+1} = B_n(X)\}. \end{aligned}$$

**Definición 3.19** *El grupo de los  $n$ -ciclos relativos mod  $A$  es*

$$Z_n(X, A) = \{\gamma \in S_n(X) : \partial_n \gamma \in S_{n-1}(A)\}.$$

*El grupo de las  $n$ -fronteras relativas mod  $A$  es*

$$\begin{aligned} B_n(X, A) &= \{\gamma \in S_n(X) : \gamma - \gamma' \in B_n(X) \text{ para algún } \gamma' \in S_n(A)\} \\ &= B_n(X) + S_n(A). \end{aligned}$$

**Teorema 3.15** *Sea  $X$  espacio topológico y  $A$  subespacio de  $X$ . Para todo  $n \geq 0$ ,*

$$H_n(X, A) \cong Z_n(X, A)/B_n(X, A).$$

**Demostración.** Por definición  $H_n(X, A) = \ker \bar{\partial}_n / \text{im } \bar{\partial}_{n+1}$ . Además, es fácil ver que  $\ker \bar{\partial}_n = Z_n(X, A)/S_n(A)$ . Por otro lado si  $\gamma + S_n(A) \in B_n(X, A)/S_n(A)$ , entonces  $\gamma \in S_n(X)$  y  $\gamma - \gamma' \in B_n(X)$ , para  $\gamma' \in S_n(A)$ , es decir, existe  $\alpha \in S_{n+1}(X)$ , tal que  $\partial_{n+1}(\alpha) = \gamma - \gamma'$ . Sea  $\alpha + S_{n+1}(A) \in S_{n+1}(X)/S_{n+1}(A)$ , entonces  $\bar{\partial}_{n+1}(\alpha + S_{n+1}(A)) = \partial_{n+1}(\alpha) + S_n(A) = \gamma - \gamma' + S_n(A) = \gamma + S_n(A)$ . De aquí que  $\gamma + S_n(A) \in \text{im } \bar{\partial}_n$ . Así  $B_n(X, A)/S_n(A) \subset \text{im } \bar{\partial}_n$ . Es claro que  $B_n(X, A)/S_n(A) \supset \text{im } \bar{\partial}_n$ . Luego  $\text{im } \bar{\partial}_{n+1} = B_n(X, A)/S_n(A)$ .

Si aplicamos el tercer teorema de isomorfismos de grupos (vea [11], pág. 111) tenemos el resultado.  $\square$

El siguiente teorema nos sirve para hacer algunos cálculos más adelante.

**Teorema 3.16** *Si  $X$  es conectable por trayectorias y  $A$  es un subespacio no vacío de  $X$ , entonces  $H_0(X, A) = 0$ .*

**Demostración.** Sea  $x_0 \in A$ , y  $\gamma = \sum m_x x \in Z_0(X, A) = S_0(X)$ . Dado que  $X$  es conectable por trayectorias, para cada  $x \in X$  existe una trayectoria  $\sigma_x : \Delta^1 \rightarrow X$  con  $\sigma_x(e_0) = x_0$  y  $\sigma_x(e_1) = x$ . Entonces  $\sum m_x \sigma_x \in S_1(X)$  y

$$\partial_1(\sum m_x \sigma_x) = \sum m_x x - (\sum m_x) x_0 = \gamma - (\sum m_x) x_0.$$

Definimos  $\gamma' = (\sum m_x) x_0 \in S_0(A)$ ; entonces  $\gamma - \gamma' = \partial_1(\sum m_x \sigma_x) \in B_0(X)$ , de aquí que  $\gamma \in B_0(X, A)$ .

Así,  $B_0(X, A) = Z_0(X, A)$ . Por lo tanto,  $H_0(X, A) = 0$ .  $\square$

**Teorema 3.17** *Si  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es la familia de componentes por trayectorias de  $X$  y  $A$  es subespacio de  $X$ , entonces para cada  $n \geq 0$ ,*

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\lambda} H_n(X_\lambda, A \cap X_\lambda).$$

**Demostración.** Análoga a la prueba del Teorema 3.4.  $\square$

**Corolario 3.5** *Sea  $X$  espacio topológico y  $A$  subespacio de  $X$ . Si  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  es la familia de componentes por trayectorias de  $X$ , entonces  $H_0(X, A)$  es grupo abeliano libre tal que, rango  $H_0(X, A) = \text{card } \{\lambda \in \Lambda : A \cap X_\lambda \neq \emptyset\}$ .*

**Demostración.** Del Teorema 3.17 tenemos  $H_0(X, A) \cong \bigoplus H_0(X_\lambda, A \cap X_\lambda)$ . Si  $A \cap X_\lambda = \emptyset$ , entonces del Teorema 3.5i)  $H_0(X_\lambda, A \cap X_\lambda) \cong H_0(X_\lambda) \cong \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, si  $A \cap X_\lambda \neq \emptyset$ , entonces del Teorema 3.16 se tiene que  $H_0(X_\lambda, A \cap X_\lambda) = 0$ . Por tanto,  $\text{rango } H_0(X, A) = \text{card } \{\lambda \in \Lambda : A \cap X_\lambda = \emptyset\}$ .  $\square$

**Corolario 3.6** *Si  $X$  es un espacio topológico con punto base  $x_0$  y  $X$  tiene exactamente  $r+1$  componentes por trayectorias, entonces  $H_0(X, x_0)$  es un grupo abeliano libre de rango  $r$ .*

**Demostración.** Sea  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  el conjunto de c.p.t. de  $X$ . Dado que las componentes por trayectorias son disjuntas por pares, la componente por trayectoria  $X_{\lambda_0}$  que contiene a  $x_0$  es única. Así,  $\{x_0\} \cap X_\lambda = \emptyset$  para todo  $\lambda \neq \lambda_0$ . Por el Corolario 3.5 el rango  $H_0(X, \{x_0\}) = \text{card } \{\lambda \in \Lambda : A \cap X_\lambda = \emptyset\} = r$ .  $\square$

Notemos bajo el contexto del Corolario 3.6 que  $H_0(X, x_0)$  tiene rango  $r$ . Por otro lado, del Teorema 3.5 tenemos que  $H_0(X)$  tiene rango  $r+1$ . Es decir, ambos grupos son diferentes. Sin embargo, el Teorema 3.18 nos dice que tales grupos coinciden a partir de  $n$  mayor que cero.

**Observación 3.8** *Si  $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{h} D$  es exacta, entonces  $g$  es sobreyectiva si y sólo si  $h$  es inyectiva.*

**Teorema 3.18** *Sea  $X$  un espacio topológico con punto base  $x_0$ . Entonces*

$$H_n(X, x_0) \cong H_n(X) \text{ para todo } n \geq 1.$$

**Demostración.** Si  $n \geq 2$ , del Teorema 3.3 tenemos que

$$H_n(\{x_0\}) = 0 = H_{n-1}(\{x_0\}).$$

Por otro lado, del Teorema 3.13 existe una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow H_n(\{x_0\}) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, x_0) \longrightarrow H_{n-1}(\{x_0\}) \longrightarrow \cdots \quad (1)$$



De la Observación 3.6c)  $H_n(X) \cong H_n(X, \{x_0\})$  para todo  $n \geq 2$ .

Consideremos el final de la sucesión (1), para  $n = 1$ , como se muestra a continuación.

$$0 \longrightarrow H_1(X) \xrightarrow{g} H_1(X, x_0) \longrightarrow H_0(\{x_0\}) \xrightarrow{h} H_0(X) \xrightarrow{k} H_0(X, x_0) \longrightarrow 0.$$

De la Observación 3.6a), la función  $g$  es inyectiva.

Ahora bien, notemos que la función  $h$  tiene dominio  $H_0(\{x_0\}) \cong \mathbb{Z}$  y contradominio el grupo abeliano libre  $H_0(X)$ . Aseguramos que  $h$  es inyectiva. Más aún, para demostrar que  $h$  es inyectiva es suficiente con probar que  $h \neq 0$ . En efecto, supongamos que  $h \neq 0$  y  $\ker h \neq 0$ , entonces  $H_0(X)$  contiene un subgrupo no trivial finito isomorfo a  $\mathbb{Z}/\ker h$  ( $\mathbb{Z}/\ker h \neq 0$  pues  $h \neq 0$ ) lo cual contradice el hecho de que el único subgrupo finito de un grupo abeliano libre (en este caso  $H_0(X)$ ) es el 0.

Por otro lado  $k$  es la función inducida por la inclusión, es decir, es la función  $S_0(X)/B_0(X) \rightarrow S_0(X)/B_0(X) + S_0(x_0)$  ( $S_0(X) = Z_0(X) = Z_0(X, x_0)$ ) dada por  $k(\gamma + B_0(X)) = (\gamma + B_0(X)) + S_0(x_0)$ , luego  $\ker k = (B_0(X) + S_0(x_0))/B_0(X)$ , la prueba del Teorema 3.5 describe a  $B_0(X)$ , como todos  $\sum m_x x$  con  $\sum m_x = 0$ ; por tanto  $\ker k \neq 0$ .

Dado que  $\ker k \neq 0$  e  $\text{im } h = \ker k$ , se tiene que  $\text{im } h \neq 0$ , de aquí que  $h \neq 0$ . Luego,  $h$  es inyectiva.

De la Observación 3.8 se tiene que  $g$  es sobreyectiva. Por lo tanto  $g$  es un isomorfismo, de aquí que  $H_1(X, x_0) \cong H_1(X)$ .  $\square$

### 3.2.2. Homología Reducida

La homología reducida es una pequeña modificación hecha a la teoría de homología singular. Este cambio se realizó para tener resultados que agrupen la mayor cantidad posible de casos excepcionales.

La construcción de los grupos de homología reducida nos evita el álgebra que se presentó al final de la prueba del Teorema 3.18.

**Definición 3.20** Sea  $(S_*, \partial)$  el complejo singular de un espacio topológico  $X$ . Definimos  $\tilde{S}_{-1}(X)$  como el grupo cíclico infinito con generador el símbolo  $\epsilon$ , y  $\tilde{\partial}_0 : S_0(X) \rightarrow \tilde{S}_{-1}(X)$  dado por  $\tilde{\partial}_0(\sum(m_x x)) = (\sum m_x)\epsilon$ . **El complejo singular aumentado de  $X$  es**

$$\tilde{S}_*(X) : \cdots \longrightarrow S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} S_{-1}(X) \longrightarrow 0.$$

Es fácil comprobar que  $\tilde{\partial}_0 \partial_1 = 0$ . Así, el complejo singular aumentado es de hecho un complejo con  $\tilde{S}_{-1}(X) \cong \mathbb{Z}$ .

**Definición 3.21** Los grupos de **homología reducida de un espacio topológico  $X$  son**

$$\tilde{H}_n(X) = H_n(\tilde{S}_*(X), \partial), \text{ para todo } n \geq 0.$$

Antes de continuar con el siguiente teorema hagamos algunas observaciones:

**Observación 3.9** Sea un espacio topológico  $X$ .

i) Si  $\alpha \in S_0(X)$  tal que  $\tilde{\partial}_0(\alpha) = 1$  y

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\partial}_0 \hookrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} \tilde{S}_{-1}(X) \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces  $S_0(X) = \ker \tilde{\partial}_0 \oplus \langle \alpha \rangle$ .

ii) Si  $B_i \subset A_i$  para  $i = 1, 2$ , entonces  $(A_1 \oplus A_2)/(B_1 \oplus B_2) \cong (A_1/B_1) \oplus (A_2/B_2)$ .

La prueba la puede consultar en [4], pág. 37.

El siguiente teorema nos da una forma de relacionar la homología relativa con la homología reducida, esta relación resulta ser útil a la hora de hacer cálculos.

**Teorema 3.19** *Sea un espacio topológico  $X$  y  $x_0 \in X$ . Para todo  $n \geq 0$ ,*

$$\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0).$$

**Demostración.** Si  $n \geq 1$ , por definición  $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ , del Teorema 3.18 tenemos que  $H_n(X) \cong H_n(X, x_0)$ . Por tanto  $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0)$ .

Si  $n = 0$ , el final de  $\tilde{S}_*(X)$  da una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \ker \tilde{\partial}_0 \hookrightarrow S_0(X) \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} \tilde{S}_{-1}(X) \longrightarrow 0.$$

Sea  $\alpha \in S_0(X)$  tal que  $\tilde{\partial}_0(\alpha) = 1$ , de la Observación 3.9i) tenemos que  $S_0(X) = \ker \tilde{\partial}_0 \oplus \langle \alpha \rangle$ , ( $\langle \alpha \rangle \cong \mathbb{Z}$ ). Dado que  $\tilde{\partial}_0 \partial_1 = 0$ , entonces  $B_0(X) = \text{im } \partial_1 \subset \ker \tilde{\partial}_0$  y  $S_0(X) = Z_0(X)$ ; de la Observación 3.9ii) tenemos

$$\begin{aligned} H_0(X) = S_0(X)/B_0(X) &= (\ker \tilde{\partial}_0 \oplus \langle \alpha \rangle)/B_0(X) \\ &\cong (\ker \tilde{\partial}_0/B_0(X)) \oplus \mathbb{Z} = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Supongamos que  $\text{rango } \tilde{H}_0(X) = r$ , entonces  $\text{rango } H_0(X) = r + 1$ . Por el Teorema 3.5ii)  $X$  tiene  $r + 1$  componentes por trayectorias. Así, del Corolario 3.6, se tiene que  $\text{rango } H_0(X, x_0) = r$ . Por tanto, dado que  $\tilde{H}_0(X)$  y  $H_0(X, x_0)$  tienen el mismo rango se sigue que  $\tilde{H}_0(X) \cong H_0(X, x_0)$ . (Vea [15], pág. 62.)  $\square$

**Corolario 3.7** *Sea  $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  la familia de componentes por trayectorias de un espacio topológico  $X$ , y sea  $x_\lambda \in X_\lambda$  una elección de puntos, uno por cada componente. Si  $x_0 \in X$  se encuentra en  $X_{\lambda_0}$ , entonces  $\tilde{H}_0(X)$  es un grupo abeliano libre con base  $\{cls(x_\lambda - x_0) : \lambda \neq \lambda_0\}$ .*

**Demostración.** De la Observación 3.9i)

$$S_0(X) = \ker \tilde{\partial}_0 \oplus \langle \alpha \rangle.$$

Donde  $\alpha \in S_0(X)$ , con  $\tilde{\partial}_0(\alpha) = 1$ ; elegimos  $\alpha = x_0$ . Dado que  $X$  es una base de  $S_0(X)$ , también  $\{x_0\} \cup Y$  es una base de  $S_0(X)$ , donde  $Y = \{x - x_0 : x \neq x_0\}$ .

Aseguramos que  $Y$  es una base de  $\ker \tilde{\partial}_0$ . En efecto, sea  $x - x_0 \in S_0(X)$ . Dado que  $\tilde{\partial}_0(x - x_0) = 0$ , entonces  $Y \subset \ker \tilde{\partial}_0$ , si  $\sum m_i x_i \in S_0(X)$  y  $\sum m_i = 0$ , entonces

$$\sum m_i x_i = \sum m_i x_i - (\sum m_i) x_0 = \sum m_i (x_i - x_0).$$

Por otro lado, observemos que  $\tilde{H}_0(X) = \ker \tilde{\partial}_0 / B_0(X)$  es un sumando directo de  $H_0(X) = S_0(X) / B_0(X) = (\ker \tilde{\partial}_0 + \langle x_0 \rangle) / B_0(X)$ . Del Teorema 3.5  $\{cls x_\lambda : \lambda \neq \lambda_0\} \cup \{cls x_0\}$  es una base de  $H_0(X)$ . Luego  $\{cls (x_\lambda - x_0) : \lambda \neq \lambda_0\} \cup \{cls x_0\}$  es también una base de  $H_0(X)$ . De aquí que  $\{cls (x_\lambda - x_0) : \lambda \neq \lambda_0\}$  es una base de  $\tilde{H}_0(X)$ .  $\square$

Más adelante veremos que la homología reducida tiene otros usos que nos permiten evitar argumentos algebraicos como en la prueba del Teorema 3.18.

### 3.3. Escisión y el Teorema de Mayer-Vietoris

Si  $A$  es un subespacio de  $X$ , entonces  $\bar{A}$  denota su clausura y  $A^\circ$  denota su interior.

La última propiedad fundamental de la homología singular que vamos a ver en este capítulo, son los axiomas de escisión. A continuación presentamos dos versiones.

Los axiomas de escisión nos van a ayudar a establecer una sucesión exacta larga conocida como, la sucesión de Mayer-Vietoris, tal sucesión es indispensable en el campo de las aplicaciones de la homología singular, que se describen en el Capítulo 4.

**Escisión I.** Suponga que  $U \subset A \subset X$  son subespacios con  $\bar{U} \subset A^\circ$ . Entonces la inclusión  $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$  induce isomorfismos

$$H_n(X - U, A - U) \cong H_n(X, A).$$

para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Es decir, podemos “cortar”  $U$  sin modificar los grupos de homología relativa.

**Escisión II.** Sean  $X_1$  y  $X_2$  subespacios de  $X$  con  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ . Entonces la inclusión  $j : (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X_1 \cup X_2, X_2) = (X, X_2)$  induce isomorfismos

$$H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_n(X, X_2).$$

para toda  $n \in \mathbb{Z}$ .

Notemos que la Escisión II se parece al segundo teorema de isomorfismos de grupos (vea [11], pág. 113).

**Teorema 3.20** *Escisión I es equivalente a Escisión II.*

**Demostración.** Supongamos Escisión I, y sea  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ . Definamos  $A = X_2$  y  $U = X - X_1$ . Aseguramos que  $\bar{U} \subset A^\circ$ . En efecto, sabemos que  $X_1^\circ \subset X_1$ , luego  $X - X_1 \subset X - X_1^\circ$ . Notemos que  $X - X_1^\circ$  es cerrado, entonces

$$\bar{U} = \overline{X - X_1} \subset X - X_1^\circ = (X_1^\circ \cup X_2^\circ) - X_1^\circ = X_2^\circ - X_1^\circ \subset X_2^\circ = A^\circ.$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} X - U &= X - (X - X_1) = X_1. \\ A - U &= X_2 - (X - X_1) = X_2 \cap (X - X_1)^c \\ &= X_2 \cap (X \cap X_1^c)^c \\ &= X_2 \cap (X^c \cup X_1) \\ &= (X_2 \cap X^c) \cup (X_2 \cap X_1) \\ &= X_2 \cap X_1, \end{aligned}$$

de aquí que  $(X - U, A - U) = (X_1, X_1 \cap X_2)$ . Finalmente  $(X, A) = (X_1^\circ \cup X_2^\circ, X_2) = (X_1 \cup X_2, X_2)$ , aplicando Escisión I a estos conjuntos se tiene Escisión II.

Supongamos Escisión II, y sea  $\bar{U} \subset A^\circ$ . Definamos  $X_2 = A$  y  $X_1 = X - U$ , luego  $U \subset \bar{U} \subset A^\circ$ , implica que  $X - U \supset X - \bar{U} \supset X - A^\circ$ . Dado que  $X - \bar{U}$  es abierto,  $X - \bar{U} = (X - \bar{U})^\circ \supset X - A^\circ$ , entonces

$$X_1^\circ \cup X_2^\circ = (X - U)^\circ \cup A^\circ \supset (X - A^\circ) \cup A^\circ = X.$$

Finalmente es fácil ver que  $(X_1, X_1 \cap X_2) = (X - U, A - U)$  y  $(X, X_2) = (X, A)$  aplicando Escisión II se obtiene el resultado.  $\square$

**Teorema 3.21** (*Barratt-Whitehead*) *Considere el diagrama conmutativo con renglones exactos*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{i_n} & B_n & \xrightarrow{p_n} & C_n & \xrightarrow{d_n} & A_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow g_n & & \downarrow h_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & A'_n & \xrightarrow{j_n} & B'_n & \xrightarrow{q_n} & C'_n & \xrightarrow{\Delta_n} & A'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

en el cual cada tercera función vertical  $h_n$  es un isomorfismo. Entonces existe una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{(i_n, f_n)} B_n \oplus A'_n \xrightarrow{g_n - j_n} B'_n \xrightarrow{d_n h_n^{-1} q_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

**Demostración.** La función  $(i_n, f_n)$  está definida por  $a_n \mapsto (i_n a_n, f_n a_n)$  y la función  $g_n - j_n$  esta dada por  $(b_n, a'_n) \mapsto g_n b_n - j_n a'_n$ . La prueba se obtiene siguiendo el diagrama. (Vea [6], pág. 186.)  $\square$

**Teorema 3.22** (*Mayer-Vietoris*) *Si  $X_1$  y  $X_2$  son subespacios de  $X$  tales que  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ , entonces existe una sucesión exacta*

$$\cdots \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{g_* - j_*} H_n(X) \xrightarrow{D} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

con  $i_1, i_2, g, j$  inclusiones y  $D = dh_*^{-1}q_*$  donde  $h$  y  $q$  son inclusiones y  $d$  es el morfismo de conexión del par  $(X_1, X_1 \cap X_2)$ .

**Demostración.** Observemos que el siguiente diagrama de pares de espacios topológicos conmuta cuando todas las funciones son inclusiones:

$$\begin{array}{ccccc} (X_1 \cap X_2, \emptyset) & \xrightarrow{i_1} & (X_1, \emptyset) & \xrightarrow{p} & (X_1, X_1 \cap X_2) \\ \downarrow i_2 & & \downarrow g & & \downarrow h \\ (X_2, \emptyset) & \xrightarrow{j} & (X, \emptyset) & \xrightarrow{q} & (X, X_2). \end{array}$$

por el Teorema 3.14, existe un diagrama conmutativo con renglones exactos:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_n(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{i_{1*}} & H_n(X_1) & \xrightarrow{p_*} & H_n(X_1, X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{d} & H_{n-1}(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow i_{2*} & & \downarrow g_* & & \downarrow h_* & & \downarrow i_{2*} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_n(X_2) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X) & \xrightarrow{q_*} & H_n(X, X_2) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(X_2) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

De la Escisión II se tiene que cada  $h_*$  es un isomorfismo. Del Teorema 3.21 se obtiene el resultado.  $\square$

**Corolario 3.8** (Teorema de Mayer-Vietoris para Homología Reducida).

Si  $X_1$  y  $X_2$  son subespacios de  $X$  tales que  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$  y  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ , entonces existe una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_n(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_n(X_1) \oplus \tilde{H}_n(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdots$$

con las funciones inducidas como en el Teorema 3.22. Esta sucesión termina de la siguiente manera

$$\cdots \longrightarrow \tilde{H}_0(X_1) \oplus \tilde{H}_0(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_0(X) \longrightarrow 0.$$

**Demostración.** Tomamos  $x_0 \in X_1 \cap X_2$  y seguimos los mismos pasos que en la demostración del Teorema 3.22 utilizando el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 (X_1 \cap X_2, \{x_0\}) & \longrightarrow & (X_1, \{x_0\}) & \longrightarrow & (X_1, X_1 \cap X_2) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (X_2, \{x_0\}) & \longrightarrow & (X, \{x_0\}) & \longrightarrow & (X, X_2).
 \end{array}$$

$\square$

**Lema 3.6** Sean  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$  e  $i_j : X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_j$  la inclusión para  $j = 1, 2$ , y sea  $z \in H_1(X_1 \cap X_2)$ . Si  $H_{n+1}(X) = 0$ , entonces  $z = 0$  si y sólo si  $i_{1*} z = 0$  y  $i_{2*} z = 0$ .

**Demostración.** Consideremos una parte de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X) \longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$$

Dado que  $H_{n+1}(X) = 0$ , la función  $(i_{1*}, i_{2*})$  es inyectiva. Entonces  $\text{cls } z = 0$  si y sólo si  $i_{1*} \text{ cls } z = 0$  en  $H_n(X_1)$  y  $i_{2*} \text{ cls } z = 0$  en  $H_n(X_2)$ .  $\square$

**Lema 3.7** *Suponga que  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ . Entonces cada  $n$ -ciclo  $z$  en  $X$  es análogo a un ciclo de la forma  $\gamma_1 + \gamma_2$ , donde  $\gamma_i \in S_n(X_i)$ ,  $i=1,2$ . Más aún, si  $D : H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2)$  es el morfismo de conexión en la sucesión de Mayer-Vietoris, entonces*

$$D(\text{cls } z) = D(\text{cls}(\gamma_1 + \gamma_2)) = \text{cls}(\partial\gamma_1).$$

**Demostración.** Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & S_n(X_1)/S_n(X_1 \cap X_2) & \\ & \downarrow h_{\#} & \\ S_n(X) & \xrightarrow{q_{\#}} & S_n(X_1) + S_n(X_2)/S_n(X_2, ) \end{array}$$

donde  $q_{\#}$  manda  $\gamma_1 + \gamma_2$  a su clase lateral módulo  $S_n(X_2)$ , y  $h_{\#}$  es el isomorfismo del segundo teorema de isomorfismos de grupos (vea [11], pág. 113), entonces  $h_{\#}^{-1}$  manda  $\gamma_1 + \gamma_2 + S_n(X_2)$  a  $\gamma_1 + S_n(X_1 \cap X_2)$ , luego

$$\begin{aligned} D(\text{cls}(\gamma_1 + \gamma_2)) &= dh_{\#}^{-1}q_{\#}(\text{cls}(\gamma_1 + \gamma_2)) \\ &= dh_{\#}^{-1}(\gamma_1 + \gamma_2 + S_n(X_2)) \\ &= d(\gamma_1 + S_n(X_1 \cap X_2)), \end{aligned}$$

donde  $d$  es el morfismo de conexión de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_{\#}} S_*(X_1) \xrightarrow{j_{\#}} S_*(X_1)/S_*(X_1 \cap X_2) \longrightarrow 0.$$

Como  $d = i_{\#}^{-1}\partial j_{\#}^{-1}$ , entonces  $j_{\#}$  eleva  $\gamma_1 + S_n(X_1 \cap X_2)$  a  $\gamma_1$ , mientras que la frontera lo baja un nivel a  $\partial\gamma_1$ , y por medio de  $i_{\#}^{-1}$  consideramos a  $\partial\gamma_1$  en  $X_1 \cap X_2$ . Entonces  $D(\text{cls}(\gamma_1 + \gamma_2)) = \text{cls}(\partial\gamma_1)$ , en  $H_{n-1}(X_1 \cap X_2)$ .  $\square$



## Capítulo 4

# Aplicaciones

El propósito de este capítulo es aplicar los argumentos vistos en los capítulos anteriores de las teorías de homotopía y homología singular, a diversos espacios topológicos.

Observemos que es fácil asociar una interpretación geométrica a los grupos de homotopía. Sin embargo, por lo general determinarlos no suele ser igual de sencillo. Con los grupos de homología singular sucede lo contrario, es decir, son generalmente mucho más fáciles de calcular, pero más complicado de interpretarlos geoméricamente. De aquí que existen más aplicaciones de la teoría de homología singular que de la teoría de homotopía.

Es importante destacar que la teoría de homotopía tiene aplicaciones en otros campos de la matemática. Por ejemplo, en la teoría de nudos (vea [2], pág. 457), teoría de grafos (vea, [13], pág. 215 ), en física (vea [3], pág. 19). Desafortunadamente tales aplicaciones requieren conocer más del área en la que se aplique la teoría de homotopía.

La estructura del presente capítulo es la siguiente. Mostramos algunas técnicas utilizadas para determinar grupos de homotopía, es decir, hacemos uso de resultados del Capítulo 2. Posteriormente calculamos los grupos de homología singular para la  $n$ -esfera, y resolvemos algunos problemas de homeomorfismos. Por último, se prueban teoremas para espacios euclidianos, utilizando herramientas de la Topología

Algebraica. Los teoremas que se prueban en esta parte son: Teorema del Punto Fijo de Brouwer (Teorema 4.10), Teorema Fundamental del Álgebra (Teorema 4.11), Teorema de la Bola Peluda (Teorema 4.17), Teorema de Borsuk-Ulam (Corolario 4.4), Teorema de Lusternik-Schnirelmann (Corolario 4.5), Teorema de Separación de Jordan-Brouwer (Teorema 4.24) y Teorema de Invarianza del Dominio (Teorema 4.25).

### 4.1. Cálculo del grupo fundamental de algunos espacios topológicos

En esta sección presentamos algunos ejemplos de como determinar el grupo fundamental de un espacio topológico  $X$ .

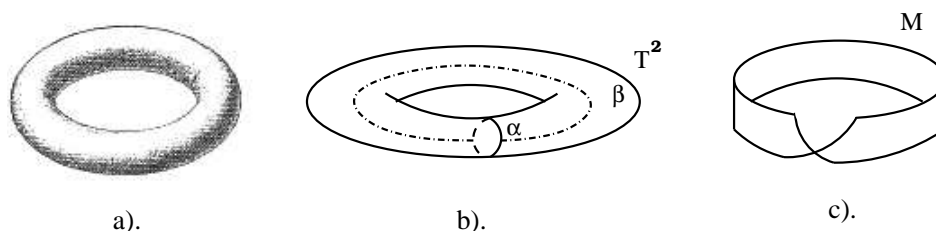


Figura 4.1:

**a)**  $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ .

Del Ejemplo 2.2,  $\mathbb{S}^1$  es retracto de deformación de  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Por el Teorema 2.6,  $\mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{C} - \{0\}$  tienen el mismo tipo de homotopía. Por último, del Teorema 2.18  $\pi_1(\mathbb{C} - \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ .

**b)** Si  $Y$  es contraíble y  $X = Y \times \mathbb{S}^1$ , del Teorema 2.17 tenemos que  $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ . En particular si  $Y = D^2$  y  $X = D^2 \times \mathbb{S}^1$ , es decir, se tiene un toro sólido (ver Figura 4.1a). Luego  $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ .

**c)** Si  $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , del Teorema 2.17 tenemos que  $\pi_1(T^2) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Es decir,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  es el grupo fundamental del toro. (Vea Figura 4.1b).)

d) Si  $M$  es la banda de Möbius, (Figura 4.1c)) entonces  $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$ . El lazo ecuatorial,  $\lambda_e(t) = q(t, 1/2)$ , donde  $q : I \times I \rightarrow M$  es la identificación canónica, dada por  $q(t, s) = 1 - t$ , representa a un generador de  $\pi_1(M)$ . (Vea [2], pág. 392.)

Los ejemplos anteriores son sólo una pequeña muestra de la gran cantidad de espacios topológicos que están relacionados con la circunferencia tales como el cilindro, cono, etc.

## 4.2. Aplicaciones del Teorema de Seifert y Van Kampen

En esta sección se determinan grupos fundamentales de diversas construcciones en espacios topológicos, mediante el teorema de Seifert Van y Kampen.

Recordemos los resultados de la Sección 2.5.3.

**Teorema 4.1** *El grupo fundamental de una cuña de  $k$  copias del círculo,  $\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_k^1$ , es libre generado por los elementos  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_k^1, x_0)$ , donde  $x_0$  es el punto base de la cuña proveniente de  $1 \in \mathbb{S}_i^1$  y la clase  $\alpha_i$  está representada por el lazo canónico  $\lambda_i : I \rightarrow \mathbb{S}_i^1 \hookrightarrow \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_k^1$ ,  $\lambda_i(t) = e^{2\pi it} \in \mathbb{S}_i^1$ . Por lo tanto,*

$$\pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_k^1, x_0) \cong *Z_i, \text{ con } Z_i \cong \mathbb{Z} \text{ para } i = 1, \dots, k.$$

**Demostración.** La prueba se hace por inducción sobre  $k$ . Sea  $X = \mathbb{S}_1^1 \vee \mathbb{S}_2^1$ , consideremos  $X_1 = \mathbb{S}_1^1 \vee (\mathbb{S}_2^1 - \{-1\})$  y  $X_2 = (\mathbb{S}_1^1 - \{-1\}) \vee \mathbb{S}_2^1$ , es claro que  $X, X_1$  y  $X_2$  satisfacen las hipótesis del teorema de Seifert y Van Kampen. Además,  $X_1 \cap X_2$  es homeomorfo a una cruz abierta  $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \{0\} \times \mathbb{R}$ , por tanto contraíble. Luego  $X_1 \cap X_2$  es simplemente conexo. Observemos que  $\mathbb{S}_1^1$  y  $X_1$  son del mismo tipo de homotopía al igual que  $\mathbb{S}_2^1$  y  $X_2$ . Del Teorema 2.18 se tiene que  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}_1^1, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0)$  y  $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}_2^1, x_0) \cong \pi_1(X_2, x_0)$ . Del Corolario 2.6b) tenemos  $\pi_1(\mathbb{S}_1^1, 1) * \pi_1(\mathbb{S}_2^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \mathbb{S}_2^1, x_0)$ . Más aún, las clases  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  provienen de los generadores

canónicos de  $\pi_1(\mathbb{S}_1^1, 1)$  y  $\pi_1(\mathbb{S}_2^1, 1)$ , entonces tales clases son los generadores de  $\pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \mathbb{S}_2^1, x_0)$  como grupo libre. Por tanto,  $\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, x_0)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

Supongamos que para una cuña de  $k - 1$  copias de  $\mathbb{S}^1$  el resultado se cumple. Sean

$$X_1 = \mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{k-1}^1 \vee (\mathbb{S}_k^1 - \{1\}),$$

el cual es homotópicamente equivalente, vía inclusión, a  $\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{k-1}^1$  y

$$X_2 = (\mathbb{S}_1^1 - \{-1\}) \vee \cdots \vee (\mathbb{S}_{k-1}^1 - \{-1\}) \vee \mathbb{S}_k^1,$$

que, también vía la inclusión, es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}_k^1$ . Ya que  $X_1 \cap X_2$  es homeomorfo a una estrella abierta de  $2k$  picos, entonces  $X_1 \cap X_2$  es contraíble y, por el Corolario 2.6b),

$$\pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_{k-1}^1, x_0) * \pi_1(\mathbb{S}_k^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_k^1, x_0).$$

Análogamente al caso  $k = 2$ , los generadores de  $\pi_1(\mathbb{S}_1^1 \vee \cdots \vee \mathbb{S}_k^1, x_0)$  como grupo libre son  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ . Por tanto el teorema se cumple.  $\square$

**Definición 4.1** Si  $r \in \mathbb{Z}$  y  $r \geq 0$ , una ***r-célula cerrada*** o ***r-célula***  $e_r$  es una copia homeomorfa de  $I^r$ . En particular  $e_0$  es un punto.

Otro caso importante en el que se aplica el teorema de Seifert y Van Kampen es en la adjunción de células a un espacio topológico.

El proceso de adjuntar un espacio  $X$  a un espacio  $Y$  por medio de una función  $f$  tiene gran importancia en la topología moderna, ya que permite construir nuevos espacios topológicos.

La unión libre  $X \sqcup Y$  de espacios disjuntos  $X, Y$  es el conjunto  $X \cup Y$  con la topología generada por los abiertos dados de la siguiente forma:  $U \subset X \sqcup Y$  es abierto si y sólo si  $U \cap X$  es abierto en  $X$  y  $U \cap Y$  es abierto en  $Y$ . (Vea [10], pág. 127).

**Definición 4.2** Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios disjuntos,  $A \subset X$  cerrado y  $f : A \rightarrow Y$  función continua. Consideremos en  $X \sqcup Y$ , la relación de equivalencia  $R$  dada por  $a \sim f(a)$  para cada  $a \in A$ . El espacio cociente  $X \sqcup Y/R$  se le conoce como  **$X$  adjunto a  $Y$  por  $f$**  y se denota por  $X \cup_f Y$ ;  $f$  es denominada la **función adjunción**.

Consideremos una función sobreyectiva  $f$  y la inclusión  $\iota$  como se ilustra en el diagrama  $D^n \xleftarrow{\iota} \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{f} Y$ . El espacio de adjunción resultante  $\mathbf{X} \cup_f \mathbf{D}^n$  se dice que se obtiene de adjuntar una célula de dimensión  $n$  al espacio  $X$ . A este espacio se le denota como  $\mathbf{X} \cup_f e_n$ .

**Teorema 4.2** Sea  $Y$  un espacio topológico y  $X = Y \cup_f e_n$ , donde  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$  es la función adjunción. Si  $x_0$  es el punto en  $X$  que proviene de  $0 \in D^n \subset Y \sqcup D^n$  al hacer la identificación, entonces  $Y$  es un retracto de deformación de  $X - \{x_0\}$  (vea Definición 2.3).

**Demostración.** Vea [2], pág. 364. □

El siguiente teorema nos muestra que las clases de homotopía de un espacio topológico no se ven afectadas si se le adjunta una  $n$ -célula por medio de una aplicación continua siempre y cuando esa  $n$ -célula cumpla que  $n \geq 3$ .

**Teorema 4.3** Sea  $Y$  un espacio topológico y  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$  continua y sobreyectiva para  $n \geq 3$ . Si  $y_0 \in Y$ , entonces la inclusión canónica  $i : Y \hookrightarrow Y \cup_f e_n$  induce un isomorfismo

$$i_* : \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y \cup_f e_n, y_0).$$

**Demostración.** Sea  $X = Y \cup_f e_n$  y  $q : D^n \sqcup Y \rightarrow X$  la identificación. Los subespacios  $X_1 = q((D^n - \{0\}) \sqcup Y)$  y  $X_2 = q(D^{n^\circ})$  claramente son abiertos; de los Teoremas 4.2 y 2.6, la inclusión canónica  $Y \hookrightarrow X_1$  es una equivalencia homotópica. Así, del Teorema 2.18 se tiene que  $\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(X_1, y_0)$ . Notemos

que  $X_2$  es contraíble. Aseguramos que  $X_1 \cap X_2 \approx D^{n^o} - \{0\}$  es simplemente conexo. En efecto,  $X_1 \cap X_2 \approx D^{n^o} - \{0\}$  el cual es del mismo tipo de homotopía de la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , pero  $\mathbb{S}^{n-1}$  es simplemente conexo, pues todo lazo en  $\mathbb{S}^{n-1}$  es nulo homotópico para  $n \geq 3$ . Por tanto, las hipótesis del Corolario 2.6c) se cumplen, es decir, si  $x_0 \in X_1 \cap X_2$  la inclusión  $X_1 \hookrightarrow X$  induce un isomorfismo entre  $\pi_1(X_1, x_0)$  y  $\pi_1(X, x_0)$ .

Sea  $\omega$  una trayectoria en  $X_1$ , de  $x_0$  a  $y_0$ , entonces el morfismo de grupos inducido por la inclusión  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$  se descompone como en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(X, y_0) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \varphi_\omega \\
 \pi_1(X_1, y_0) & & \pi_1(X, y_0) \\
 \downarrow \varphi_\omega \cong & & \downarrow \cong \\
 \pi_1(X_1, x_0) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X, x_0),
 \end{array}$$

donde los isomorfismos sin nombre están inducidos por inclusiones y  $\varphi_\omega$  es el isomorfismo del Teorema 2.15, en  $X_1$  y en  $X$  según el caso. Por lo tanto  $i_*$  es un isomorfismo. □

El siguiente teorema nos muestra qué sucede en caso de adjuntar una 2-célula a un espacio topológico.

**Teorema 4.4** *Sea  $Y$  espacio topológico y  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow Y$  continua. Si  $\lambda_f : I \rightarrow Y$  es el lazo tal que  $\lambda_f(t) = f(e^{2\pi it})$  y  $\omega$  es una trayectoria en  $Y$ , de  $y_0$  a  $f(1)$ , entonces la inclusión  $i : Y \hookrightarrow Y \cup_f e_2$  induce un epimorfismo  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(Y \cup_f e_2, y_0)$  y el kernel es el subgrupo normal generado por el elemento  $\alpha_f = [\omega \lambda_f \omega^{-1}] \in \pi_1(Y, y_0)$ . Por lo tanto*

$$\pi_1(Y \cup_f e_2, y_0) \cong \pi_1(Y, y_0) / N_{\alpha_f}$$

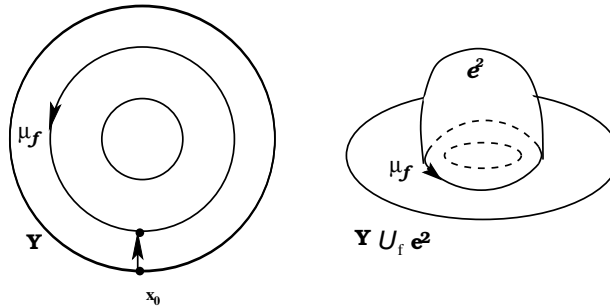


Figura 4.2: Adjunción de una 2-célula,  $e_2$  a un espacio topológico  $Y$ .

Antes de presentar la demostración, observemos que. El grupo  $N_{\alpha_f}$  no depende de la trayectoria  $\omega$ ; a saber, el lazo  $\mu_f = \omega \lambda_f \omega^{-1}$  que rodea la célula es contraíble en  $Y \cup_f e_2$ , ya que se puede contraer por encima de la célula. Se dice que el elemento  $\alpha_f \in \pi_1(Y, y_0)$  se mata al pegar la 2-célula a través de  $f$ . En la Figura 4.2 se ilustra lo que se acaba de describir.

**Demostración.** Utilizando la misma notación de la demostración del Teorema 4.3, tenemos que la inclusión canónica  $Y \hookrightarrow X_1$  es una equivalencia homotópica, y  $X_2$  es contraíble; más aún,  $X_1 \cap X_2 = D^{2^{\circ}} - \{0\}$  es del mismo tipo de homotopía de  $\mathbb{S}^1$ , entonces  $X_1 \cap X_2$  no es simplemente conexo. Del Corolario 2.6a) la inclusión  $X_1 \hookrightarrow X$  induce un epimorfismo en el grupo fundamental, con ello,  $i_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$  es un epimorfismo.

Por otro lado, el lazo  $\lambda'_f : I \rightarrow X$ , tal que  $\lambda'_f(t) = q(\frac{1}{2}e^{2\pi it})$ , que de hecho está en  $X_1 \cap X_2$ , es tal que genera  $\pi_1(X_1 \cap X_2, z_0) \cong \mathbb{Z}$ . Supongamos que  $z_0 = q(0) = q(1)$  y dado que  $X_2$  es un retracto de deformación de  $Y$ , entonces existe  $r : Y \rightarrow X_2$ , tal que deforma  $\lambda'_f$  en  $\lambda_f$ , es decir,  $r \circ \lambda'_f = \lambda_f$ . Del Corolario 2.6a) se tiene que, si  $j : X_1 \hookrightarrow X$  es la inclusión, entonces  $\ker j_*$  está generado como subgrupo normal por el elemento  $[\lambda'_f]$ . Si  $i_* : \pi_1(Y, f(1)) \rightarrow \pi_1(X, f(1))$  es el morfismo de grupos inducido por la inclusión, entonces  $\ker i_*$ , está generado como subgrupo normal por  $[\lambda_f]$ . De manera análoga a la demostración anterior, es decir, construyendo un diagrama similar tenemos que  $\ker i'_*$ , está generado por  $\alpha_f$ , para  $i'_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$ . Con todo se tiene el resultado.  $\square$

Con estos resultados podemos hacer algunos cálculos interesantes. Para eso, requiramos de lo siguiente.

**Definición 4.3** Sea  $\mathbb{RP}^n = \{\{x, -x\} | x \in \mathbb{S}^n\}$ , y  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  dada por  $\pi(x) = \{x, -x\}$ . El conjunto  $\mathbb{RP}^n$  con la topología cociente respecto a la función  $\pi$  se llama el ***n*-espacio proyectivo real**.

### Ejemplo 4.1

a) Sea  $X_k = \mathbb{S}^1 \cup e_2$ , para cada entero  $k \geq 1$ , donde la 2-célula se adjunta por medio de la aplicación  $g_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  de grado  $k$ , dada por  $g_k(\zeta) = \zeta^k$ . Si  $[\alpha_1] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  es el generador canónico, entonces del Teorema 4.4 tenemos que  $\pi_1(X_k, 1) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)/N_{\alpha_k}$ , donde  $\alpha_k = [\omega \lambda_{g_k} \omega^{-1}] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  y  $\lambda_{g_k}$  es como en el Teorema 4.4. Dado que  $N_{\alpha_k}$  no depende de la trayectoria cerrada  $\omega$ , entonces  $\alpha_k = [\lambda_{g_k}]$ . Como  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  es cíclico y  $\lambda_{g_k}$  es de grado  $k$ , se tiene que  $\alpha_k = \alpha_1^k \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ , es decir,  $\alpha_k$  es la  $k$ -ésima potencia del generador canónico. Por tanto

$$\pi_1(X_k, 1) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},$$

es decir, este grupo fundamental es cíclico de orden  $k$ . (Vea [2], pág. 348.)

b) La construcción de a) para  $k = 2$  se obtiene  $X_2 \approx \mathbb{RP}^2$ , es decir, el plano proyectivo. Por lo tanto,

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Otra aplicación del Teorema de Seifert y Van Kampen, consiste en determinar los grupos fundamentales de una variedad compacta de dimensión 2 (vea [13], pág. 33). Aunque es interesante tal aplicación, sólo vamos a describirla a grandes rasgos, ya que requiere de algunas definiciones como **suma conexa** y **presentación poligonal de una superficie**, las cuales no se mencionan en esta tesis, pues no es el objetivo estudiar tales conceptos. Sin embargo, suma conexa y presentación



poligonal de una superficie, se puede consultar en [13], pág. 130 y [13], pág. 126, respectivamente.

Una variedad de dimensión 2 es una **superficie S**. El siguiente teorema nos describe cómo son estas superficies.

**Teorema 4.5** *Toda superficie compacta, S, es homeomorfa a una de las superficies siguientes.*

- i) *La esfera,  $S^2$ .*
- ii) *Una suma conexa de toros,  $T^2 \# \dots \# T^2$*
- iii) *Una suma conexa de 2-espacios proyectivos reales,  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ .*

Para mejor referencia vea [13], pág. 138.

**Teorema 4.6** *Sea M una variedad de dimensión 2 determinada por una presentación poligonal de una superficie,  $\langle a_1 \cdots a_n \mid W \rangle$ , con una cara, en la cual todos los vértices están identificados con un sólo punto. Entonces  $\pi_1(M)$  tiene la presentación  $\langle a_1 \cdots a_n \mid W \rangle$ .*

En la demostración del Teorema 4.6 se aplica el teorema de Seifert y Van Kampen, vea [13], pág. 218.

De los Teoremas 4.6 y 4.5, tenemos la siguiente presentación (vea Sección 1.2) para grupos fundamentales de las siguientes superficies compactas. (Vea [13], pág. 219.)

- i)  $\pi_1(S^2) \cong 0$ .
- ii)  $\pi_1(T^2 \# \dots \# T^2) \cong \langle \beta_1, \gamma_1, \dots, \beta_n, \gamma_n \mid \beta_1 \gamma_1 \beta_1^{-1} \gamma_1^{-1} \dots \beta_n \gamma_n \beta_n^{-1} \gamma_n^{-1} = 1 \rangle$ .
- iii)  $\pi_1(\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2) \cong \langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \mid \beta_1^2 \beta_2^2 \dots \beta_n^2 = 1 \rangle$ .

### 4.3. Aplicaciones de los grupos de Homotopía de dimensiones superiores

Dada la dificultad para determinar los grupos de homotopía de orden superior, presentamos algunos resultados conocidos. Veá [21], pág. 36.

**Teorema 4.7**

- i)  $\pi_n(\mathbb{S}^k) \cong \pi_{n+1}(\mathbb{S}^{k+1})$ , si  $n, k > 1$ .
- ii)  $\pi_n(\mathbb{S}^k) = 0$ , si  $n < k$ .
- iii)  $\pi_1(\mathbb{S}^k) = 0$ , si  $k > 1$ .
- iv)  $\pi_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ , si  $n \geq 1$ .

En la siguiente tabla mostramos algunos cálculos de los grupos  $\pi_i(\mathbb{S}^n)$  que se han hecho, observemos que en ella están incluidos **ii)-iv)** del Teorema 4.7. (Veá [1], pág. 339.)

$\pi_i(\mathbb{S}^n)$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
$i = 1$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
$i = 2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
$i = 3$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
$i = 4$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
$i = 5$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
$i = 6$	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
$i = 7$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
$i = 8$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$i = 9$	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$i = 10$	0	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$
$i = 11$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_{24}$
$i = 12$	0	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0

**Definición 4.4** Sean  $X$  y  $E$  espacios topológicos y, sea  $p : E \rightarrow X$  continua y sobreyectiva. Se dice que  $p$  es una **proyección recubridora** y que  $E$  es un **espacio recubridor de  $X$**  si para todo  $x \in X$ , existe una vecindad  $U(x)$  con  $p^{-1}(U(x)) = \bigcup \nu_\alpha$  donde  $\nu_\alpha$  son abiertos disjuntos en  $E$  tales que  $p|_{\nu_\alpha} : \nu_\alpha \rightarrow U(x)$  son homeomorfismos.

**Teorema 4.8** Sean  $E$  y  $X$  espacios topológicos. Si  $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$  es una proyección recubridora, entonces

$$(p_*)_n : \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0).$$

es un isomorfismo para todo  $n \geq 2$ .

**Demostración.** (vea [1], pág. 342).

Existen algunos resultados como el Teorema 4.8 que ayudan mucho a la hora de determinar grupos de homotopía de dimensiones superiores. A continuación mostramos dos ejemplos.

- 1)  $\pi_n(\mathbb{R}P^m) \cong \pi_n(\mathbb{S}^m)$ , para todo  $n \geq 2$  y todo  $m$ . En efecto, sólo basta tomar la identificación  $\pi : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}P^m$  de la Definición 4.3 y mostrar que es una proyección recubridora de hecho la prueba se puede consultar en [14], pág. 372.
- 2)  $\pi_n(\mathbb{S}^1) = 0$  para  $n \geq 2$ . Para esto se toma la proyección recubridora  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  tal que  $t \mapsto e^{it}$  y aplicamos el Teorema 4.8.

## 4.4. Homología de la esfera y algunas aplicaciones

A continuación presentamos ejemplos de cómo determinar grupos de homología singular, pero lo más importante de esta sección, es mostrar cómo trabaja la Topología Algebraica a la hora de clasificar espacios topológicos, es decir, ejemplos relacionados con homeomorfismos.

**Teorema 4.9** Sea  $\mathbb{S}^n$  la  $n$ -esfera, donde  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$ .

i) Si  $n = 0$ , entonces

$$H_p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

ii) Si  $n > 0$ , entonces

$$H_p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ o } p = n \\ 0 & \text{otra forma.} \end{cases}$$

**Demostración.** Observemos que de la ecuación (1) del Teorema 3.19,  $H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$  y por el Teorema 3.16 tenemos que **i)** y **ii)** se pueden expresar en términos de homología reducida por

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

Entonces vamos a probar el resultado en términos de homología reducida.

Hagamos inducción sobre  $n \geq 0$  para probar que  $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n)$  es como se asegura para todo  $p \geq 0$ .

Para  $n = 0$ , del Teorema 3.19 tenemos que  $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^0) \cong H_p(\mathbb{S}^0, 1)$ , luego por los Teoremas 3.17 y 3.16, se tiene que  $H_p(\mathbb{S}^0, 1) \cong H_p(\{-1\}, \emptyset) + H_p(\{1\}, 1) \cong H_p(\{-1\}, \emptyset) \cong H_p(\{-1\})$ . Por tanto del Ejemplo 3.2 y del Teorema 3.3 se deduce que

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Supongamos  $n > 0$ . Sean  $a$  y  $b$  los polos norte y sur de  $\mathbb{S}^n$ , respectivamente. Sea  $X_1 = \mathbb{S}^n - \{a\}$  y  $X_2 = \mathbb{S}^n - \{b\}$ . Observemos que  $\mathbb{S}^n = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ . Más aún,  $X_1$  y  $X_2$  son contraíbles y  $X_1 \cap X_2 = \mathbb{S}^n - \{a, b\}$  tiene el mismo tipo de homotopía del ecuador  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Aplicando la sucesión de Mayer-Vietoris para homología reducida, obtenemos la siguiente sucesión exacta

$$\tilde{H}_p(X_1) \oplus \tilde{H}_p(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \tilde{H}_{p-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_{p-1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{p-1}(X_2).$$

Dado que  $X_1$  y  $X_2$  son contraíbles se tiene que

$$\tilde{H}_p(X_1) \oplus \tilde{H}_p(X_2) = 0 = \tilde{H}_{p-1}(X_1) \oplus \tilde{H}_{p-1}(X_2).$$

De la Observación 3.6c) y Corolario 3.3 se tiene que

$$\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n) \cong \tilde{H}_{p-1}(X_1 \cap X_2) \cong \tilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Por inducción si  $p - 1 = n - 1$ , entonces  $\tilde{H}_{p-1}(\mathbb{S}^{p-1}) = \mathbb{Z}$  y 0 de otra forma. Por tanto si  $p = n$ , entonces  $\tilde{H}_p(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$  y 0 de otra forma.  $\square$

En la prueba anterior se aprecia el valor de la homología reducida, ya que sin homología reducida, el paso inductivo debería ser dividido en dos casos:  $p - 1 > 0$  y  $p - 1 = 0$  lo que requiere un argumento extra que involucra grupos abelianos libres.

Ahora presentamos algunos resultados en donde la Topología Algebraica sirve para demostrar que dos espacios topológicos que no son homeomorfos.

**Corolario 4.1** *Si  $m \neq n$ , entonces  $\mathbb{S}^m$  y  $\mathbb{S}^n$  no son homeomorfos. De hecho no tienen el mismo tipo de homotopía.*

**Demostración.** Supongamos que  $\mathbb{S}^m$  y  $\mathbb{S}^n$  son homeomorfos, entonces tienen el mismo tipo de homotopía, por el Corolario 3.3 se tiene que  $H_p(\mathbb{S}^m) \cong H_p(\mathbb{S}^n)$  para todo  $p$ , esto contradice el Teorema 4.9.  $\square$

**Corolario 4.2** *Si  $m \neq n$ , entonces  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$  no son homeomorfos.*

**Demostración.** Supongamos que existe un homeomorfismo  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^m$ , existe un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^m - \{x_0\}$  y  $\mathbb{R}^n - \{f(x_0)\}$ , pero  $\mathbb{R}^m - \{x_0\}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $\mathbb{S}^{m-1}$ . Análogamente  $\mathbb{R}^n - \{x_0\}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $\mathbb{S}^{n-1}$ , esto contradice el Corolario 4.1.  $\square$

**Corolario 4.3** Si  $n \geq 0$ , entonces  $\mathbb{S}^n$  no es contraíble.

**Demostración.** Supongamos que  $\mathbb{S}^n$  es contraíble, entonces del Teorema 2.4,  $\mathbb{S}^n$  tiene el mismo tipo de homotopía de un punto, luego del Corolario 3.3,  $H_p(\mathbb{S}^n) \cong H_p(\{x_0\})$  lo cual contradice el Teorema 4.9.  $\square$

Otra de las aplicaciones importantes de la teoría de Homología singular es una prueba simple y corta del teorema del punto fijo de Brouwer.

Observemos que  $D^{n+1}$  es contraíble, luego del Corolario 3.4 se tiene  $H_n(D^{n+1}) = 0$  para  $n \geq 1$ , también sabemos que  $H_n(\mathbb{S}^n) \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ .

**Definición 4.5** Sean  $Y$  espacio topológico y  $X$  subespacio de  $Y$ . Decimos que  $X$  es un **retracto de  $Y$** , si existe una función continua  $r : Y \rightarrow X$  con  $r(x) = x$  para todo  $x \in X$ . A la función  $r$  se le llama **retracto**.

**Lema 4.1** Si  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$ , entonces  $\mathbb{S}^n$  no es un retracto de  $D^{n+1}$ .

**Demostración.** Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Para  $n = 0$ . Dada la conexidad de  $D^1$  el resultado se cumple trivialmente.

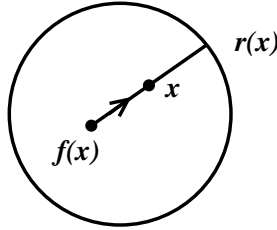
Probemos el resultado para  $n > 0$ . Supongamos que existe un retracto  $r : D^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ ; entonces existe un diagrama conmutativo de espacios topológicos y funciones continuas, que a su vez induce un diagrama conmutativo de morfismos de grupos como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{ccc} D^{n+1} & & H_n(D^{n+1}) \\ \uparrow i & \searrow r & \uparrow H_n(i) \\ \mathbb{S}^n & \xrightarrow{1_{\mathbb{S}^n}} & \mathbb{S}^n & \xrightarrow{1_{H_n(\mathbb{S}^n)}} & H_n(\mathbb{S}^n) \\ & & & \searrow H_n(r) & \\ & & & & H_n(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

Dado que  $H_n(D^{n+1}) = 0$ , se sigue que  $1_{H_n(\mathbb{S}^n)} = H_n(r) \circ H_n(i) = 0$ . Por otro lado  $1_{H_n(\mathbb{S}^n)}$  es la identidad sobre  $H_n(\mathbb{S}^n) \neq 0$ , entonces  $1_{H_n(\mathbb{S}^n)} \neq 0$ . De aquí que no existe el retracto  $r$ .  $\square$

**Definición 4.6** Sea  $X$  espacio topológico y  $f : X \rightarrow X$  una función continua. Decimos que  $f$  tiene un **punto fijo** si existe algún  $x \in X$ , tal que  $f(x) = x$ .

**Teorema 4.10** (Teorema del punto fijo de Brouwer.) Si  $f : D^n \rightarrow D^n$  es una función continua, entonces  $f$  tiene un punto fijo.



**Demostración.** Sea  $f : D^n \rightarrow D^n$  es una función continua. Supongamos que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D^n$ . Definimos  $r : D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  por  $r(x) = (1-t)f(x) + tx = f(x) + t(x - f(x))$ , para algún  $t \geq 0$ . Más aún, podemos mostrar explícitamente la  $t$ . Sea  $b = f(x)$  y  $a = x - f(x)$ , dado que  $\|b + ta\|^2 = 1$ , se tiene que  $1 = \langle b + ta, b + ta \rangle = \|b\|^2 + 2t\langle a, b \rangle + t^2\|a\|^2$ , luego

$$t = \frac{-\langle a, b \rangle \pm \sqrt{\langle a, b \rangle^2 + \|a\|^2(1 - \|b\|^2)}}{\|a\|^2}. \quad (1)$$

Observemos que  $b \in D^n$ , tenemos  $1 - \|b\|^2 \geq 0$ . Por tanto, todo lo que está dentro de la raíz cuadrada en la ecuación (1) es positivo.

Por otro lado,

$$\langle a, b \rangle \leq |\langle a, b \rangle| \leq \sqrt{\langle a, b \rangle^2 + \|a\|^2(1 - \|b\|^2)}. \quad (2)$$

De la ecuación (2) se tiene que,

$$t = \frac{-\langle a, b \rangle + \sqrt{\langle a, b \rangle^2 + \|a\|^2(1 - \|b\|^2)}}{\|a\|^2} \geq 0.$$

Dada la forma en como está expresada  $t$ , es claro que  $r$  es continua.

Más aún, sea  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $1 = \|x\|^2 = \|x + f(x) - f(x)\|^2 = \|a + b\|^2$ . Luego  $t = 1$ . Así,  $r(x) = (1 - 1)f(x) + 1 \cdot x = x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . De aquí que  $\mathbb{S}^{n-1}$

es un retracts de  $D^n$ , contradiciendo el Lema 4.1. Por tanto existe  $x \in D^n$  tal que  $f(x) = x$ .  $\square$

## 4.5. Aplicaciones sobre los espacios Euclidianos

En esta sección vamos a resolver algunos problemas que estaban fuera de nuestro alcance al inicio de la tesis. Los métodos de los capítulos anteriores son suficientemente poderosos para demostrar algunos teoremas para espacios euclidianos.

Recordemos que si  $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es un morfismo de grupos, entonces  $h$  es múltiplo de algún entero  $m$ , es decir,  $h(n) = mn$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , de hecho  $m = h(1)$ .

**Definición 4.7** Una función continua  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  (donde  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n > 0$ ) tiene **grado**  $m \in \mathbb{Z}$ , denotado por  $d(f) = m$ , si  $f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$  es múltiplo de  $m$ .

**Lema 4.2** Sean  $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  funciones continuas, para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$ .

- i)  $d(g \circ f) = d(g)d(f)$ .
- ii)  $d(1_{\mathbb{S}^n}) = 1$ .
- iii) Si  $f$  es constante, entonces  $d(f) = 0$ .
- iv) Si  $f \simeq g$ , entonces  $d(f) = d(g)$ .
- v) Si  $f$  es una equivalencia homotópica, entonces  $d(f) = \pm 1$ .

**Demostración.** Sea  $cls z \in H_n(\mathbb{S}^n)$ .

i) Supongamos que  $d(f) = n$  y  $d(g) = m$ , entonces

$$(g \circ f)_*(cls z) = g_* \circ f_*(cls z) = g_*(cls f(z)) = g_*(ncls z) = ncls g(z) = nm cls z.$$

Por tanto  $d(g \circ f) = d(g)d(f)$ .

ii)  $1_{H_n(\mathbb{S}^n)}(cls z) = cls z$ , luego  $d(1_{\mathbb{S}^n}) = 1$ .



iii) Consideremos las funciones continuas  $g$  y  $h$  como se ilustran en el diagrama conmutativo a), al aplicar el functor de homología singular al diagrama a) obtenemos el diagrama b).

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\
 h \downarrow & \nearrow g & \\
 \{*\} & & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{Z} \\
 h_* \downarrow & \nearrow g_* & \\
 0 & & 
 \end{array}$$

a) b)

Así,  $f_*(cls z) = g_* \circ h_*(cls z) = g_*(0) = 0$ . Por tanto  $d(f) = 0$ .

iv) Dado que  $f \simeq g$ , del Teorema 3.8 se tiene que  $H_n(f) = H_n(g)$ . Por tanto  $f$  y  $g$  tienen el mismo grado.

v) Como  $f$  es una equivalencia homotópica, entonces existe  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  tal que  $f \circ g \simeq 1_{\mathbb{S}^n}$  de i) y ii) se tiene que  $d(f)d(g) = 1$ , luego  $d(f) = d(g) = 1$  o  $d(f) = d(g) = -1$ . Por tanto  $d(f) = \pm 1$ .  $\square$

Los grados van a ser de gran utilidad para demostrar algunos teoremas.

Uno de los ejemplos más simples donde podemos aplicar el Lema 4.2 es para dar otra prueba de que  $\mathbb{S}^n$  no es contraíble. En efecto, supongamos que  $1_{\mathbb{S}^n} \simeq c$ , donde  $c : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , es alguna función constante, luego del Lema 4.2 se tiene que  $1 = d(1_{\mathbb{S}^n}) = d(c) = 0$ , lo cual es una contradicción, por tanto  $\mathbb{S}^n$  no puede ser contraíble.

A continuación presentamos una prueba del teorema fundamental del álgebra utilizando herramientas de la Topología Algebraica.

**Teorema 4.11** (*Teorema Fundamental del Álgebra*)

Todo polinomio complejo no constante tiene un cero en  $\mathbb{C}$ . Es decir, si  $f(z) = a_0 + a_1z^1 + a_2z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n$ ,  $n > 0$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ , entonces existe  $z_0 \in \mathbb{C}$ , tal que  $f(z_0) = 0$ .

**Demostración.** Supongamos que para todo  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f(z_0) \neq 0$ , entonces  $f$  determina una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ . Si tomamos  $\mu = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1$  y  $z \in \mathbb{S}^1$ , entonces

$$\begin{aligned}
|f(\mu z) - \mu^n z^n| &= |a_0 + a_1 \mu z + a_2 \mu^2 z^2 + \cdots + a_{n-1} \mu^{n-1} z^{n-1} + \mu^n z^n - \mu^n z^n| \\
&= |a_0 + a_1 \mu z + \cdots + a_{n-1} \mu^{n-1} z^{n-1}| \\
&\leq |a_0| + |a_1| \mu + \cdots + |a_{n-1}| \mu^{n-1} \\
&\leq \mu^{n-1} (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) \\
&\leq \mu^{n-1} (\mu - 1) = \mu^n - \mu \\
&< \mu^n \\
&= |\mu^n z^n|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(\mu z)$  yace en el interior del círculo con centro en  $\mu^n z^n$  y radio  $|\mu^n z^n|$ , por lo que el segmento que une  $f(\mu z)$ , con  $\mu^n z^n$  no contiene al origen.

De este modo  $H(z, t) = (1 - t)f(\mu z) + t\mu^n z^n$  determina una homotopía  $H : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ , que empieza con la función  $f(\mu z)$  y termina con la función  $\mu^n z^n$ . Consideremos la homotopía  $G : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  dada por  $G(z, t) = f((1 - t)\mu z)$ . De aquí que  $f(\mu z)$  es nulo homotópica. Por transitividad  $\mu^n z^n$  también es nulo homotópica, por lo que al componerla con la función  $r : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  definida por  $r(z) = z/|z|$  (vea Ejemplo 2.2) obtenemos que la función  $h = r \circ \mu^n z^n$ , dada por  $h(z) = z^n$  es nulo homotópica, es decir, el grado de  $h$  es 0, lo cual contradice la Observación 2.1. Por tanto existe  $z_0 \in \mathbb{C}$ , tal que  $f(z_0) = 0$ .  $\square$

El grado de una función facilita obtener un generador de  $H_1(\mathbb{S}^1)$ .

**Teorema 4.12** Sean  $x = (-1, 0)$ ,  $y = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$ ,  $\sigma$  la trayectoria norte en  $\mathbb{S}^1$  de  $x$  a  $y$  y  $\tau$  la trayectoria sur en  $\mathbb{S}^1$  de  $x$  a  $y$ . Entonces  $\sigma + \tau$  es un 1-ciclo en  $\mathbb{S}^1$  cuya clase de homología genera a  $H_1(\mathbb{S}^1)$ .

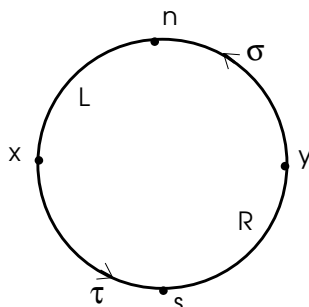


Figura 4.3:

**Demostración.** Probemos que  $\sigma + \tau$  es un 1-ciclo

$$\partial_1(\sigma + \tau) = \partial_1(\sigma) + \partial_1(\tau) = (x - y) + (y - x) = 0$$

Mostremos que la clase de homología de  $\sigma + \tau$  genera a  $H_1(\mathbb{S}^1)$ . Sean  $n = (0, 1)$  y  $s = (0, -1)$  el polo norte y sur, respectivamente. Sean  $X_1 = \mathbb{S}^1 - \{n\}$  y  $X_2 = \mathbb{S}^1 - \{s\}$ . Tenemos que  $\mathbb{S}^1 = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ , además cada  $X_i$  es contraíble y  $X_1 \cap X_2 = \mathbb{S}^1 - \{n, s\}$  consiste de dos arcos abiertos disjuntos  $L$  y  $R$  con  $x \in L$  y  $y \in R$  como se ilustra en la Figura 4.3.

Dado que se cumplen las condiciones del teorema de Mayer-Vietoris para homología reducida (vea Teorema 3.8), tenemos la siguiente sucesión exacta.

$$\tilde{H}_1(X_1) \oplus \tilde{H}_1(X_2) \longrightarrow \tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{D} \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \tilde{H}_0(X_1) \oplus \tilde{H}_0(X_2)$$

Los extremos de la sucesión anterior claramente son cero pues los  $X_i$  son contraíbles, de donde  $D$  es un isomorfismo. Por otro lado,  $X_1 \cap X_2 = L \cup R$ . Luego el Corolario 3.7 dice que a  $\tilde{H}_0(X_1 \cap X_2)$  lo genera  $cls(x - y)$ . Por el Lema 3.7 tenemos que

$$D cls(\sigma + \tau) = cls(\partial\sigma) = cls(x - y).$$

Se sigue que  $cls(\sigma + \tau)$  genera a  $\tilde{H}_1(\mathbb{S}^1) = H_1(\mathbb{S}^1)$ .  $\square$

**Definición 4.8** Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ , para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$  su **antípoda** es  $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_{n+1})$ . La **función antípoda**  $a^n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  está definida por  $x \mapsto -x$ .

Observemos que la distancia de  $x$  a  $-x$  es 2, la cual es el diámetro de  $\mathbb{S}^n$ .

**Observación 4.1** Sean  $X$  y  $Y$  espacios topológicos. Supongamos que  $X = X_1^\circ \cup X_2^\circ$  y  $Y = Y_1^\circ \cup Y_2^\circ$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$  continua con  $f(X_i) \subset Y_i$  para  $i = 1, 2$ , entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{D} & H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ H_n(Y) & \xrightarrow{D'} & H_{n-1}(Y_1 \cap Y_2). \end{array}$$

Donde  $g$  es la restricción de  $f$  y  $D, D'$  son los morfismos de conexión en la sucesión de Mayer-Vietoris.

Para la prueba de la Observación 4.1 vea [15], pág. 109.

**Teorema 4.13** Si  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 1$ , entonces la función antípoda  $a^n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  tiene grado  $(-1)^{n+1}$ .

**Demostración.** Primero demostraremos que la función  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  dada por  $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  tiene grado  $-1$ . La prueba es por inducción sobre  $n$ .

Para  $n=1$ ,

Consideremos los siguientes conjuntos  $X_1 = \mathbb{S}^1 - \{(0, 1)\}$  y  $X_2 = \mathbb{S}^1 - \{(0, -1)\}$ .

Por la Observación 4.1 tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{D} & H_0(X_1 \cap X_2) \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ H_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{D} & H_0(X_1 \cap X_2), \end{array}$$

donde  $g$  es la restricción de  $f$ . Si extendemos las sucesiones de Mayer-Vietoris en el diagrama anterior podemos deducir que  $D$  es inyectiva pues  $H_1(X_1) \oplus H_1(X_2) = 0$ . Por el Teorema 4.12 se tiene que  $cls(\sigma + \tau)$  es un generador de  $H_1(\mathbb{S}^1)$ , y por el Lema 3.7  $D(cls(\sigma + \tau)) = cls(\partial\sigma) = cls(x - y)$ . Del diagrama conmutativo se tiene que

$$\begin{aligned} D(f_*(cls(\sigma + \tau))) &= g_*(D(cls(\sigma + \tau))) = g_*(cls(x - y)) = cls(g(x) - g(y)) \\ &= cls(y - x) = -D(cls(\sigma + \tau)) = D(cls(-(\sigma + \tau))). \end{aligned}$$

Así,  $D(f_*(cls(\sigma + \tau))) = D(cls(-(\sigma + \tau)))$  y dado que  $D$  es inyectiva, entonces  $f_*(cls(\sigma + \tau)) = -cls(\sigma + \tau)$ . De aquí que  $d(f) = -1$ .

Supongamos que  $n \geq 2$ . Sean  $X_1 = \mathbb{S}^n - \{(0, 0, \dots, 1)\}$  y  $X_2 = \mathbb{S}^n - \{(0, 0, \dots, -1)\}$ , e  $i : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow X_1 \cap X_2$  la inclusión del ecuador. Dado que  $\mathbb{S}^{n-1}$  es un retracto de deformación de  $X_1 \cap X_2$ , se sigue que  $i_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_1 \cap X_2)$  es un isomorfismo. Si  $f'$  es la restricción de  $f$  a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , existe el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{D} & H_{n-1}(X_1 \cap X_2) & \xleftarrow{i_*} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}), \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* & & \downarrow f'_* \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{D} & H_{n-1}(X_1 \cap X_2) & \xleftarrow{i_*} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

Si extendemos la sucesión de Mayer-Vietoris en el diagrama anterior y dado que  $n \geq 2$ , entonces  $D$  es un isomorfismo, pues las sumas directas en la sucesión de Mayer-Vietoris son cero. Esto se debe a que  $X_1$  y  $X_2$  son contraíbles. De aquí que podamos escribir  $f_* = D^{-1}i_*f'_*i_*^{-1}D$ . Por hipótesis de inducción sabemos que  $d(f') = -1$ . Por tanto  $d(f) = -1$ .

Por otro lado, si  $f_i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  está dada por

$$f_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1})$$

y  $h : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  es el homeomorfismo de  $\mathbb{S}^n$  que intercambia la primera y la  $i$ -ésima coordenada, entonces  $f_i = hfh$ , luego

$$d(f_i) = d(hfh) = (d(h))^2d(f) = (d(h))^2(-1).$$

Dado que  $h$  es homeomorfismo, en particular equivalencia homotópica. Del Lema 4.2v), tenemos que  $d(h) = \pm 1$ . De aquí que  $d(f_i) = -1$ .

Finalmente, podemos observar que  $a^n = f f_2 \cdots f_{n+1}$ , entonces  $d(a^n) = (-1)^{n+1}$ .

□

#### Teorema 4.14

i) Si  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  es continua y no tiene puntos fijos, entonces  $f$  es homotópica a la función antípoda  $a^n$ .

ii) Si  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  es nulo homotópica, entonces  $g$  tiene un punto fijo.

#### Demostración.

i) Afirmamos que  $(1-t)a^n(x) + tf(x) \neq 0$ , de lo contrario se tendría que  $f(x) = \frac{-(1-t)}{t}a^n(x)$ , de aquí que  $1 = \|f(x)\| = \left| \frac{-(1-t)}{t} \right| \|a^n(x)\| = \left| \frac{-(1-t)}{t} \right|$ . Entonces  $\frac{(1-t)}{t} = 1$ , por tanto  $f(x) = -a^n(x) = -(-x) = x$ , es decir,  $f$  tiene un punto fijo, contradiciendo la hipótesis del teorema. Sea  $F : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow \mathbb{S}^n$ , dada por

$$F(x, t) = \frac{(1-t)a^n(x) + tf(x)}{\|(1-t)a^n(x) + tf(x)\|}.$$

Se tiene que  $F$  es continua; más aún,  $F(x, 0) = a^n(x)$  y  $F(x, 1) = f(x)$ . Por lo tanto  $F : a^n(x) \simeq f(x)$ .

ii) Supongamos que  $g$  no tiene puntos fijos, de i) se tiene que  $g \simeq a^n$ . Por el Lema 4.2iv) tenemos que  $d(g) = d(a^n) = \pm 1$ . Por otro lado  $g$  es nulo homotópica, luego  $d(g) = 0$ . Por tanto  $g$  tiene un punto fijo. □

**Teorema 4.15** Si  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$  es continua, entonces  $f$  tiene un punto fijo o algún punto es enviado a su antípoda.

**Demostración.** Supongamos que  $f$  no tiene puntos fijos. Del Teorema 4.14i) tenemos que  $f \simeq a^{2n}$ , luego  $d(f) = (-1)^{2n+1} = -1$ . Supongamos que  $f(x) \neq -x$ ,

para todo  $x \in \mathbb{S}^{2n}$  o equivalentemente  $g(x) = -f(x)$ , no tiene puntos fijos. En efecto, si existe algún  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ , tal que  $x = g(x)$ , entonces  $f(x) = -x$ , lo cual contradice que  $f(x) \neq -x$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ . Del Teorema 4.14i) tenemos que  $-f = g \simeq a^{2n}$ , es decir,  $f \simeq -a^{2n} = 1_{\mathbb{S}^{2n}}$ . De aquí que  $d(f) = 1$ , contradiciendo que  $d(f) = -1$ . Por tanto  $f$  manda algún punto a su antípoda o tiene un punto fijo.  $\square$

El Teorema 4.15 es falso para esferas de dimensión impar, un ejemplo es la rotación  $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , respecto al origen.

**Teorema 4.16** *No existe una función continua  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ , tal que  $x$  y  $f(x)$  son ortogonales para cada  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe una función continua  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$  tal que  $x$  y  $f(x)$  son ortogonales para cada  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ . Del Teorema 4.15 se tiene

- i) Si  $f(x) = -x$  para algún  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ , entonces  $\langle x, f(x) \rangle = -1$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $\langle x, f(x) \rangle = 0$ .
- ii) Si  $f(x) = x$  para algún  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ , entonces  $0 = \langle x, f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = 1$  y de nuevo existe una contradicción.

Por lo tanto de **i)** y **ii)**  $f$  no existe.  $\square$

El Teorema 4.16 es falso para  $\mathbb{S}^1$ , de hecho es falso para toda esfera de dimensión impar. Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$ , definimos  $f : \mathbb{S}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{2n-1}$ , por

$$f(x) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}).$$

Más aún,  $\langle x, f(x) \rangle = 0$ , para toda  $x \in \mathbb{S}^{2n-1}$ .

**Definición 4.9** *Un campo vectorial sobre  $\mathbb{S}^m$  es una función continua  $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  con  $f(x)$  tangente a  $\mathbb{S}^m$  en  $x$  para cada  $x \in \mathbb{S}^m$ . Un campo vectorial  $f$  es **no nulo** si  $f(x) \neq 0$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^m$ .*

Una función  $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  puede ser vista como una familia de vectores  $f(x)$  pegados a  $\mathbb{S}^m$  en  $x$ . Nos referimos con el término de “peinar el cabello sobre una  $m$ -esfera,  $\mathbb{S}^m$ ” si existe un campo vectorial no nulo  $f : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  sobre  $\mathbb{S}^m$ . El siguiente teorema nos dice que no podemos peinar el cabello sobre una esfera de dimensión par.

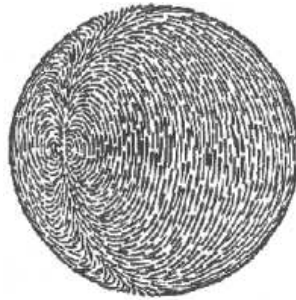


Figura 4.4: Bola peluda.

**Teorema 4.17** (*Bola peluda*). *No existe un campo vectorial no nulo sobre  $\mathbb{S}^{2n}$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe un campo vectorial no nulo  $f : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ . Entonces  $g : \mathbb{S}^{2n} \rightarrow \mathbb{S}^{2n}$ , definida por  $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ , es una función continua con  $g(x)$  tangente a  $\mathbb{S}^{2n}$  en  $x$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ , pues

$$\langle x, g(x) \rangle = \left\langle x, \frac{f(x)}{\|f(x)\|} \right\rangle = \frac{1}{\|f(x)\|} \langle x, f(x) \rangle = 0.$$

Luego se contradice el Teorema 4.16. Por tanto  $f$  no existe.  $\square$

**Ejemplo 4.2** *Si consideramos la superficie de la tierra como una 2-esfera,  $\mathbb{S}^2$ , y los vectores sobre  $\mathbb{S}^2$ , son las corrientes de aire que la rozan. Por el Teorema 4.17, siempre existe un punto sobre la superficie terrestre donde el viento no sopla. (Vea [19], pág. 571.)*

**Definición 4.10** *Una función continua  $g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$  es llamada **antipodal** si  $g(-x) = -g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{S}^m$  y  $n, m \geq 0$ .*



Una función antipodal lleva la antípoda de  $x$  a la antípoda de  $g(x)$ . Observemos que la función antípoda  $a^n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  es antipodal.

Para facilitar la demostración del siguiente teorema hagamos algunas observaciones.

**Observación 4.2** *Sea  $1 = 1_{\mathbb{S}^n}$  la identidad en  $\mathbb{S}^n$  y  $a^n$  la función antípoda en  $\mathbb{S}^n$ , para  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$ . Se tiene que*

i) *Si  $\gamma$  es una 1-cadena en  $\mathbb{S}^n$ , entonces*

$$(1_{\#} + a_{\#}^n)(1_{\#} - a_{\#}^n)\gamma = 0.$$

ii) *Si  $\beta$  es una 1-cadena, entonces*

$$(1_{\#} + a_{\#}^n)(1_{\#} + a_{\#}^n)\beta = 2(1_{\#} + a_{\#}^n)\beta.$$

iii) *Si  $\sigma$  es la trayectoria norte en  $\mathbb{S}^1$  de  $y = (1, 0)$  a  $a^1(y) = (-1, 0)$ , entonces  $(1_{\#} + a_{\#}^1)\sigma$  es un 1-ciclo cuya clase de homología genera a  $H_1(\mathbb{S}^1)$ .*

iv) *Si  $\gamma : \Delta^1 \rightarrow \mathbb{S}^n$  es una trayectoria con  $\gamma(e_1) = -\gamma(e_0)$ , entonces  $(1_{\#} + a_{\#}^n)\gamma$  es 1-ciclo en  $\mathbb{S}^n$  ( $\Delta^1 \approx I^1$ ).*

Para la prueba de la Observación 4.2 vea [15], pág. 124.

**Teorema 4.18** *Si  $m \in \mathbb{Z}$  y  $m > 1$ , no existe una función antipodal  $g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^1$ .*

**Demostración.** Supongamos que existe la función antipodal  $g : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^1$ . Sea  $y = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$  y  $\sigma$  la trayectoria norte en  $\mathbb{S}^1$  de  $y$  a  $a^1(y) = (-1, 0)$ . Sea  $x_0 \in \mathbb{S}^m$ , y  $\lambda$  una trayectoria en  $\mathbb{S}^m$  de  $x_0$  a  $-x_0$ . Finalmente elijamos una trayectoria  $f$  en  $\mathbb{S}^1$  de  $g(x_0)$  a  $y$ . Se tiene que  $\sigma - g_{\#}\lambda + f - a^1 f$  es un 1-ciclo pues

$$\begin{aligned} \partial_1(\sigma - g_{\#}\lambda + f - a^1 f) &= (\partial_1\sigma - \partial_1 g \circ \lambda + \partial f - \partial a^1 f) \\ &= a^1(y) - y - g(-x_0) + g(x_0) + y - g(x_0) - a^1(y) + a^1(g(x_0)) \\ &= -y - y + g(x_0) + g(x_0) + y - g(x_0) + y - g(x_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sea  $\theta = 1_{\#} + a_{\#}^1$ , por la Observación 4.2iii)  $cls \theta\sigma$  es un generador de  $H_1(\mathbb{S}^1)$ , entonces existe un entero  $m$  con

$$cls (\sigma - g_{\#}\lambda + f - a^1 f) = m cls \theta\sigma. \quad (1)$$

Aplicando  $\theta$  a la ecuación (1) tenemos

$$\begin{aligned} cls (\theta\sigma - \theta g_{\#}\lambda + \theta f - \theta a^1 f) &= \theta(m cls (\theta\sigma)) \\ cls (\theta\sigma - \theta g_{\#}\lambda + \theta(1 - a_{\#}^1)f) &= m cls \theta\theta\sigma \end{aligned} \quad (2)$$

de las Observaciones 4.2i) y 4.2ii) se puede ver la ecuación (2) como

$$cls (\theta\sigma - \theta g_{\#}\lambda) = 2m cls \theta\sigma.$$

Por tanto

$$\overline{cls \theta\sigma} = \overline{cls (\theta g_{\#}\lambda)} \text{ en } H_1(\mathbb{S}^1)/2H_1(\mathbb{S}^1).$$

Dado que  $cls \theta\sigma$  es un generador de  $H_1(\mathbb{S}^1)$ , se sigue que  $\overline{cls \theta\sigma} \neq 0$  y  $\overline{cls (\theta g_{\#}\lambda)} \neq 0$  en  $H_1(\mathbb{S}^1)/2H_1(\mathbb{S}^1)$ ; por tanto  $cls (\theta g_{\#}\lambda) \neq 0$  en  $H_1(\mathbb{S}^1)$ . Pero sabemos que  $g$  es antipodal, entonces  $\theta g_{\#}\lambda = (1 + a_{\#}^1)g_{\#}\lambda = g_{\#}(1 + a_{\#}^m)\lambda$ . De la Observación 4.2iv) se sabe que  $(1 + a_{\#}^m)\lambda$  es un 1-ciclo en  $\mathbb{S}^m$ , de aquí que  $cls ((1 + a_{\#}^m)\lambda) \neq 0$  en  $H_1(\mathbb{S}^m)$ , pero  $m > 1$ , lo que contradice que  $H_1(\mathbb{S}^m) = 0$ . De aquí que no existe  $g$ .  $\square$

**Corolario 4.4** (Borsuk-Ulam) Dada una función continua  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , existe  $x \in \mathbb{S}^2$  con  $f(x) = f(-x)$ .

**Demostración.** Supongamos que para todo  $x \in \mathbb{S}^2$  se cumple que  $f(x) \neq f(-x)$ . Sea  $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , dada por  $g(x) = (f(x) - f(-x))/\|f(x) - f(-x)\|$ . Aseguramos que  $g$  es una función antipodal, pues  $g(-x) = (f(-x) - f(x))/\|f(-x) - f(x)\| = -g(x)$ . Contradiciendo el Teorema 4.18. Por tanto existe un  $x \in \mathbb{S}^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .  $\square$

**Ejemplo 4.3** Supongamos que la superficie de la tierra es una 2-esfera,  $\mathbb{S}^2$ ; que la presión barométrica  $P : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y la temperatura  $T : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones continuas. Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función definida por  $f(x) = (P(x), T(x))$ . Es claro que  $f$  es continua, por el Corolario 4.4 existe al menos un punto sobre la superficie de la tierra, en el que la presión barométrica y la temperatura coinciden con la de sus antípodas. (Vea [7], pág. 242.)

**Corolario 4.5** (Lusternik-Schnirelmann) Si  $\mathbb{S}^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ , donde cada  $F_i$  es cerrado, entonces algún  $F_i$  contiene un par de puntos antipodales.

**Demostración.** Sea  $a^2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  es la función antípoda. Supongamos que  $a^2(F_1) \cap F_1 = \emptyset = a^2(F_2) \cap F_2$ , pues de lo contrario la prueba termina.

Por el lema de Urysohn (vea [10], pág. 146), existe una función continua  $g_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow I$ , para  $i = 1, 2$ , con  $g_i(F_i) = 0$  y  $g_i(a^2(F_i)) = 1$ .

Definimos  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $f(x) = (g_1(x), g_2(x))$ .

Del Corolario 4.4, existe  $x_0 \in \mathbb{S}^2$  con  $f(x_0) = f(-x_0)$ , es decir,  $g_i(x_0) = g_i(-x_0)$  para  $i = 1, 2$ . Se sigue que  $x_0 \notin F_i$ , para  $i = 1, 2$ , pues si  $x_0 \in F_i$ , se tiene que  $g_i(x_0) = 0$  y  $g_i(a^2(x_0)) = g_i(-x_0) = g_i(x_0) = 1$  esto es para  $i = 1, 2$ , contradicción. Dado que  $\mathbb{S}^2 = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ , entonces  $x_0 \in F_3$ . De manera análoga se puede mostrar que  $-x_0 \notin F_1 \cup F_2$ . Por tanto  $-x_0 \in F_3$  como queríamos.  $\square$

**Teorema 4.19** Si  $\mathbb{S}^n$  contiene una  $r$ -célula  $e_r$  bajo homeomorfismo, para  $r \in \mathbb{Z}$  y  $r \geq 0$ , entonces  $\mathbb{S}^n - e_r$  es acíclico; más aún,

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e_r) = 0, \text{ para todo } q.$$

**Demostración.** Probaremos este teorema por inducción sobre  $r \geq 0$ .

Si  $r = 0$ , entonces  $e_0$  es un punto. Por la proyección estereográfica tenemos que  $\mathbb{S}^n - e_0 \approx \mathbb{R}^n$ . De aquí que  $\mathbb{S}^n - e_0$  es contraíble. Por tanto  $\mathbb{S}^n - e_0$  es acíclico. De los Teoremas 3.16, 3.18 y 3.19 se tiene  $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e_0) = 0$ .

Supongamos que el resultado se cumple para  $t < r$ .

Si  $r > 0$ , sean  $B = I^{r-1}$  y un homeomorfismo  $h : B \times I \rightarrow e_r$ . Definimos  $e' = h(B \times [0, \frac{1}{2}])$  y  $e'' = h(B \times [\frac{1}{2}, 1])$ . Observemos que  $e_r = e' \cup e''$ , mientras que  $e' \cap e'' = h(B \times \{\frac{1}{2}\})$  es una  $(r-1)$ -célula. Como la hipótesis de inducción se cumple para  $r-1$ , tenemos que  $(\mathbb{S}^n - e') \cup (\mathbb{S}^n - e'') = \mathbb{S}^n - (e' \cap e'')$  es acíclico.

Dado que  $\mathbb{S}^n - e'$  y  $\mathbb{S}^n - e''$  son subconjuntos abiertos en  $\mathbb{S}^n$ , el Corolario 3.8 asegura la exactitud de la siguiente sucesión.

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n - (e' \cap e'')) &\longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - (e' \cup e'')) \longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e') \oplus \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e'') \longrightarrow \\ &\longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - (e' \cap e'')) \end{aligned}$$

Observemos que por hipótesis de inducción  $(\mathbb{S}^n - (e' \cap e''))$  es una  $(r-1)$ -célula, los extremos de la sucesión anterior se anulan. Así,

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - (e' \cup e'')) = \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e_r) \cong \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e') \oplus \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e'').$$

Sea  $cls \zeta \in \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e_r)$  tal que  $cls \zeta \neq 0$ . Sean  $i' : \mathbb{S}^n - e_r \hookrightarrow \mathbb{S}^n - e'$  y  $i'' : \mathbb{S}^n - e_r \hookrightarrow \mathbb{S}^n - e''$  las inclusiones. Por el Lema 3.6 tenemos que  $i'_* cls \zeta \neq 0$  o  $i''_* cls \zeta \neq 0$ . Supongamos que  $i'_* cls \zeta \neq 0$ , y definamos  $E^1 = e'$ , es decir, hemos construido una  $r$ -célula  $E^1 \subset e_r$  tal que la inclusión  $i : \mathbb{S}^n - e_r \hookrightarrow \mathbb{S}^n - E^1$ , satisface  $i_* cls \zeta \neq 0$ . Repitiendo esta construcción reemplazando  $B \times I$  por  $B \times [0, \frac{1}{2}]$  y con  $[0, \frac{1}{2}]$  bisectado. Iterando podemos observar que existe una sucesión de  $r$ -células

$$e_r \supset E^1 \supset E^2 \supset \dots \supset E^p \supset E^{p+1} \supset \dots,$$

con  $E^p = h(B \times J^p)$ , donde  $J^p \subset J^{p-1}$  es un subintervalo de longitud  $1/2^p$ , con  $i_*^p cls \zeta \neq 0$ , donde  $i^p : \mathbb{S}^n - e_r \hookrightarrow \mathbb{S}^n - E^p$  es la inclusión y  $\bigcap E^p = h(B \times \{x_0\})$  es una  $(r-1)$ -célula, donde  $x_0$  es un punto en el intervalo  $[0, 1]$ . Por el Teorema 3.7 existe el siguiente diagrama en el cual todas  $i^p$  y  $\lambda^{p+1}$  son inclusiones

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^n - E^{p+1} & \\ & \nearrow^{i^{p+1}} & \searrow^{\lambda^{p+1}} \\ \mathbb{S}^n - e_r & & \mathbb{S}^n - \bigcap E^p \\ & \searrow^{i^p} & \nearrow^{\lambda^p} \\ & \mathbb{S}^n - E^p & \end{array}$$

$\varphi^p$  (vertical arrow from  $\mathbb{S}^n - E^p$  to  $\mathbb{S}^n - E^{p+1}$ )

Dado que  $i_*^p \text{cls } \zeta \neq 0$  para todo  $p$ , se sigue que  $\varphi_*^p(i_*^p \text{cls } \zeta) \neq 0$  para todo  $p$ . Supongamos que  $A$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{S}^n - \bigcap E^p = \bigcup (\mathbb{S}^n - E^p)$  (una unión ascendente de conjuntos abiertos en  $\mathbb{S}^n$ ). Esta cubierta abierta de  $A$  tiene una subcubierta finita, es decir,  $A \subset \mathbb{S}^n - E^p$ , para algún  $p$ . El Teorema 3.7 nos da lo siguiente  $\lambda_*^k i_*^k \text{cls } \zeta \neq 0$  en  $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - \bigcap E^p)$  para todo  $k$ . Como  $\bigcap E^p$  es una  $(r-1)$ -célula, por hipótesis de inducción tenemos que  $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - \bigcap E^p) = 0$ , lo cual es una contradicción. Por tanto,  $\text{cls } \zeta = 0$ , es decir,  $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e_r) = 0$  y  $\mathbb{S}^n - e_r$  es acíclico.  $\square$

**Corolario 4.6** *Si  $e_r$  es una  $r$ -célula en  $\mathbb{S}^n$  para  $r \in \mathbb{Z}$  y  $r \geq 0$ , entonces  $\mathbb{S}^n - e_r$  es conectable por trayectorias.*

**Demostración.** Por el Teorema 4.19  $H_0(\mathbb{S}^n - e_r) = 0$ , pues  $\mathbb{S}^n - e_r$  es acíclico, del Corolario 3.6  $\mathbb{S}^n - e_r$  sólo tiene una componente por trayectoria, de lo contrario rango  $H_0(\mathbb{S}^n - e_r) \neq 0$ , contradicción.  $\square$

**Teorema 4.20** *Sea  $n, r \in \mathbb{Z}$  y  $s_r$  una copia homeomorfa de  $\mathbb{S}^r$  en  $\mathbb{S}^n$ , donde  $n > 0$  y  $r \geq 0$ . Entonces*

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - s_r) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = n - r - 1 \\ 0 & \text{otra forma.} \end{cases}$$

**Demostración.** La prueba es por inducción sobre  $r$ .

Si  $r = 0$ , entonces  $s_0$  consiste de dos puntos y  $\mathbb{S}^n - s_0$ , tiene el mismo tipo de homotopía que  $\mathbb{S}^{n-1}$ , entonces

$$\tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - s_0) \cong \tilde{H}_q(\mathbb{S}^{n-1}),$$

pero  $\tilde{H}_q(\mathbb{S}^{n-1})$  es 0 para  $q \neq n - 1$  y  $\mathbb{Z}$  para  $q = n - 1$ , como queríamos.

Supongamos que el resultado se cumple para  $t \leq r$ .

Si  $r > 0$ , sea un homeomorfismo  $\varphi : \mathbb{S}^r \rightarrow s_r$  y  $\mathbb{S}^r = E^+ \cup E^-$ , donde  $E^+$  y  $E^-$  son los hemisferios cerrados norte y sur de  $\mathbb{S}^r$ , respectivamente. Observemos que  $E^+ \cap E^- = \mathbb{S}^{r-1}$ , es el ecuador de  $\mathbb{S}^r$ . Si  $e' = \varphi(E^+)$  y  $e'' = \varphi(E^-)$ . Es claro que son  $r$ -células en  $\mathbb{S}^n$ , pues  $E^+$  y  $E^-$  son homeomorfos al conjunto  $E = \{x \in \mathbb{R}^{r+1} \mid \|x\| \leq 1 \text{ y la última componente } 0\}$ .

Definimos  $X_1 = \mathbb{S}^n - e'$  y  $X_2 = \mathbb{S}^n - e''$ ; en vista que  $X_1$  y  $X_2$  son subconjuntos abiertos de  $\mathbb{S}^n$ , entonces  $X_1 \cup X_2 = X_1^\circ \cup X_2^\circ$ . Además,

$$\begin{aligned} X_1 \cup X_2 &= (\mathbb{S}^n - e') \cup (\mathbb{S}^n - e'') = \mathbb{S}^n - (e' \cap e'') = \mathbb{S}^n - s_{r-1} \quad \text{y} \\ X_1 \cap X_2 &= (\mathbb{S}^n - e') \cap (\mathbb{S}^n - e'') = \mathbb{S}^n - (e' \cup e'') = \mathbb{S}^n - s_r. \end{aligned}$$

Como las hipótesis del Teorema 3.22 se satisfacen, existe una sucesión exacta de Mayer-Vietoris, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n - e') \oplus \tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n - e'') \longrightarrow \tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n - s_{r-1}) \longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - s_r) \longrightarrow \\ \longrightarrow \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e') \oplus \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - e'') \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Del Teorema 4.19 los términos de las sumas directas en la sucesión anterior son cero. Así,  $\tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n - s_{r-1}) \cong \tilde{H}_q(\mathbb{S}^n - s_r)$ . Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\tilde{H}_{q+1}(\mathbb{S}^n - s_{r-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q+1 = n - (r-1) - 1 \\ 0 & \text{otra forma.} \end{cases}$$

De aquí el resultado. □

**Corolario 4.7** Sean  $r, n \in \mathbb{Z}$  y  $s_r$  contenida en  $\mathbb{S}^n$ . Si  $r \neq n-1$ , entonces  $\mathbb{S}^n - s_r$  es conectable por trayectorias. Si  $r = n-1$ , entonces  $\mathbb{S}^n - s_r$  tiene exactamente dos componentes por trayectorias.

**Demostración.** Si  $r \neq n-1$ , entonces  $n-1-r \neq 0 = q$ . Del Teorema 4.20 tenemos que  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n - s_r) = 0$ .

Si  $r = n-1$ , entonces  $n-r-1 = 0 = q$ . Del Teorema 4.20 tenemos que  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n - s_r) = \mathbb{Z}$ .

Aplicando el Corolario 3.6 en ambos casos se tiene el resultado.  $\square$

Antes de continuar con el siguiente teorema, hagamos mención de algunos resultados de Topología sin demostración, pues el objetivo de la tesis no es el estudio de estos.

**Teorema 4.21** *Un espacio  $X$  es localmente conectable por trayectorias si y sólo si las componentes por trayectorias de subconjuntos abiertos son abiertas. En particular, si  $X$  es localmente conectable por trayectorias, entonces sus componentes por trayectorias son abiertas.*

**Demostración.** Vea [14], pág. 159.  $\square$

**Corolario 4.8** *Si  $X$  es localmente conectable por trayectorias, entonces las componentes conexas de todo conjunto abierto coinciden con sus componentes por trayectorias. En particular, las componentes conexas de  $X$  coinciden con las componentes por trayectorias de  $X$ .*

**Demostración.** Vea [14], pág. 159.  $\square$

**Teorema 4.22** *Todo subconjunto abierto de un espacio localmente conectable por trayectorias es localmente conectable por trayectorias.*

**Demostración.** Vea [14], pág. 161.  $\square$

**Teorema 4.23** *Sea  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  una familia no vacía de subespacios topológicos abiertos localmente conectables por trayectorias del espacio topológico  $X$ . Entonces  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  es localmente conectable por trayectorias.*

**Demostración.** Vea [14], pág. 162. □

Observemos que  $\mathbb{S}^n$  es localmente conectable por trayectorias. Para probar esto, es suficiente con definir  $X_1 = \mathbb{S}^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$  y  $X_2 = \mathbb{S}^n - \{(0,0,\dots,0,-1)\}$ , ambos son abiertos localmente conectables por trayectorias y  $X_1 \cup X_2 = \mathbb{S}^n$ , por el Teorema 4.23 se tiene que  $\mathbb{S}^n$  es localmente conectable por trayectorias.

**Teorema 4.24** (*Separación de Jordan-Brouwer*)

*Si  $s_{n-1}$  es un subespacio de  $\mathbb{S}^n$  y además homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $\mathbb{S}^n - s_{n-1}$  tiene exactamente dos componentes conexas y  $s_{n-1}$  es su frontera común.*

**Demostración.** Denotemos  $s_{n-1}$  por  $A$ . Del Corolario 4.7,  $\mathbb{S}^n - A$  tiene exactamente dos componentes. Sean  $U$  y  $V$  las componentes por trayectorias de  $\mathbb{S}^n - A$ .

Sabemos que  $\mathbb{S}^n$  es localmente conectable por trayectorias y  $\mathbb{S}^n - A$  es un conjunto abierto en  $\mathbb{S}^n$ . Entonces, del Teorema 4.22 tenemos que  $\mathbb{S}^n - A$  es localmente conectable por trayectorias. Luego por el Corolario 4.8,  $U$  y  $V$  son componentes conexas de  $\mathbb{S}^n - A$ . Más aún, del Teorema 4.21 se tiene que  $U$  y  $V$  son abiertas en  $\mathbb{S}^n - A$ . Por tanto también son abiertos en  $\mathbb{S}^n$ .

A continuación mostramos que  $s_{n-1}$  es la frontera común de  $U$  y  $V$ .

En virtud de que  $U$  y  $V$  son abiertos en  $\mathbb{S}^n$ , entonces  $\mathbb{S}^n - V = U \cup A$ , es un conjunto cerrado que contiene a  $U$ ; más aún,  $\overline{U} \subset \overline{U \cup A} = U \cup A$ , de aquí que  $Fr(U) = \overline{U} - U \subset (U \cup A) - U \subset A$ . Un argumento similar muestra que  $Fr(V) \subset A$ .

Resta probar que  $Fr(U) \supset A$  y  $Fr(V) \supset A$ .

Afirmamos que  $Fr(U) \supset A$ . En efecto, sea  $a \in A$  y  $N$  una vecindad abierta de  $a$ . Es claro que  $N \cap (\mathbb{S}^n - U) \neq \emptyset$ , para mostrar que  $a \in Fr(U)$ , debemos probar que  $N \cap U \neq \emptyset$ .

Ahora bien, dado que todo conjunto abierto de  $\mathbb{S}^{n-1}$  contiene un subconjunto homeomorfo a  $\mathbb{R}^{n-1}$ , entonces todo subconjunto abierto no vacío de  $\mathbb{S}^{n-1}$  contiene



un subconjunto abierto no vacío  $E$ , cuyo complemento es una  $(n-1)$ -célula. (Vea [2], pág. 285.)

Por hipótesis sabemos que  $A \approx \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces existe un subconjunto  $W$  de  $N \cap A$ , cuyo complemento es una  $(n-1)$ -célula, es decir,  $A - W$  es una  $(n-1)$ -célula. Luego del Teorema 4.19 tenemos  $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n - (A - W)) = 0$  y del Corolario 4.6,  $\mathbb{S}^n - (A - W)$  es conectable por trayectorias.

Si  $u \in U$  y  $v \in V$ , entonces existe una trayectoria  $f$  en  $\mathbb{S}^n - (A - W)$ , de  $u$  a  $v$ . Como  $u$  y  $v$  se encuentran en diferentes componentes, se sigue que  $f(I) \cap W \neq \emptyset$ . Más aún,  $f(I) \cap W \subset f(I) \cap A$ , pues  $W \subset A$ .

Por otro lado, observemos que  $f(I) \cap A \subset f(I) \cap (\mathbb{S}^n - (A - W)) \cap A \subset f(I) \cap W$ . Por tanto  $f(I) \cap W = f(I) \cap A$ . De aquí que, si tomamos  $t_0 = \inf\{t \in I : f(t) \in A\}$ , entonces  $t_0 = \inf\{t \in I : f(t) \in W\}$ . Dado que  $W \subset N$ , entonces  $f(t_0) \in f(I) \cap W \subset N$ . Sea  $J = [0, t_0]$ . Notemos que  $f(J)$  es un conjunto conexo con  $f(J) \subset f(I) \cap (\mathbb{S}^n - A) = f(I) \cap (U \cup V) = (f(I) \cap U) \cup (f(I) \cap V)$ . Dado que  $u = f(0) \in f(J)$ , se tiene que  $f(J) \subset f(I) \cap U \subset U$ .

Por tanto, cualquier vecindad de  $f(t_0)$ , en  $N$  intersectada con  $U$  es diferente del vacío como lo deseábamos. De aquí que  $N \cap U \neq \emptyset$ .

De manera análoga se puede mostrar que  $N \cap V \neq \emptyset$ , sólo sustituimos  $t_0$  por  $t_1 = \sup\{t \in I : f(t) \in A\}$  en los argumentos anteriores. Por tanto  $Fr(U) = A = Fr(V)$ .  $\square$

Consideremos el conjunto de los números reales extendidos,  $\mathbb{S}^n \approx \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  (compactificación por un punto, vea [14], pág. 185). Si  $\infty \notin s_{n-1}$ , entonces la componente de  $\mathbb{S}^n - s_{n-1}$  que contiene a  $\infty$  se llama **exterior de  $s_{n-1}$**  y la otra componente se llama **interior de  $s_{n-1}$** .

Una pregunta interesante es la siguiente ¿puede el interior de  $s_{n-1}$  ser homeomorfo a una bola abierta en  $\mathbb{R}^n$ ?

Si  $n = 2$ , entonces  $s_1$  es conocida como la curva de Jordan y el teorema de Schoenflies afirma que el interior de una curva de Jordan es homeomorfo al interior de  $D^2$ .

(Vea [12], pág. 176.)

Desafortunadamente, en general el interior de  $S_{n-1}$  no es homeomorfo al interior de  $D^n$ . Por ejemplo, para  $n = 3$ , el matemático James Alexander en 1925, dio un

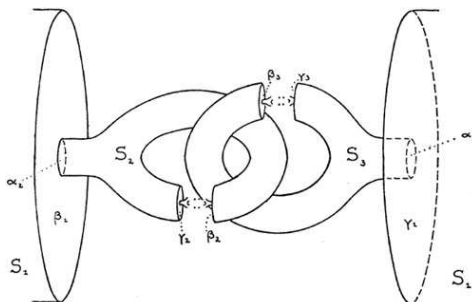


Figura 4.5: Esfera con cuernos de Alexander.

ejemplo de una esfera (observe la Figura 4.5) cuyo interior no es homeomorfo al interior de  $D^3$ . (Vea [12], pág. 176.)

**Teorema 4.25** (*Invarianza del Dominio*) Sean  $U$  y  $V$  subconjuntos de  $\mathbb{S}^n$  tal que existe un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$ . Si  $U$  es abierto en  $\mathbb{S}^n$ , entonces  $V$  es abierto en  $\mathbb{S}^n$ .

**Demostración.** Sean  $y \in V$  y  $x \in U$ , tal que  $h(x) = y$ . Sea una vecindad cerrada  $N$  de  $x$  en  $U$  con  $N \approx I^n$  y  $Fr(N) \approx \mathbb{S}^{n-1}$  (vea [2], pág. 281). Es claro que  $h(N) \subset V$ , también que  $N$  y  $h(N)$  son  $n$ -células cerradas. Por el Corolario 4.6 se tiene que  $\mathbb{S}^n - h(N)$  es conectable por trayectorias.

Por otro lado, del Teorema 4.24 tenemos que  $\mathbb{S}^n - h(Fr(N))$  tiene dos componentes conexas. Proponemos la siguiente descomposición

$$\mathbb{S}^n - h(Fr(N)) = (\mathbb{S}^n - h(N)) \cup (h(N) - h(Fr(N))).$$

Ambos términos del lado derecho son disjuntos, no vacíos y conexos, entonces ellos deben ser las componentes de  $\mathbb{S}^n - h(Fr(N))$ ; más aún, observemos que las componentes conexas coinciden con las componentes por trayectorias. Del Teorema

4.22 tenemos que  $\mathbb{S}^n - h(Fr(N))$  es localmente conectable por trayectorias. Luego por el Corolario 4.8, se sigue que las componentes conexas son abiertos en  $\mathbb{S}^n - h(Fr(N))$  y por tanto abiertos en  $\mathbb{S}^n$ .

Notemos que  $y \in h(N) - h(Fr(N)) \subset V$ ; y dado que  $h(Fr(N))$  es la frontera de cada componente conexa, se sigue que  $y$  es un punto interior de  $V$ . Por tanto,  $V$  es abierto en  $\mathbb{S}^n$ .  $\square$

Observemos que si en el Teorema 4.25 hubiéramos supuesto un homeomorfismo  $\phi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , que aplica  $U$  sobre  $V$ , el resultado sería trivial. La afirmación del teorema de invarianza del dominio requiere solamente la existencia de un homeomorfismo  $h : U \rightarrow V$ . De hecho, la afirmación del teorema es equivalente a decir que la propiedad de ser abierto en  $\mathbb{S}^n$  es un invariante topológico de los subconjuntos de  $\mathbb{S}^n$ .



## Conclusiones

En esta tesis se expusieron de la manera más clara y formal posible los resultados más importantes de la teoría de Homotopía y Homología singular, sin dejar a un lado la interpretación geométrica que sin duda en este tipo de temas es a veces un poco complicado imaginar. Si bien la Topología Algebraica, nació de la necesidad de analizar algunas propiedades geométricas de los espacios topológicos, a lo largo de los años los conceptos se han ido abstrayendo hasta llegar al punto en que leer una sola vez la definición o un resultado no basta para entenderlo.

Es importante mencionar que una de las aportaciones de este trabajo consistió en abordar dos maneras de estudiar el grupo fundamental. La primera desde el punto de vista tradicional (vea Teorema 2.10) y la segunda desde el punto de vista homotópico (vea Teorema 2.32), pues en la mayoría de la bibliografía sólo se enfocan a definirlo de manera tradicional. Estas dos definiciones son equivalentes salvo isomorfismos.

Algo que no podemos dejar de mencionar es el enfoque categórico a lo largo del desarrollo de la tesis. En particular la prueba del Teorema 2.16, usa la definición categórica del producto directo en las categorías **Top\*** y **Grup**.

Otro punto a considerar es que se completaron aquellos detalles finos de las pruebas que se dan por hecho en los libros. Además, la mayoría de los resultados presentados en esta tesis tienen su prueba, excepto aquellos que requieren de conocimientos en otras ramas de la Matemática, teniendo su correspondiente referencia.

El estudio de las aplicaciones aquí presentadas, son por sí mismo, un aporte, pues

se hizo una recopilación amplia de ellas en diferentes textos. Este trabajo no abarca todas las aplicaciones que se pueden obtener del material aquí expuesto, sin embargo las aplicaciones son relevantes. Así, se cumplió con el objetivo que en un principio se planteó.

Presentamos en este trabajo el Teorema de Seifert y Van Kampen y el Teorema de Mayer-Vietoris. Durante su estudio llegamos a la conclusión de que mientras en la teoría de homotopía el teorema de Seifert y Van Kampen permite determinar el grupo fundamental de un espacio basado en el grupo fundamental de sus subespacios. El teorema de Mayer-Vietoris hace algo análogo en la teoría de homología singular, bajo ciertas hipótesis.

Por último, uno de los éxitos de este trabajo, es la organización secuencial de los resultados y que la mayoría se utilizó en alguna aplicación del Capítulo 4.

# Bibliografía

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, USA. 2000.
- [2] C. Prieto, *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica (FCE), México. 2003.
- [3] E. Bick and F.D. Steffen, *Topology and Geometry in Physics*, Springer-Verlag, Berlin. 2005.
- [4] E. Lluis-Puebla, *Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-teoría Algebraica Clásica*, Addison-Wesley Iberoamericana, México. 1990.
- [5] E. Flapan, *When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality*, Cambridge University Press. 2000.
- [6] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York. 1994.
- [7] G. E. Bredon and W. Goldman, *Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York. 1993.
- [8] G. Salicrup, *Introducción a la Topología*, Aportaciones Matemáticas SMM, México. 1997.
- [9] I. López Salmorán, *Tesis: H-converxidad*, UTM, Oaxaca, México. 2006.
- [10] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston. 1966.
- [11] J. B. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, USA. 1971.

- 
- [12] J. H. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, MA. 1961.
- [13] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York. 2000.
- [14] J. R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, Massachusetts. 1999.
- [15] J. J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics Springer, New York. 1998.
- [16] J. A. Vargas Mendoza, *Álgebra Clásica*, Sociedad Matemática Mexicana, México. 2006.
- [17] L. S. Pontryagin, *Topological groups*, vol. II, Gordon and Breach Science Publishers, USA. 1986.
- [18] M. A. Aguilar, S. Gitler and C. Prieto, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag, New York. 2002.
- [19] M. Eisenberg and R. Guy, *A Proof of the Hairy Ball Theorem*, The American Mathematical Monthly. Vol. 86, No. 7, Aug. - Sep., 1979.
- [20] M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, European Mathematical Society. 2008.
- [21] M. J. Greenberg and J. R. Harper, *Algebraic Topology A First Course*, Perseus Book Publishing, Massachusetts. 1981.
- [22] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Chicago. 1998.
- [23] W. S. Massey, *Introducción a la Topología Algebraica*, Reverté, Barcelona. 2008.