



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**“ANÁLISIS, MODELADO Y SIMULACIÓN EN
COMPUTADORA DEL MOTOR DE CORRIENTE
DIRECTA TIPO SERIE.”**

TESIS

**PARA OBTENER EL TÍTULO
DE INGENIERO EN ELECTRÓNICA**

PRESENTA

HÉCTOR VICENTE MARTÍNEZ MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS

M.C. ESTEBAN OSVALDO GUERRERO RAMÍREZ

**Tesis presentada el 23 de Enero de 2009
ante los siguientes sinodales:**

Ing. Hugo Suárez Onofre

M.C. Jacob Javier Vásquez Sanjuán

M.C. José Antonio Moreno Espinosa

Director de tesis:

M.C. Esteban O. Guerrero Ramírez

Dedicatoria

A dios por que le he pedido muchas cosas y me lo ha concedido, nunca se ha olvidado de mí. Gracias por darme el mejor de los regalos...la vida.

Dedico esta tesis a los tres grandes amores de mi vida, mi esposa Miriam Bello Martínez y mis dos hijos Jiselle Alejandra Martínez Bello, y Héctor Lancelot Martínez Bello, a quien Amo y quiero con todo el corazón.

A mis padres Rafael Martínez Zurita y Alejandrina Martínez Martínez, por darme lo mejor de su vida, los quiero tanto que realmente no hay palabras que logren expresar lo mucho que quiero agradecerles.

A mis hermanos C. Jerónimo, Z. Guadalupe, R. Miguel y L. Irene por ser parte de mi vida, gracias por su apoyo.

Agradecimientos

Deseo expresar mis más sinceras muestras de agradecimiento.

A mis asesores M.C. Esteban Osvaldo Guerrero Ramírez, y Dr. Floriberto Ortiz Rodríguez por haber confiado en mí, por sus comentarios para concluir el presente trabajo de tesis, que dios los bendiga.

A los sinodales Ing. Hugo Suárez Onofre, M.C. Jacob Javier Vásquez Sanjuán, M.C. José Antonio Moreno Espinosa por sus comentarios y el tiempo dedicado a la revisión de este trabajo de tesis.

Le agradezco a todo el personal que labora en la Universidad Tecnológica de la Mixteca, por las facilidades y apoyo en todo momento. Institución que amo y quiero, de la cual siempre estaré agradecido.

Al Lic. Carlos Santibáñez Moran por el apoyo brindado durante mi estancia en esta universidad.

Al C.M.C. José Manuel Ávila Vásquez y al M.C. Josué Neftali García Matías por el apoyo en la elaboración de este trabajo de tesis.

A mis compañeros y compañeras de generación, por la motivación que de ellos he recibido.

A todos los maestros que dedicaron su tiempo y paciencia en clase, desde mi formación en la Primaria Guadalupe Victoria, Secundaria Jaime Torres Bodet, Preparatoria Héroes del 5 de Mayo y Universidad Tecnológica de la Mixteca, a todos ellos mil gracias.

Finalmente a todas aquellas personas y amigos que esta tarde no pude extraer de mi memoria, pero que me brindaron su apoyo, tiempo e información para el logro de mis objetivos.

Índice

Índice	iii
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas.....	xi
1. Introducción.....	1
1.1. Planteamiento del problema.....	2
1.2. Objetivo	3
1.3. Justificación	3
1.4. Estructura de la tesis	3
2. Motores eléctricos de cd.....	5
2.1. Antecedentes históricos	5
2.2. Principio de funcionamiento de un motor de cd.....	8
2.3. Clasificación de los motores de cd.	12
2.3.1. Motores de rotor devanado.	12
2.3.1.1. Construcción.....	13
2.3.1.1.1. Rotor	14
2.3.1.1.2. Estator.....	15
2.3.1.2. Clasificación de los motores de rotor devanado.....	16
2.3.1.2.1. Motor serie.....	17
2.3.1.2.2. Motor derivación	18
2.3.1.2.3. Motor compuesto.....	18
2.3.2. Motores de Imán permanente (IP)	19
2.3.3. Motores conmutados electrónicamente.....	19
2.3.3.1. Motores paso a paso	20
2.3.3.2. Motores de cd sin escobillas.....	20

ss

3. Controladores clásicos para el motor de cd.....	21
3.1. Términos básicos en control automático	21
3.1.1. Sistemas de control en lazo abierto.....	21
3.1.2. Sistemas de control en lazo cerrado.....	22
3.1.3. Estabilidad, respuesta transitoria y error en estado estacionario.....	24
3.1.3.1. Definición de respuesta transitoria.....	25
3.1.3.2. Análisis de estabilidad en el plano complejo	27
3.1.3.3. Error en estado estacionario	31
3.1.3.4. Tipos de señales de entrada.....	31
3.1.3.5. Clasificación de los sistemas de control.....	32
3.2. Acciones de control	33
3.2.1. Acción de control proporcional.....	33
3.2.2. Acción de control proporcional derivativa.....	34
3.2.3. Acción de control proporcional integral	35
3.2.4. Acción controlador proporcional integral derivativa	36
4. Modelado matemático y simulación del motor de cd.....	39
4.1. Modelo matemático.....	39
4.2. Métodos de obtención de modelos matemáticos:	39
4.3. Modelado del motor de cd tipo serie con carga.....	39
4.3.1. Ecuaciones en el tiempo.....	40
4.3.2. Representación de las ecuaciones mediante variables de estado	41
4.3.3. Matriz de controlabilidad	41
4.3.4. Función de transferencia	43
4.4. Simulaciones del motor en lazo abierto sin carga.....	45
4.4.1. Parámetros del motor.....	45
4.4.2. Medición experimental de los parámetros del motor de cd.	45
4.4.2.1. Medición de resistencias	46
4.4.2.2. Medición de inductancias	47
4.4.2.3. Constante de la fuerza contraelectromotriz K_b	47
4.4.2.4. Coeficiente de fricción viscosa, B_m	49
4.4.2.5. Constante mecánica τ_m	50

4.4.2.6. La inercia del motor J_m	50
4.4.3. Diagrama general del motor.....	52
4.4.4. Graficas de salida del motor.....	53
4.4.5. Validación del modelo del motor.....	57
4.5. Simulaciones del motor en lazo abierto con carga.	57
4.5.1. Graficas de salida del motor con carga.	57
4.5.2. Validación del modelo del motor.....	61
4.6. Simulación del motor en lazo cerrado con carga.....	62
4.6.1. Control proporcional del motor.....	62
4.6.1.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional.....	64
4.6.2. Control proporcional derivativo del motor	66
4.6.2.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional derivativo.....	68
4.6.3. Control proporcional integral del motor	69
4.6.3.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional integral.....	71
4.6.4. Control proporcional integral derivativo del motor	72
4.6.4.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional integral derivativo.....	74
4.6.5. Metodología que se utilizo en este trabajo de tesis.	76
5. Conclusiones y trabajos futuros.....	77
5.1. Conclusiones.....	77
5.2. Trabajos futuros	77
Bibliografía.....	79
Sitios de Internet.....	80
Apéndice A. Términos básicos en control automático.....	83
Apéndice B. Acrónimos	85
Apéndice C. Simbología.....	87

Lista de Figuras

Figura 2.1. Líneas de fuerza magnética que rodean a un imán permanente.....	5
Figura 2.2. Líneas de fuerza magnética a través de un cuerpo de baja reluctancia.....	6
Figura 2.3. Atracción magnética sobre el hierro.	7
Figura 2.4. Regla de la mano derecha para un conductor.....	7
Figura 2.5 Regla de la mano izquierda para un conductor.	8
Figura 2.6. Regla de la mano izquierda de la acción motor.	8
Figura 2.7. Regla motor de la mano derecha.....	9
Figura 2.8. Espira dentro de un campo magnético.	9
Figura 2.9. Motor básico de corriente directa.....	10
Figura 2.10. Regla de Fleming. (a) voltaje inducido, (b) regla de la mano derecha.	11
Figura 2.11. Motores de CD.	12
Figura 2.12. Partes de un motor de rotor devanado.....	14
Figura 2.13. Rotor.....	15
Figura 2.14. Estator del motor de (CD).....	16
Figura 2.15. Circuito equivalente del motor serie:	17
Figura 2.16. Motor en derivación.	18
Figura 2.17. Motor compuesto.	19
Figura 3.1. Elementos de un sistema de control en lazo abierto.	22
Figura 3.2. Sistemas de control en lazo cerrado.....	22
Figura 3.3. Sistema de control en lazo cerrado.....	23
Figura 3.4. Regiones de interés para especificar el comportamiento de un sistema.	24
Figura 3.5. Señales de salida para sistemas de control.....	25
Figura 3.6. Curva de respuesta a un escalón en la que se muestran $t_d, t_r, t_p, M_p, y t_s$	27
Figura 3.7. Regiones estable e inestable en el plano s.....	28

Figura 3.8. Sistema de control con retroalimentación negativa.	31
Figura 3.9. Diagrama a bloques del controlador proporcional.	34
Figura 3.10. Diagrama a bloques del controlador proporcional derivativo.....	35
Figura 3.11. Diagrama a bloques del controlador proporcional integral.....	36
Figura 3.12. Diagrama a bloques del controlador proporcional integral derivativo.....	37
Figura 4.1. Circuito equivalente del motor de cd en serie.	40
Figura 4.2. Circuito simplificado del motor en serie.....	40
Figura 4.3. Diagrama de conexión para medir la resistencia de armadura.....	48
Figura 4.4. Diagrama de conexión de la fuerza contraelectromotriz.....	49
Figura 4.5. Diagrama de conexión de la constante mecánica.....	51
Figura 4.6. Tiempo de caída del motor cuando es apagado.	51
Figura 4.7. Diagrama general del motor lazo abierto sin carga.....	52
Figura 4.8. Corriente de armadura, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$	53
Figura 4.9. Par generado, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$	54
Figura 4.10. Par de salida, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$	54
Figura 4.11. Desplazamiento, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$	55
Figura 4.12. Velocidad, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$	56
Figura 4.13. Fuerza contraelectromotriz, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$	56
Figura 4.14. Corriente de armadura, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80 V$	58
Figura 4.15. Par generado, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80 V$	58
Figura 4.16. Par de salida, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80 V$	59
Figura 4.17. Desplazamiento, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80 V$	60
Figura 4.18. Velocidad, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80 V$	60
Figura 4.19. Fuerza contraelectromotriz, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80 V$	61
Figura 4.20. Diagrama del control y el motor.	63
Figura 4.21. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.....	63
Figura 4.22. Diagrama en simulink del control P aplicado al motor.....	65
Figura 4.23. Gráfica de salida del sistema.....	66
Figura 4.24. Diagrama en simulink del control proporcional derivativo.	66
Figura 4.25. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.....	67
Figura 4.26. Diagrama en simulink, del control PD aplicado al motor.....	68

Figura 4.27. Gráfica de salida del sistema.....	69
Figura 4.28. Diagrama en simulink del control proporcional integral.	69
Figura 4.29. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.....	70
Figura 4.30. Diagrama en simulink del control PI aplicado al motor.	72
Figura 4.31. Gráfica de salida del sistema.....	72
Figura 4.32. Diagrama en simulink del control proporcional integral derivativo.	73
Figura 4.33. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.....	73
Figura 4.34. Diagrama en simulink, del control PID aplicado al motor.....	75
Figura 4.35. Grafica de salida del sistema.....	75

Lista de Tablas

Tabla 3.1. Especificaciones.	27
Tabla 3.2. Tipos de señales de entrada.	32
Tabla 4.1. Parámetros a medir.	46
Tabla 4.2. Medición de resistencias.	47
Tabla 4.3. Medición de inductancias.	47
Tabla 4.4. Medición de parámetros.	47
Tabla 4.5. Medición de la constante mecánica.	50
Tabla 4.6. Parámetros del motor.	52
Tabla 4.7. Parámetros del motor sin carga, simulado en MATLAB.	57
Tabla 4.8. Parámetros del motor sin carga medido en LAB-VOLT.	57
Tabla 4.9. Parámetros del motor con carga simulado en MATLAB.	61
Tabla 4.10. Parámetros del motor con carga medido en LAB-VOLT.	62
Tabla 4.11. Tabulación de Routh, control P.	64
Tabla 4.12. Tabulación de Routh, control PD.	68
Tabla 4.13. Tabulación de Routh, control PI.	71
Tabla 4.14. Tabulación de Routh, control PID.	74
Tabla 1.	87

1. Introducción

Durante muchos años las máquinas eléctricas han sido imprescindibles en la industria. Los tres tipos básicos de máquinas eléctricas: corriente directa (cd), inducción y síncronas han servido a las necesidades industriales durante casi un siglo. En años recientes, un intenso esfuerzo en investigación ha producido otras variantes de máquinas eléctricas, tales como máquinas de cd sin escobillas (Brushless), máquinas de imanes permanentes y máquinas de reluctancia variable, que son una alternativa viable en muchas aplicaciones.

Tradicionalmente las máquinas de cd [8, 9] han dominado el campo de los sistemas impulsores. Actualmente, la mayoría de los impulsores industriales utilizan máquinas de cd. A pesar de que la maquinaria es más costosa, los principios de control y el equipamiento de conversión necesarios son un tanto más sencillos. No obstante, las principales desventajas son sus conmutadores y escobillas, y el frecuente mantenimiento que requiere para su operación. Por otro lado, la máquina de corriente alterna (ca) [8,10,9], es más robusta y menos costosa. Históricamente, se ha preferido para las aplicaciones de control con velocidad constante. El equipamiento necesario para usarla en impulsores de velocidad variable tiene el paradigma de ser complejo y costoso. Sin embargo, durante las tres últimas décadas, la investigación en el desarrollo de la tecnología de impulsores de ca se ha incrementado, el costo y el desempeño de los mismos han mejorado considerablemente. Su popularidad en la industria está definitivamente a la alza.

Las máquinas eléctricas funcionan como generador o como motor. Cuando funcionan como generador se convierte energía mecánica en eléctrica. Sin embargo cuando funcionan como motor convierten energía eléctrica a mecánica, en este trabajo de tesis se propone el estudio de dicha máquina como motor.

Un motor eléctrico de cd consta de dos partes fundamentales: el rotor; que constituye la parte móvil y el estator; que es la parte fija del motor, su funcionamiento se basa en el siguiente principio básico del electromagnetismo: la interacción entre dos campos magnéticos posicionados 90° entre sí genera un efecto de atracción y repulsión resultando en movimiento [1].

Los motores de cd siguen siendo la acción común si se necesita de accionamientos eléctricos

que operan en un rango amplio de velocidad. Esto es debido a sus propiedades operacionales y sus características de control, siendo la única desventaja esencial el conmutador mecánico el cual restringe la potencia y la velocidad del motor, aumenta la inercia, la longitud axial y necesita mantenimiento periódico [7].

En todo proceso de diseño actual, el paso previo a la fabricación de cualquier sistema de control son los prototipos, a su vez, el paso previo a los prototipos es el análisis y la simulación a través de la computadora. Con ello se persiguen fundamentalmente los siguientes aspectos: cierta comodidad, debido a que distintas pruebas de simulación tan solo requieren ciertos cambios en las líneas de un programa. La simulación se puede realizar de forma cómoda y sencilla; sobre cualquier planta o proceso continuo, que se haya modelado previamente.

1.1. Planteamiento del problema

El motor de cd es utilizado en diversas aplicaciones, debido a que su control es relativamente simple. Por lo que resulta conveniente conocer su funcionamiento bajo diferentes condiciones de operación (arranque y estado estable). Para desarrollar esta tarea en la actualidad existen herramientas computacionales que nos permiten conocer el comportamiento de cualquier sistema partiendo de una representación matemática del mismo, sin necesidad de contar con el sistema real. Sin olvidar que cualquier representación matemática siempre es una aproximación. El modelo del motor de cd, como sucede con la mayoría de los sistemas reales presenta no linealidades. Sin embargo, por simplicidad de análisis solo se modelan algunas características o dinámicas propias del sistema. El objetivo es que se tenga un modelo sencillo pero con la información necesaria para el estudio del mismo utilizando las herramientas de sistemas lineales ampliamente probadas.

Considerando lo anterior, en este trabajo de tesis se plantea obtener los parámetros físicos del motor de forma experimental, así como el análisis, modelado matemático y estudio del comportamiento del motor de corriente directa en lazo abierto y lazo cerrado mediante la simulación. Una de las herramientas informáticas que se utiliza en la simulación es MATLAB el cual dispone del paquete SIMULINK que permite la representación y el análisis de sistemas mediante diagramas de bloques. El estudio del comportamiento del motor en lazo abierto y lazo cerrado se lleva a cabo aprovechando la capacidad de graficado que tienen los programas antes mencionados para representar el comportamiento en el tiempo de las variables de interés. Para el estudio del motor en lazo cerrado se propone un análisis comparativo de diferentes controladores clásicos (P , PD , PI y PID) y un lazo de realimentación para controlar la velocidad del motor. Para finalizar se hace un estudio de estabilidad del sistema.

1.2. Objetivo

Objetivo general

El objetivo general es comprender el comportamiento dinámico de un motor de cd tipo serie mediante la simulación.

Objetivos específicos

- Estudiar la teoría del motor de cd.
- Obtener los parámetros del motor experimentalmente.
- Obtener el modelado matemático del motor.
- Simular en computadora el comportamiento del motor en lazo abierto (utilizando SIMULINK).
- Simular en computadora el comportamiento del motor en lazo cerrado. Para lograr lo anterior se propone utilizar una metodología ya establecida para el diseño del control y análisis de estabilidad del sistema. Así como el análisis comparativo del desempeño del motor con diferentes controladores (P , PD , PI y PID).

1.3. Justificación

En la actualidad nadie pone en duda la importancia de las máquinas eléctricas, hasta tal extremo que, prácticamente en todos los ámbitos en que nos desenvolvemos están presentes, los ingenieros denominan “máquinas eléctricas” a los motores y generadores eléctricos. Muchos dispositivos industriales (robots, elevadores, bandas transportadoras, etc.) utilizan motores de cd como actuadores, por lo que es necesario su estudio.

En general el conocimiento del funcionamiento de las máquinas eléctricas requiere de la experiencia de campo, es decir, de la observación del comportamiento de la máquina mientras está funcionando y posiblemente de la realización de pruebas y ensayos.

Por otro lado en la actualidad existe otra alternativa que involucra el conocimiento de la teoría de máquinas eléctricas, la obtención de un modelo matemático y su representación por medio de un circuito equivalente, la solución del conjunto de ecuaciones en el proceso de modelado y la interpretación de las soluciones para conocer el comportamiento de la máquina eléctrica en estudio. Las ecuaciones resultantes son simuladas en MATLAB.

1.4. Estructura de la tesis

La estructura del documento de tesis se detalla a continuación.

El capítulo 2 describe las generalidades de los motores eléctricos de corriente directa (cd), principales características, circuito equivalente, clasificación y la estructura básica del mismo.

El capítulo 3 describe algunos aspectos importantes del control clásico, sistemas de control en lazo abierto y lazo cerrado, respuesta transitoria y error en estado estacionario, y las principales acciones de control.

En el capítulo 4 se presenta el modelo matemático, el procedimiento para obtener los parámetros del motor experimentalmente, simulación y desarrollo experimental del control de velocidad del motor en lazo abierto bajo diferentes condiciones de funcionamiento, simulación del control de velocidad del motor con diferentes controladores, así como el análisis de estabilidad de los mismos.

En el capítulo 5 se representan las conclusiones y trabajos futuros.

Finalmente se presentan las referencias bibliográficas y apéndices correspondientes.

2. Motores eléctricos de cd

2.1. Antecedentes históricos

Un motor de cd es básicamente un transductor de par que convierte energía eléctrica en energía mecánica. Para entender el principio de operación de un motor de cd es necesario recordar algunos aspectos sobre magnetismo y electromagnetismo. Michael Faraday (1791-1867) originó el concepto de líneas de fuerza magnética, también denominadas líneas de inducción magnética, como un medio para analizar y explicar los fenómenos magnéticos.

Las líneas de fuerza magnética son líneas imaginarias cuya dirección es la misma que la de un campo magnético real en un punto específico. Por ejemplo las líneas de fuerza magnética para un imán se presentan en la Figura 2-1. Cada línea dibujada representa incontables líneas de fuerza que ilustran el camino típico del campo magnético alrededor de un imán.

Las características fundamentales de las líneas de fuerza magnética son las siguientes:

- Forman lazos cerrados: Las líneas existen dentro del cuerpo de un imán y continúan externamente hasta cerrar un lazo.
- Son direccionales: Emergen de un área denominada polo norte y entran en otra área diferente denominada polo sur; estas líneas continúan internamente en el imán. Así, la dirección de las líneas de fuerza magnética internamente en un imán es de sur a norte, y externamente de norte a sur.

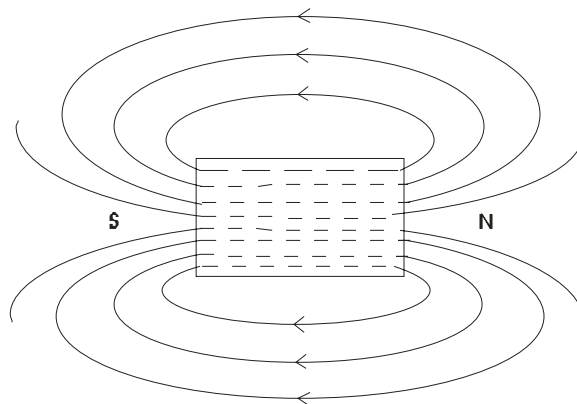


Figura 2.1. Líneas de fuerza magnética que rodean a un imán permanente

- No se interceptan: Dos líneas no pueden ocupar el mismo espacio o pasar a través de

un punto común. Se repelen mutuamente. Así como dos cargas eléctricas iguales ejercen fuerzas mutuamente repulsivas, dos líneas de inducción cercanas experimentan fuerzas que tienden a separarlas.

- Buscan caminos de baja reluctancia. El espacio libre y la mayoría de los materiales son medios difíciles de ser ocupados por líneas de fuerza magnética. Sin embargo, los materiales ferromagnéticos facilitan el paso de las líneas de fuerza magnética a través de ellos. Los materiales ferromagnéticos poseen baja reluctancia; así, a pesar de la tendencia a contraerse, muchas líneas de fuerza desvían su trayectoria corta de alta reluctancia para seguir una trayectoria más larga de baja reluctancia a través de un cuerpo ferromagnético, ver Figura 2-2.

Una vez que las líneas de fuerza magnética penetran el cuerpo ferromagnético, las fuerzas tensoras de las líneas de fuerza entran en acción para atraer el cuerpo hacia el imán, si las fuerzas tensoras son mayores que las fuerzas que se le oponen, el cuerpo se mueve. El resultado es la conocida fuerza de atracción que tiene un imán sobre materiales ferromagnéticos, ver Figura 2-3.

Al número de líneas de fuerza magnética se le denomina flujo magnético y el símbolo que lo representa es Φ , su unidad en el sistema ingles es el Maxwell.

Hans Christian Oesterd (1777-1851) demostró una conexión directa entre la corriente eléctrica y los efectos magnéticos, introduciendo así el estudio común de la electricidad y el magnetismo. Este desarrollo resultó en gran parte del trabajo de Michael Faraday y del físico James Clerk Maxwell, Oesterd estableció la presencia y dirección de las líneas de fuerza magnética alrededor de un conductor por el cual fluye corriente eléctrica [22].

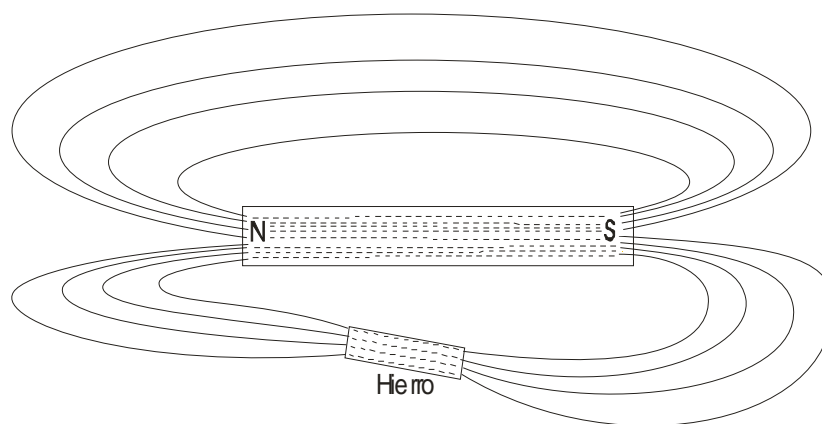


Figura 2.2. Líneas de fuerza magnética a través de un cuerpo de baja reluctancia.

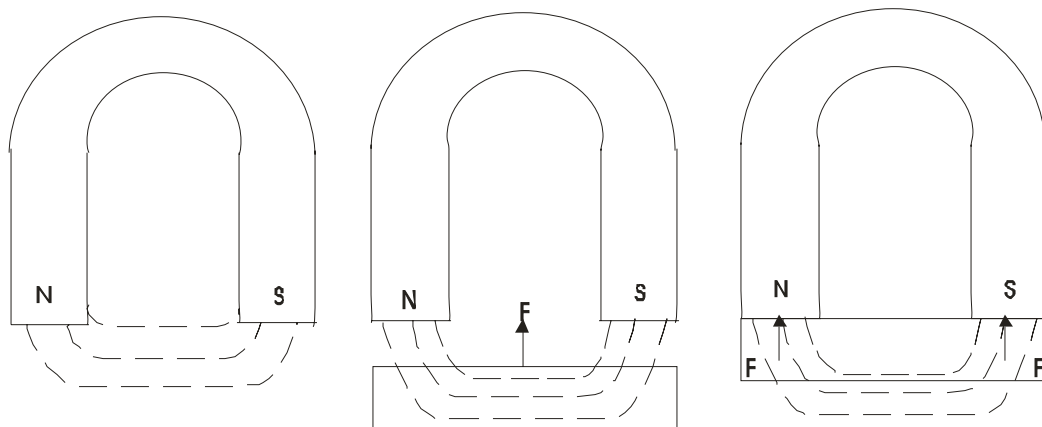


Figura 2.3. Atracción magnética sobre el hierro.

En la Figura 2-4 se ilustra la regla de la mano derecha para un conductor, en la cual la mano derecha sujeta a un conductor aislado por el cual fluye corriente eléctrica directa, el dedo pulgar apunta en la dirección del flujo de corriente convencional, y la curvatura natural de los dedos restantes alrededor del conductor indican la dirección de las líneas de fuerza magnética. Estas líneas se presentan a todo lo largo del conductor, formando círculos.

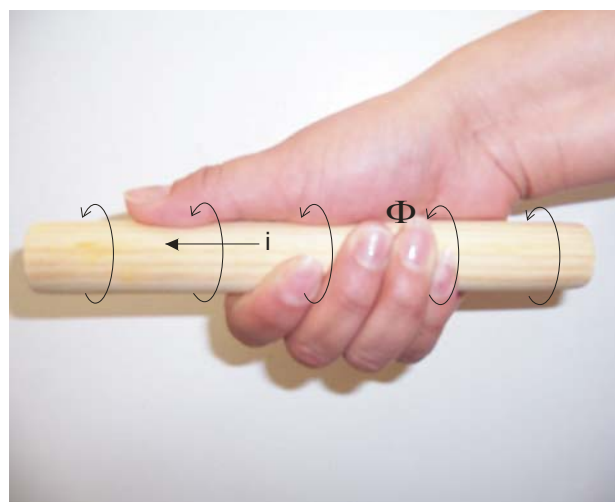


Figura 2.4. Regla de la mano derecha para un conductor.

La regla anterior tiene su equivalente tomando en cuenta el flujo de corriente de electrones, la cual se denomina regla de la mano izquierda para un conductor; en la Figura 2.5 se ilustra esta regla [2], [12].

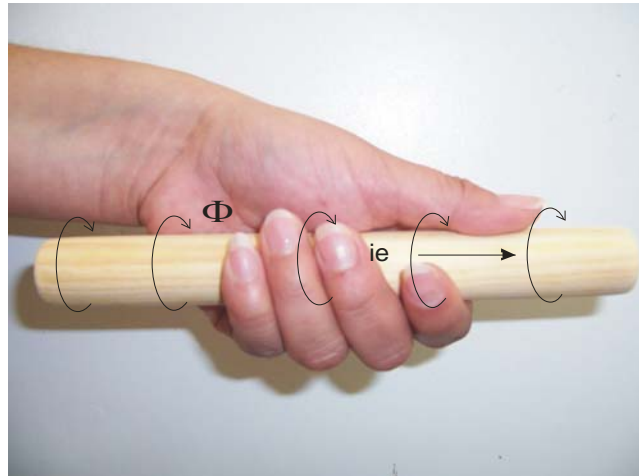


Figura 2.5 Regla de la mano izquierda para un conductor.

2.2. Principio de funcionamiento de un motor de cd

La acción de la fuerza ejercida en un conductor que porta corriente eléctrica dentro de un campo magnético externo puede deducirse mediante la regla de la mano izquierda de la acción motor (ver Figura 2-6), esta regla establece lo siguiente: si se extienden los dedos pulgar, índice y medio de la mano izquierda, formando ángulos rectos entre sí y el dedo índice apunta en la dirección del flujo magnético Φ de los polos de norte a sur y el dedo medio apunta en la dirección del flujo de corriente convencional i en el conductor, entonces el dedo pulgar apuntará en la dirección de la fuerza que se ejerce sobre el conductor [16], [23].

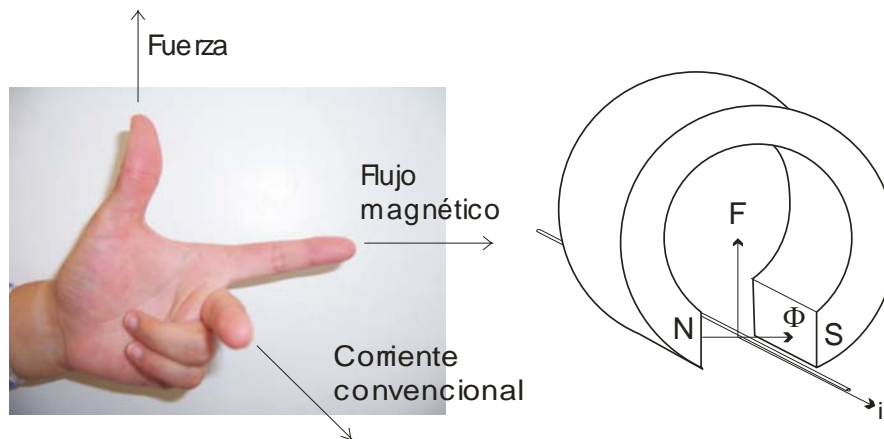


Figura 2.6. Regla de la mano izquierda de la acción motor.

La regla anterior también tiene su equivalente siguiendo el flujo de corriente de electrones, a la cual se le conoce como la regla motor de la mano derecha, formando ángulos rectos entre sí y el dedo índice apunta en la dirección del flujo magnético Φ de los polos de norte a sur y el dedo medio apunta en la dirección del flujo de corriente de electrones i_e en el conductor, entonces, el dedo pulgar apuntará en la dirección de la fuerza que se ejerce sobre el conductor,

ver Figura 2.7. Cualquiera de las dos reglas es válida siempre y cuando se aplique teniendo en cuenta la dirección del flujo de corriente eléctrica convencional o de electrones.

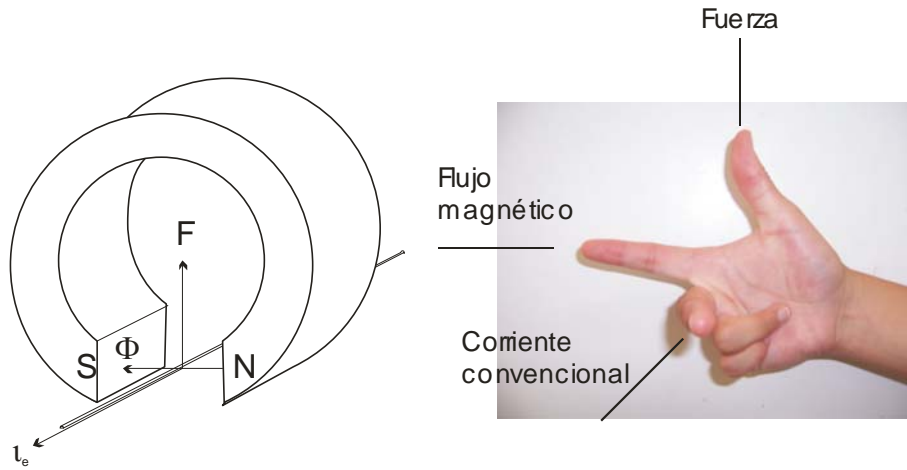


Figura 2.7. Regla motor de la mano derecha.

Si se toma un conductor y se dobla en forma de espira, como se muestra en la Figura 2-8, con un eje imaginario sobre el cual la espira es libre de rotar, se coloca dentro de un campo magnético externo, y se hace pasar una corriente eléctrica a través de la espira en dirección del flujo convencional, por tanto el par de fuerzas magnéticas paralelas, de igual magnitud y de dirección opuesta, crearán un momento de torsión haciendo girar la espira en dirección de las manecillas del reloj. Estas fuerzas y el momento de torsión son el principio de funcionamiento de un motor de corriente directa.

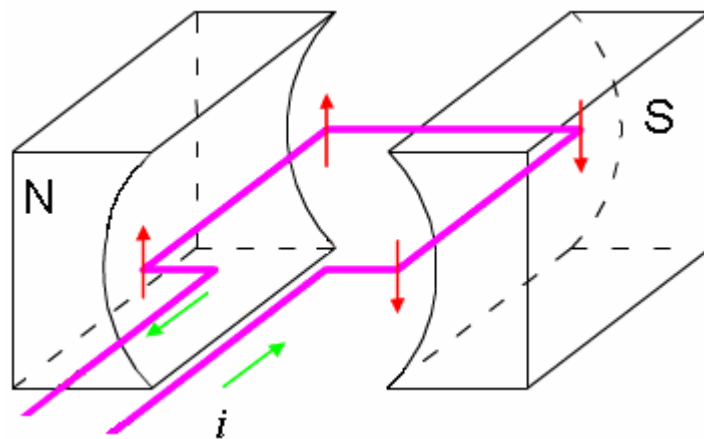


Figura 2.8. Espira dentro de un campo magnético.

En la Figura 2.9 se muestra el motor básico de corriente directa, el conmutador está formado por un anillo conductor dividido en dos segmentos (delgas), cada segmento está conectado a cada extremo de la espira conductora y aislados eléctricamente uno del otro. A medida que la espira gira cada escobilla toca alternativamente ambos segmentos del conmutador. En

consecuencia, las conexiones eléctricas se invierten a la mitad de cada revolución en el instante en que la espira es perpendicular al campo magnético. De esta manera, el momento de torsión que actúa sobre la espira lo hace siempre en la misma dirección y esta gira continuamente en el mismo sentido. Generalmente la armadura es el elemento del motor de cd que se encuentra girando y los imanes son estacionarios; la parte del motor que gira se denomina rotor y la parte estacionaria se denomina estator.

Existe otro fenómeno que se observa al mover un conductor dentro de un campo magnético. Faraday demostró que el desplazamiento mecánico de un conductor dentro de un campo magnético produce una corriente eléctrica. Faraday lo denominó voltaje inducido ya que se genera sin que exista contacto entre el imán y el conductor, el voltaje inducido también es conocido como fuerza electromotriz inducida. La ley de Faraday se anuncia como sigue:

“el voltaje inducido en un conductor es proporcional a la rapidez de cambio de las líneas de fuerza magnética que atraviesan el conductor”.

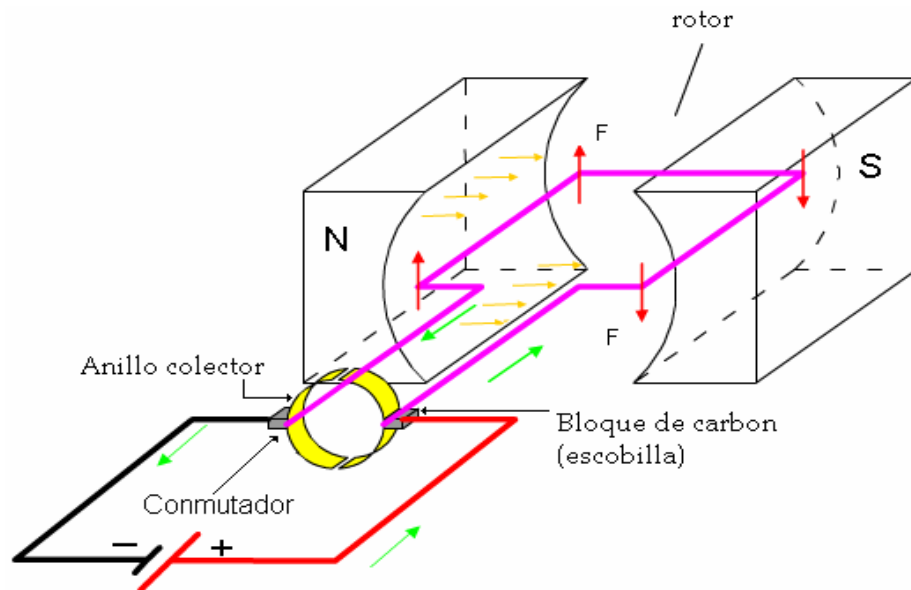


Figura 2.9. Motor básico de corriente directa

En la Figura 2-10 (a) se muestra como el movimiento de un conductor dentro de un campo magnético induce un voltaje. John Ambrose Fleming creó una regla que relaciona la ley de Faraday de la forma siguiente: si se extienden los dedos pulgar, índice y medio de la mano derecha, formando ángulos rectos entre sí y el dedo índice apunta en la dirección del flujo magnético Φ de los polos de norte a sur y el dedo pulgar apunta en la dirección de movimiento del conductor, entonces, el dedo medio apuntará hacia la terminal positiva del voltaje inducido, que también es la dirección del flujo de corriente convencional i inducida en el conductor, ver figura 2-10 (b).

De lo anterior, se hace evidente que un motor de cd no solamente puede operar como motor, si no que también puede operar como generador de cd, a los modos de operación anteriores se les conoce como modo motor y modo generador respectivamente.

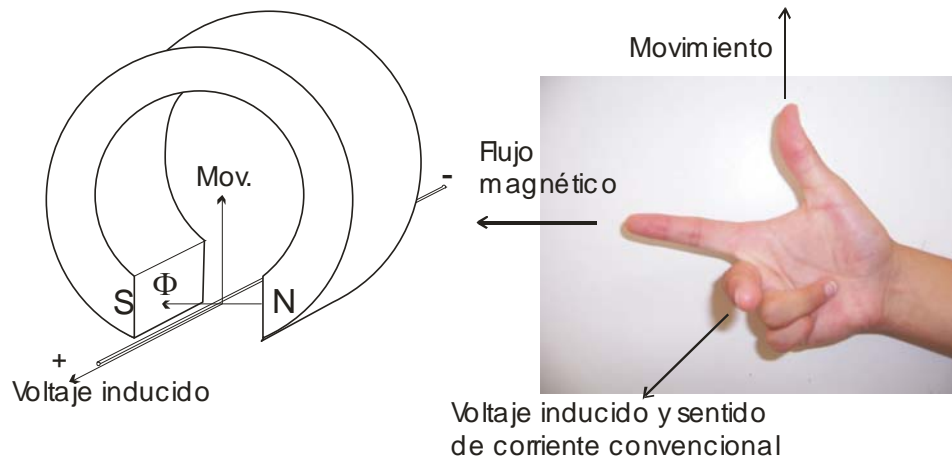


Figura 2.10. Regla de Fleming. (a) voltaje inducido, (b) regla de la mano derecha.

Cuando la armadura de un motor gira a consecuencia del par que se produce por la acción motor, actúa como generador al mismo tiempo. Como existe un campo magnético producido por los imanes a fin de que se produzca la acción motor, ese mismo campo genera un voltaje en los conductores de la armadura. De la ley de Faraday, la relación entre la regla de Fleming de la mano derecha de la acción generador y la regla de la mano izquierda de la acción motor, se aprecia que el voltaje inducido se opone a la corriente eléctrica producida por el voltaje aplicado que causa la acción motor. A este voltaje inducido que se opone al voltaje aplicado se le conoce como fuerza contraelectromotriz.

Cuando una fuente eléctrica es conectada al motor, este gira su eje, por lo que un motor convierte la energía eléctrica en energía mecánica [1], [15].

Hay razones que explican la popularidad actual de los motores de cd. Una es que los sistemas de potencia de cd todavía son comunes en automóviles, camiones y en la aviación. Cuando un vehículo tiene un sistema de potencia de cd, utilizará motores de cd.

Otra aplicación de los motores de cd es aquella situación en que se necesitan amplias variaciones de velocidad. Hasta hace poco tiempo, los motores de cd eran insuperables en aplicaciones de control de velocidad [2].

Se sabe que una máquina de cd puede funcionar como generador y como motor, se conoce que cuando funciona como generador debe estar acoplado a un motor primario para su funcionamiento, en cambio, cuando funciona como motor de cd se le aplica una tensión entre escobillas, en las cuales se crearan unas fuerzas mecánicas, con lo que conseguirá un movimiento en los conductores del devanado. Este funcionamiento hace que la máquina de cd

funcione como motor.

El movimiento que produce el inducido genera una fuerza contraelectromotriz, que se opone a la tensión aplicada a las escobillas, ésta es llamada fuerza contraelectromotriz.

El sentido de la fuerza contraelectromotriz, según la ley de Lenz, es opuesto a la tensión de la red, por ser ella la que motiva el giro del inducido.

El inducido es la parte de la máquina de cd que transforma la energía eléctrica en mecánica y viceversa. Tanto si funciona como generador o como motor, produce fuerza contraelectromotriz y desarrolla a la vez fuerzas mecánicas por ello, el estudio del inducido es común a ambas máquinas.

Cuando la máquina funciona como generador, produce una fuerza contraelectromotriz, de signo positivo y reacciona con un par negativo, llamado par resistente; se llama resistente por oponerse al par positivo dado por la máquina que mueve al generador.

Si una máquina funciona como motor, producirá un par motor positivo a la vez que ofrece una reacción, llamada fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m) por ser de signo opuesto a la tensión de la red.

2.3. Clasificación de los motores de cd.

Los motores de cd se dividen en: motor de rotor devanado, motor de imán permanente y motor conmutado electrónicamente, en este caso específico se trabajara con el motor de rotor devanado tipo serie como se muestra la Figura 2-11 [1].

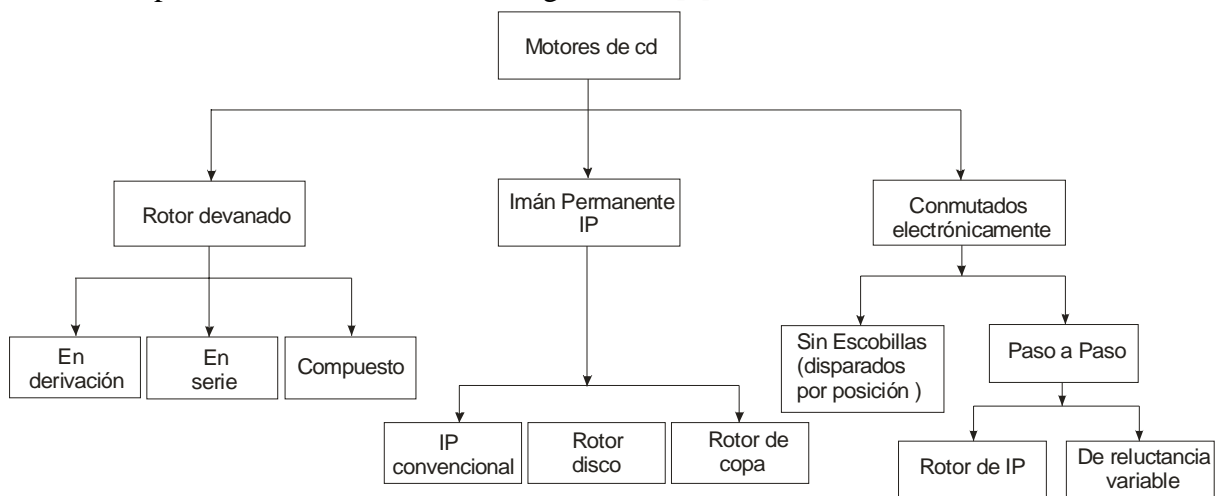


Figura 2.11. Motores de CD.

2.3.1. Motores de rotor devanado.

Los motores de rotor devanado se dividen en tres clases: el motor devanado en serie, el motor

de devanado en derivación y el motor compuesto. Interna y externamente, son prácticamente iguales. La diferencia entre ellos es la forma del alambrado de los circuitos de devanado de campo y devanado de armadura. El motor de devanado en serie tiene el devanado de campo alambrado en serie con la armadura. El motor de devanado en derivación tiene los circuitos de armadura y de campo alambrados en paralelo. El motor compuesto combina las características de los motores de devanado en serie y devanado en derivación.

La aplicación de un motor se determina directamente por las características de trabajo que va a desarrollar, particularmente para cada aplicación esta es determinada por el factor de servicio, que se define como las características de aplicación según el requerimiento de la máquina impulsada. A continuación se mencionan algunas de las aplicaciones de este tipo de motores:

- Robots móviles.- son máquinas dotadas de un sistema computacional que les permite percibir el entorno e interactuar con el mismo, en función de un programa que le introducimos, que podemos modificar según nuestras necesidades [18], [19].
- Vehículos eléctricos.- es una alternativa viable para el transporte de personas y bienes. Los vehículos eléctricos obtienen su capacidad de movimiento por la energía eléctrica liberada por unas baterías o bien por una célula de combustible de hidrogeno [URL2].
- Bomba hidráulica.-Es un sistema mecánico que puede formar parte de un sistema hidráulico el cual aprovecha la energía del movimiento realizando acciones de regulación y control para elevar o mover el agua.
- Ventiladores.-Es un dispositivo para agitar o mover aire o gas. Básicamente crea una corriente de aire moviendo unas aspas.

2.3.1.1. Construcción.

En la Figura 2.12 se muestran las partes de un motor de rotor devanado. Se llama motor de rotor devanado porque tiene una bobina electromagnética, un devanado multivuelta en su parte giratoria y no tiene un imán permanente en la misma. [1].

El motor de cd de rotor devanado esta compuesto de 2 piezas fundamentales, rotor (armadura ó inducido) ó parte giratoria y estator ó parte estacionaria.

Para lograr que un motor funcione, debe forzarse el giro de la parte interior, el rotor. La parte exterior, el estator, permanece estacionario. El rotor es un cilindro montado en un eje, con el eje soportado por cojines en ambos extremos, como se muestra en la Figura 2.13, los términos rotor y estator son términos mecánicos; no son términos eléctrico - magnéticos [1].

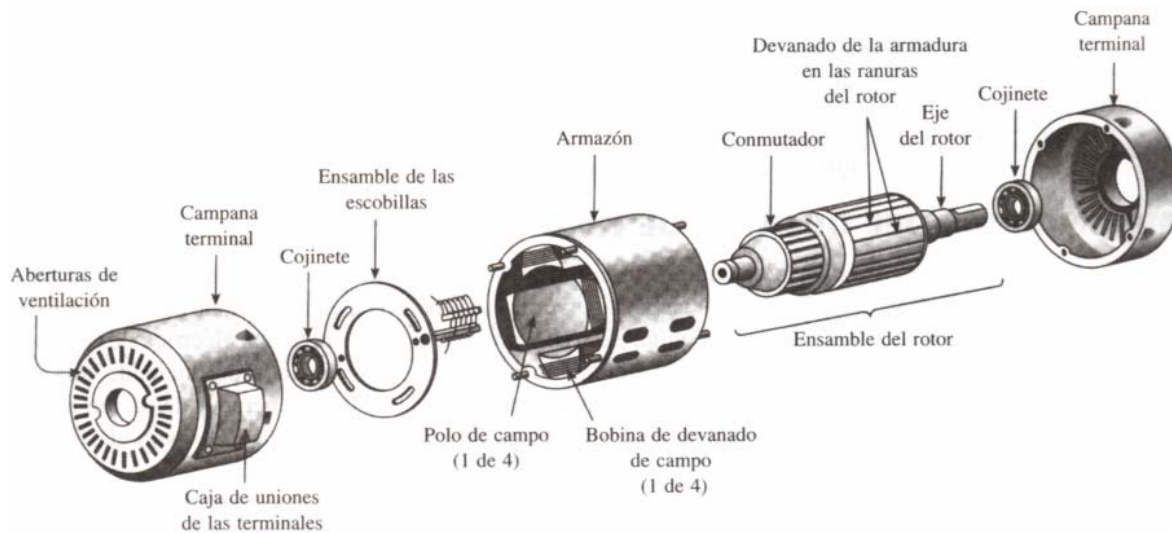


Figura 2.12. Partes de un motor de rotor devanado.

2.3.1.1.1. Rotor

Constituye la parte móvil del motor, proporciona el par para mover la carga y está formado por:

- **Eje:** formado por una barra de acero, da la rotación al núcleo, devanado y al colector.
- **Núcleo:** Se localiza sobre el eje fabricado con capas laminadas de acero, su función es proporcionar un trayecto magnético entre los polos para que el flujo magnético del devanado circule. Las laminaciones tienen por objeto reducir las corrientes parásitas. El acero del núcleo debe ser capaz de mantener bajas las pérdidas por histéresis. Este núcleo laminado contiene ranuras a lo largo de su superficie para albergar al devanado de la armadura (bobinado).
- **Devanado:** Consta de bobinas aisladas entre sí y entre el núcleo de la armadura. Estas bobinas están alojadas en las ranuras, y están conectadas eléctricamente con el colector, el cual debido a su movimiento rotatorio, proporciona un camino de conducción conmutado.
- **Colector:** Denominado también conmutador se encarga de conectar y desconectar las bobinas del rotor con el fin de que estas funcionen únicamente en las regiones donde el campo magnético es máximo, está constituido de laminas de material conductor delgadas separadas entre sí y del centro del eje por un material aislante, para evitar cortocircuitos con dichos elementos. El colector se encuentra sobre uno de los extremos del eje del rotor, de modo que gira con este y está en contacto con las escobillas.

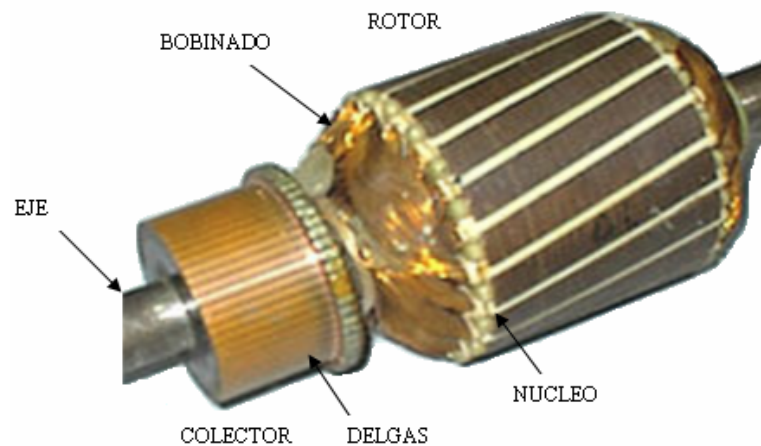


Figura 2.13. Rotor.

2.3.1.1.2. Estator

Constituye la parte fija del motor. Su función es suministrar el flujo magnético que será usado por el bobinado del rotor para realizar su movimiento giratorio y esta formado por:

- **Armazón:** Denominado también yugo, tiene dos funciones primordiales: servir como soporte y proporcionar una trayectoria de retorno al flujo magnético del rotor, vea la Figura 2.14.
- **Polos ó devanados de campo:** se encuentran alrededor de la armadura y su función es generar un campo magnético constante. Las características de estos devanados y los de rotor determinan el comportamiento del motor.
- **Escobillas:** Las escobillas están fabricadas de carbón, y poseen una dureza menor que la del colector, para evitar que éste se desgaste rápidamente. Se encuentran albergadas por los porta escobillas. Ambas escobillas y porta escobillas, se encuentran en una de las tapas del estator. La función de las escobillas es transmitir la tensión y corriente de la fuente de alimentación hacia el colector y por consiguiente, al bobinado del colector. La función del porta escobillas es mantener a las escobillas en su posición de contacto firme con los segmentos del colector. Esta función la realiza por medio de resortes, los cuales hacen una presión moderada sobre las escobillas contra el colector. Esta presión debe mantenerse en un nivel intermedio pues, de ser excesiva, la fricción desgastaría tanto a las escobillas como al colector; por otro lado, de ser mínima esta presión, se produciría lo que se denomina “chisporroteo”, que es cuando aparecen chispas entre las superficies del colector y las escobillas, debido a que no existe un buen contacto.

- **Carcasa:** Se fabrica de acero, aún que el tamaño ha permanecido prácticamente invariado en los últimos años por exigencias del reglamento.
- **Cabezal:** Cuanto mayor sea el número de piezas metálicas que posea, mayor será la disipación del calor, lo que conlleva un mejor rendimiento. Algunos ofrecen un diseño pensado para la máxima refrigeración e incluso los tornillos que fijan las trencillas de las escobillas pueden llevar acoplados un pequeño disipador de calor.
- **Muelles:** Su finalidad es hacer que las escobillas mantengan el contacto físico con el conmutador. La presión que ejercen sobre las escobillas determina en parte las prestaciones del motor. La elección de los muelles es importante y han de ser de buena calidad para resistir el paso de la corriente y el calor.
- **Vueltas de bobinado:** Con frecuencia se oye decir que tal motor es de 18 doble, o un 12 cuádruple, se refieren al hilo de cobre del bobinado, el primer número se refiere a las veces que se enrolla el hilo, si esto se hace 14 veces, se dice que el motor tiene 14 vueltas. Será simple, doble, triple, etc. según el número de hebras de hilo que se han usado cada vez que se ha dado una vuelta durante el bobinado.



Figura 2.14. Estator del motor de (CD).

2.3.1.2. Clasificación de los motores de rotor devanado

Existen básicamente tres tipos de motores de cd: Motor en Serie, Motor en Derivación y Motor Compuesto [13].

2.3.1.2.1. Motor serie

En la Figura 2.15 se muestra el circuito equivalente de un motor serie, cuyo devanado de campo está conectado en serie con el devanado de armadura. Por lo tanto, la resistencia total es igual a la suma de las resistencias de los devanados y la inductancia total es igual a la suma de las inductancias de los mismos. En este tipo de motores las bobinas polares principales son construidas de pocas espiras y con conductor de gran sección.

Si al efectuar el arranque del motor serie se conecta directamente a la línea, la intensidad de corriente absorbida tomara un valor exagerado. En efecto cuando el rotor esta detenido no se genera fuerza contraelectromotriz en el bobinado inducido (por no tener movimientos los conductores) entonces la intensidad de corriente absorbida recibe el nombre de corriente de cortocircuito.

El motor serie presenta el peligro de embalamiento cuando disminuye mucho la carga resistente o cuando trabaja en vacío. Considerando que cuando disminuye el valor de la intensidad de corriente también se reduce el valor del flujo.

El motor serie se caracteriza por tener un elevado par de arranque. Para evitar el peligro de embalamiento nunca se debe retirar el par de carga por completo en un motor serie ni se debe conectar a una carga mediante una banda o correa, u otro mecanismo que pudiera romperse. Si esto ocurriera y el motor llegara a quedar sin carga mientras está girando, el resultado podría ser un daño al motor [URL1].

Puesto que la corriente de campo es igual a la corriente de armadura, la excitación del campo magnético aumenta mucho en el arranque.

La desventaja principal de los motores en serie es su pobre regulación de velocidad [1].

El motor serie se utiliza en aplicaciones que requieren un par alto. Ejemplos de tales aplicaciones son los motores de cd de arranque en vehículos automotores, motores de elevadores y motores de tracción de locomotoras.

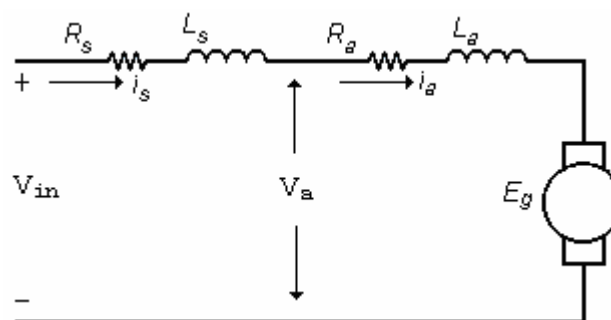


Figura 2.15. Circuito equivalente del motor serie:

2.3.1.2.2. Motor derivación

En la Figura 2.16 se muestra el circuito equivalente de un motor en derivación, un motor de cd en derivación es aquel cuyo circuito de campo obtiene su potencia directamente de las terminales de armadura del motor. Se designa así al motor de cd cuyo devanado de campo está en paralelo con el devanado de armadura.

En este tipo de motores las bobinas polares principales son construidas de muchas espiras y con hilos de poca sección, por lo que la resistencia del bobinado de armadura es muy grande.

La cantidad de corriente total absorbida por el motor se descompone en dos partes, una recorre el devanado de armadura y otra que pasa por el devanado de campo. La intensidad de la corriente de excitación es: $I = V_{in} / R$ este valor que permanece constante mientras no se modifique el voltaje de la línea V_{in} ni la resistencia del circuito en el cual se halla incluido el devanado de armadura, lo cual también determina que es constante el valor del flujo polar. El par de arranque del motor paralelo también es mayor que el momento de rotación nominal, opera sin llegar a ser tan elevado como el motor serie, ya que aquí solamente crece la corriente en el devanado de campo mientras que se mantiene constante el flujo (por ser constante la corriente de excitación). En consecuencia, el par de arranque es 1.4 a 1.8 veces el par nominal.

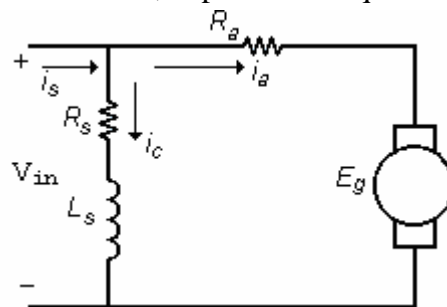


Figura 2.16. Motor en derivación.

El motor en derivación conserva casi inalterable su velocidad, aunque varíe el par resistente. No obstante, también el motor en derivación puede embalsarse si quedara cortado el circuito de excitación. Ahora bien, esto sólo puede ocurrir por error de maniobra o avería. La propiedad de tener una velocidad estable, hace del motor en derivación, el motor por excelencia para el mando de maquinas para herramientas, así como en aquellas aplicaciones que no han de tener vigilancia permanente.

2.3.1.2.3. Motor compuesto

En la Figura 2.17 se muestra el circuito equivalente de un motor de cd compuesto. Se designa así al motor de cd cuya excitación es originada por dos devanados inductores independientes, uno dispuesto en serie con el devanado de armadura y otro conectado en paralelo con el

mismo devanado de armadura.

Para impedir que la corriente absorbida en el arranque tome un valor excesivo, es preciso intercalar, en serie con el devanado de armadura, un reóstato de arranque, cuya resistencia esté calculada para que la intensidad de corriente en el arranque se encuentre dentro de los valores reglamentados [6].

El motor configurado en paralelo tiene una buena regulación de velocidad y un par inicial bastante bueno. El motor configurado en serie tiene una mala regulación de velocidad y un excelente par inicial. Un motor en configuración compuesta presenta una media entre las características de operación del motor en derivación y el motor en serie.

El motor compuesto tiene una regulación de velocidad aceptable, mucho mejor que el motor en serie y produce un buen par de arranque. El devanado de campo en paralelo y tiene una gran cantidad de vueltas de alambre delgado. Tiene una resistencia R_p alta y conduce una corriente i_{cp} relativamente pequeña. El devanado de campo en derivación está en paralelo con el devanado de armadura.

El devanado de campo serie está en serie con la combinación en paralelo del devanado de armadura y el devanado en derivación.

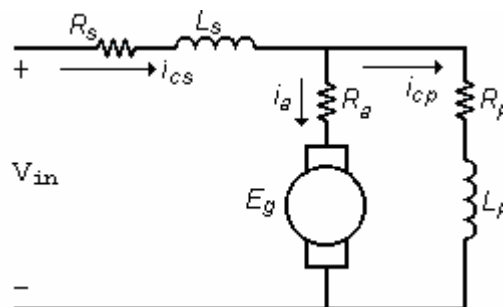


Figura 2.17. Motor compuesto.

2.3.2. Motores de Imán permanente (IP)

Los motores de IP se dividen en motores de IP convencional y motores de IP sin núcleo. Un motor de IP convencional es conceptualmente igual que un motor de rotor devanado configurado en derivación. El ensamble del rotor es idéntico, la única diferencia es que el campo magnético es establecido por imanes permanentes en lugar de electroimanes. Por su parte, los motores de IP sin núcleo se clasifican en motores de estructura de copa ó también conocidos como rotor de copa, y motores de estructura de disco ó rotor de disco.

2.3.3. Motores conmutados electrónicamente

Los motores paso a paso y los motores de cd sin escobillas son motores de conmutación electrónica. Conceptualmente son parecidos entre ellos.

El motor paso a paso es más apropiado para mover el eje una cantidad de giro exacta. Los motores de cd sin escobillas son más apropiados para la rotación continua de velocidad ajustable.

2.3.3.1. Motores paso a paso

Los motores paso a paso son fundamentalmente diferentes de los demás motores de cd: no tienen escobillas ni conmutador mecánico. En su lugar, la acción de conmutación necesaria para la función del motor de cd es lograda por transistores externos. Es más, el rotor no tiene devanado de armadura. Simplemente es una colección de imanes permanentes salientes.

Los motores paso a paso se dividen en motores de rotor de disco y motores de reluctancia variable.

Motores paso a paso de rotor de disco ó rotor IP

La estructura de rotor de disco fue diseñada para reducir la inercia de un motor de cd sin núcleo. La estructura de disco también puede usarse en el rotor de imán permanente de un motor paso a paso.

Motores paso a paso de reluctancia variable

No todos los motores paso a paso tienen rotores de imán permanente. La acción de pasos puede lograrse también con un núcleo cilíndrico no magnético dentado. Un motor paso a paso, se llama paso a paso de reluctancia variable porque el rotor siempre se mueve a la posición en la que es mínima la reluctancia magnética de la trayectoria general de flujo.

2.3.3.2. Motores de cd sin escobillas

El motor de cd sin escobillas es el otro miembro de la familia de los motores de cd de conmutación electrónica. En realidad, un mejor nombre para el motor de cd sin escobillas sería “motor de cd sin escobillas disparado por posición”, ya que cualquier motor paso a paso es sin escobillas y también es de cd.

La característica distintiva del motor de cd sin escobillas es su mecanismo de detección de posición, que es realimentado al controlador de secuencia para decirle cuándo conmutar al siguiente paso de la secuencia. Por tanto como regla general, el motor de cd sin escobillas no efectúa su paso a la siguiente posición y luego espera en esa posición la secuencia del controlador para conmutar los transistores de los devanados. Aunque puede operar de esa manera, es más adecuado para una rotación continua [1].

3. Controladores clásicos para el motor de cd

3.1. Términos básicos en control automático

El control automático es parte importante e integral en la industria. Con los avances en la teoría y en la práctica del control automático se ha logrado obtener un mejor desempeño de los sistemas. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina acción de control [4].

La variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla, por ejemplo: posición, velocidad y/o par de un motor de cd. Comúnmente la variable controlada es la salida del sistema también denominada señal de salida.

La variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. También se denomina señal de control.

La planta es cualquier objeto físico que se desea controlar, tal como, un dispositivo mecánico, eléctrico, biológico, térmico, electromecánico, etc.

A una señal que tiende a afectar adversamente el valor de salida de un sistema se le conoce como perturbación. Si ésta se genera dentro del sistema se le conoce como perturbación interna, si se produce fuera del sistema se le denomina perturbación externa y es una entrada.

3.1.1. Sistemas de control en lazo abierto

Un sistema de control en lazo abierto es aquel en donde la salida no afecta la acción de control. En un sistema de control en lazo abierto no se realimenta la salida como se muestra en la Figura 3.1.

Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan sistemas de control en lazo abierto. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada.

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Así, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija. En la práctica el control en lazo abierto sólo se usa si se reconoce la relación entre la entrada y la salida y si no hay perturbaciones internas y externas.

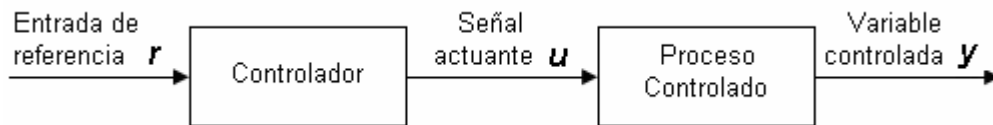


Figura 3.1. Elementos de un sistema de control en lazo abierto.

3.1.2. Sistemas de control en lazo cerrado

El control realimentado es una estrategia que en presencia de perturbaciones trata de reducir la diferencia entre la salida deseada de un sistema y alguna entrada de referencia.

Los sistemas de control realimentados o retroalimentados se denominan también sistemas de control en lazo cerrado. El control en lazo cerrado implica el uso de una acción de control retroalimentada para reducir el error en un sistema.

En la Figura 3.2 se muestra el diagrama de bloques de un control en lazo cerrado, también denominado sistema con retroalimentación negativa por el signo negativo que existe en el punto de suma. El bloque $G_p(s)$ representa la función de transferencia (FT) de la planta, $G_c(s)$ representa la FT de la acción de control y $H(s)$ la FT del sensor. Los elementos restantes son señales, donde la señal $R(s)$ es la señal de entrada de referencia, $E(s)$ la señal de error, $U(s)$ la señal de control, $C(s)$ La señal de salida y $B(s)$ la señal de retroalimentación, a todas las señales y bloques dados se les ha aplicado la transformada de Laplace. Las señales en el dominio del tiempo correspondientes al párrafo anterior son $r(t)$, $e(t)$, $u(t)$, $c(t)$ y $b(t)$ respectivamente. Por un lado está la señal de error $E(s)$ que es la que indica la diferencia entre la señal de referencia $R(s)$ y la señal retroalimentada $B(s)$ y por otro, está la señal de control $U(s)$ que es aquella que le indicará a los elementos finales de control la forma en que deben actuar.

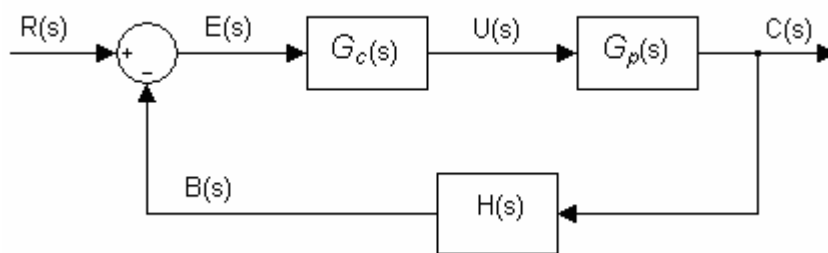


Figura 3.2. Sistemas de control en lazo cerrado.

En la Figura 3.3 se muestra la forma general de un control en lazo cerrado, donde el bloque del controlador $G_c(s)$ y el bloque de la planta $G_p(s)$ se simplifican en el bloque $G(s)$ conocido como función de transferencia de trayectoria directa o simplemente función de transferencia directa.

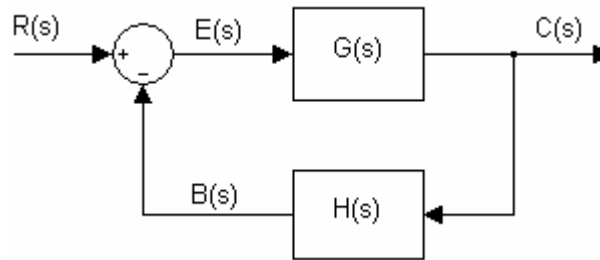


Figura 3.3. Sistema de control en lazo cerrado.

La señal de salida $G(s)$ y la señal de error $E(s)$ quedan determinadas respectivamente, por

$$C(s) = G(s)E(s) \quad (3.1)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - C(s)H(s) \quad (3.2)$$

Sustituyendo (3.1) en (3.2) y mediante manipulaciones algebraicas se obtiene la ecuación (3.3) que es la forma general de una función de transferencia en lazo cerrado.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.3)$$

En la ecuación (3.3) se observa la presencia del siguiente término

$$G(s)H(s) \quad (3.4)$$

denominado función de transferencia en lazo abierto, que es la función formada por el producto de la función de transferencia directa $G(s)$ y la función de transferencia de retroalimentación $H(s)$. El término completo del denominador de la ecuación (3.3) al ser igualado a cero forma la relación

$$1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.5)$$

Que es utilizada para proporcionar los polos de la función en lazo cerrado, esta ecuación es denominada ecuación característica.

Las ecuaciones (3.4) y (3.5) son utilizadas en el diseño de sistemas de control. En general, $G(s)$ y $H(s)$ se obtienen como cocientes de polinomios, así, la función de transferencia en lazo cerrado obtenida de (3.3) se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m \leq n) \quad (3.6)$$

Donde b_0, b_1, \dots, b_m y a_0, a_1, \dots, a_n son los coeficientes de los polinomios, m y n son las potencias más altas de s de los polinomios del numerador y denominador respectivamente. Si la potencia más alta de s en el denominador de la función de transferencia es igual a n , el sistema se denomina sistema de n -ésimo orden [3], [4].

Otra forma de expresar la ecuación (3.6) es mediante las raíces de los polinomios del numerador y del denominador; una vez factorizados los polinomios la ecuación (3.6) se escribe como

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \quad (m \leq n) \quad (3.7)$$

Donde z_1, z_2, \dots, z_m y p_1, p_2, \dots, p_n son cantidades reales o complejas que proporcionan los ceros y los polos, respectivamente, de la función de transferencia.

3.1.3. Estabilidad, respuesta transitoria y error en estado estacionario

El diseño de un sistema de control, debe ser capaz de predecir su comportamiento dinámico a partir del conocimiento de sus componentes. La característica más importante del comportamiento dinámico de un sistema de control es la estabilidad absoluta, es decir, si un sistema es estable o inestable.

Un sistema de control está en equilibrio si en ausencia de cualquier perturbación o entrada, la salida permanece en el mismo estado. Un sistema de control es estable si la salida termina por regresar a su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial. Un sistema de control es críticamente estable si las oscilaciones de la salida continúan por siempre. Es inestable si la salida diverge sin límite a partir de su estado de equilibrio cuando el sistema está sujeto a una condición inicial.

Entre los comportamientos importantes de un sistema que deben recibir una cuidadosa consideración, aparte de la estabilidad absoluta, están la respuesta transitoria y el error en estado estacionario e_{ss} . Cuando un sistema ha alcanzado un estado de equilibrio se dice que se encuentra en estado estacionario.

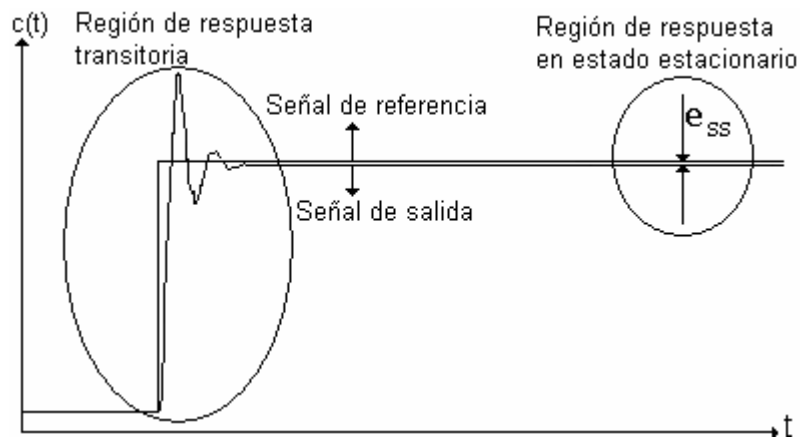


Figura 3.4. Regiones de interés para especificar el comportamiento de un sistema.

En la Figura 3.4 se muestran las dos regiones temporales de interés para especificar el comportamiento de un sistema. La primera región es la respuesta transitoria y la segunda región es la de estado estacionario.

Cuando un sistema de control está sujeto a una entrada, la salida no cambia inmediatamente, si no que exhibe una respuesta transitoria antes de alcanzar un estado estacionario, siempre y cuando, el sistema sea estable.

La respuesta transitoria de un sistema de control práctico con frecuencia presenta oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar un estado estacionario. Si la salida de un sistema no coincide exactamente con la referencia, se dice que el sistema tiene un error en estado estacionario e_{ss} .

Al analizar un sistema de control se debe examinar el comportamiento de la respuesta transitoria y el comportamiento en estado estacionario [4].

Dentro de los sistemas de control estables existen tres tipos de clasificaciones bien definidas: el caso amortiguado Figura 3.5 (a), el caso críticamente amortiguado Figura 3.5 (b), y el caso sobre amortiguado Figura 3.5 (c).

La salida contra el tiempo para un sistema críticamente estable se muestra en la Figura 3.5 (d).

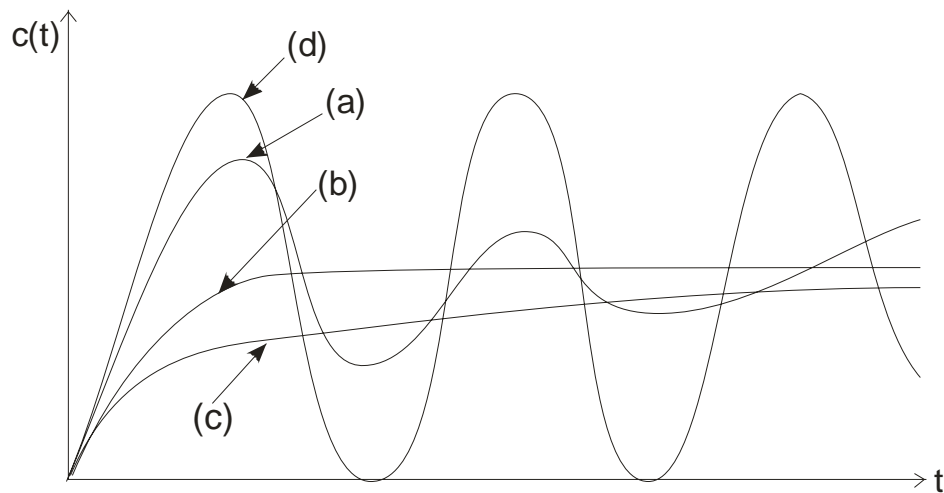


Figura 3.5. Señales de salida para sistemas de control.

3.1.3.1. Definición de respuesta transitoria.

En muchos casos prácticos, las características de desempeño deseadas del sistema de control se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo, comúnmente los sistemas no responden instantáneamente y exhiben respuestas transitorias cada vez que están sujetos a entradas o perturbaciones, frecuentemente, las características de desempeño de un sistema de control se especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario,

dado que ésta es fácil de generar y suficientemente drástica.

La respuesta transitoria de un sistema para una entrada escalón unitario depende de las condiciones iniciales. Por conveniencia, al comparar respuestas transitorias de varios sistemas, es común que las condiciones iniciales del sistema sean cero. De este modo, las características de respuesta se comparan con facilidad.

Al especificar las características de respuesta transitoria de un sistema de control para una entrada escalón unitario, es común especificar lo siguiente.

- **Tiempo de retardo** t_d , es el tiempo requerido para que la respuesta alcance por primera vez la mitad del valor final.
- **Tiempo de levantamiento** t_r , es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10% al 90%, del 5% al 95% ó del 0% al 100% de su valor final. Para sistemas subamortiguados de segundo orden, comúnmente se usa el tiempo de levantamiento de 0% a 100%. Para sistemas sobre amortiguados, suele usarse el tiempo de levantamiento de 10% a 90%.
- **Tiempo pico** t_p , es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico de sobre paso.
- **Sobre paso máximo** M_p , es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad. Si el valor final en estado estacionario es diferente de la unidad, es común usar el porcentaje de sobre paso máximo, que se define mediante

$$\text{Porcentaje de sobrepaso máximo} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% .$$

- **Tiempo de asentamiento** t_s , es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango dentro del valor final, de tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final y la señal permanezca dentro de éste rango, por lo general es de $\pm 2\%$ a $\pm 5\%$. El tiempo de asentamiento se relaciona con la mayor constante de tiempo del sistema de control. Los objetivos particulares de diseño de un sistema de control determinan qué criterio de error en porcentaje a utilizar.

Estas especificaciones se resumen en la Tabla 3.1 y se aprecian en forma grafica en la Figura 3.6.

Las especificaciones en el dominio del tiempo que se han proporcionado son importantes, ya que casi todos los sistemas de control son sistemas en el dominio del tiempo; es decir, deben presentar respuestas de tiempo aceptables. Esto significa que el sistema de control debe modificarse hasta que la respuesta transitoria sea satisfactoria [20].

Tabla 3.1. Especificaciones.

Tiempo de retardo	t_d
Tiempo de levantamiento	t_r
Tiempo pico	t_p
Sobre paso máximo	M_p
Tiempo de asentamiento	t_s

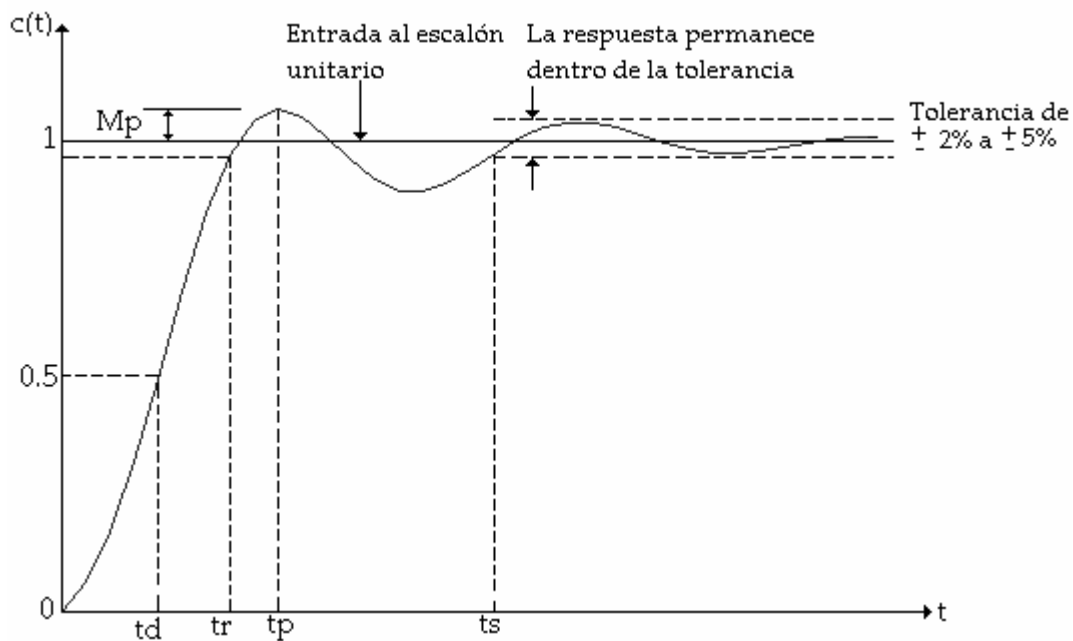


Figura 3.6. Curva de respuesta a un escalón en la que se muestran t_d , t_r , t_p , M_p , y t_s .

3.1.3.2. Análisis de estabilidad en el plano complejo

La estabilidad absoluta de un sistema lineal en lazo cerrado se determina a partir de la ubicación de las raíces de la ecuación característica en el plano s . Si las raíces están ubicadas en el semiplano derecho del plano s incluyendo el eje jw , el sistema es inestable, y si las raíces están ubicadas sobre el semiplano izquierdo del plano s el sistema es estable, como se muestra en la Figura 3.7. El que un sistema sea estable o inestable es una propiedad del sistema mismo y no depende de la entrada, ni de la función de excitación (forma de onda de la señal de entrada) al sistema.

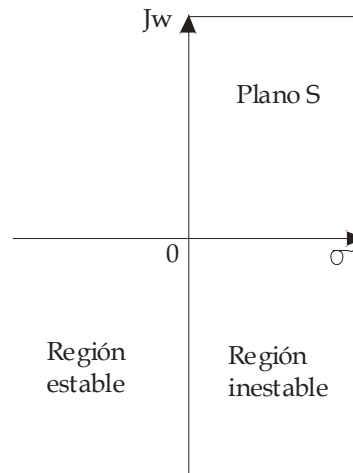


Figura 3.7. Regiones estable e inestable en el plano s.

Criterio de estabilidad de Routh -Hurwitz, este criterio es un método algebraico que proporciona información sobre la estabilidad absoluta de un sistema lineal e invariante con el tiempo que tiene una ecuación característica con coeficientes constantes. El criterio prueba si cualquiera de las raíces de la ecuación característica está en el semiplano derecho del plano S .

El criterio de estabilidad de Routh, para decidir si un sistema en lazo cerrado es estable o sólo se requiere saber si existen raíces de la ecuación característica en el semiplano derecho, y no es necesario conocer su valor. El método de Routh permite identificar el número de raíces en el semiplano derecho a través de un procedimiento relativamente simple [5].

Primero se debe expresar el numerador de la ecuación característica en forma polinomial.

$$F(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

Es necesario verificar que a_0 sea positiva, de lo contrario, debe multiplicarse los miembros de la ecuación por (-1).

El polinomio debe ser completo, esto es, ningún a_i debe ser cero, de lo contrario, al menos una raíz se encontrará en el semiplano derecho.


Si alguno de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ es negativo, entonces al menos una raíz se ubica en el semiplano derecho y no es necesario ningún análisis adicional. Más aún, el número de cambios de signos es igual a la cantidad de raíces en el semiplano derecho.

Si todos los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ son positivos se debe construir el arreglo de Routh.

s^n	a_0	a_2	a_4
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3
.....
s^2	e_1	e_2	0
s^1	f_1	0	0
s^0	g_1	0	0

Las primeras filas se construyen con los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. Si n es impar se agrega una columna de ceros y si n es par, la segunda fila se completa con un 0.

s^n	a_0	a_2	a_4
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3
.....
s^2	e_1	e_2	0
s^1	f_1	0	0
s^0	g_1	0	0



Las dos primeras filas se construyen con los coeficientes del polinomio característico

Los coeficientes de las filas subsiguientes se construyen con los coeficientes de las dos filas inmediatas anteriores. Por ejemplo, la tercera fila se construye con las siguientes operaciones.

s^n	a_0	a_2	a_4
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3
.....
s^2	e_1	e_2	0
s^1	f_1	0	0
s^0	g_1	0	0

Los coeficientes de la tercera fila en adelante se construyen a través de operaciones empleando las dos filas inmediatas anteriores

Las formulas para el cómputo de los distintos elementos del arreglo de Routh son:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \quad d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}$$

Este procedimiento continúa hasta que se completa la fila enésima.

Examinando los coeficientes de la primera columna del arreglo $a_0, a_1, b_1, c_1, \dots, e_1, f_1, g_1$, si algún coeficiente es negativo, al menos una raíz está en el semiplano derecho y el sistema será inestable. Más aún, el número de cambios de signo indica la cantidad de raíces en tal semiplano.

s^n	a_0	a_2	a_4
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3
.....
s^2	e_1	e_2	0
s^1	f_1	0	0
s^0	g_1	0	0

El número de cambio de signos resulta igual al número de raíces en el semiplano derecho

3.1.3.3. Error en estado estacionario

Una característica importante de los sistemas de control es su comportamiento en estado estacionario. Por error en estado estacionario se debe entender que es la diferencia entre el valor al cual debió llegar la respuesta y el valor que realmente alcanzó después de transcurrido un tiempo de ajuste o perturbación en la referencia.

Cualquier sistema de control práctico presenta un error en estado estacionario a ciertos tipos de entrada. Un sistema puede no tener un error en estado estacionario a una entrada escalón, pero el mismo sistema puede exhibir un error en estado estacionario diferente de cero a una entrada rampa. El que un sistema determinado exhiba un error en estado estacionario a un tipo específico de entrada, depende del tipo de función de transferencia en lazo abierto del sistema [4].

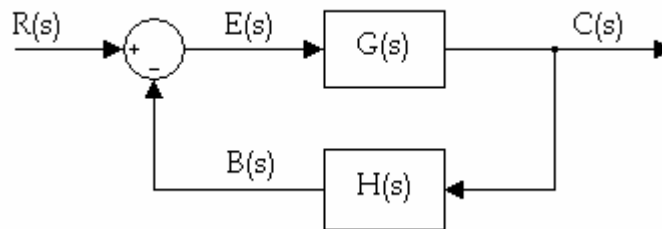


Figura 3.8. Sistema de control con retroalimentación negativa.

Para el sistema mostrado en la Figura 3.8 la función de transferencia en lazo cerrado es

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.8)$$

Y la función de transferencia que define a la señal de error entre la señal de entrada es

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.9)$$

Que al despejar el error se obtiene la siguiente ecuación

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.10)$$

3.1.3.4. Tipos de señales de entrada

Aunque exista una gran variedad de formas que puede adoptar la señal de entrada $r(t)$ a un sistema, éstas se pueden clasificar de acuerdo a tres tipos básicos.

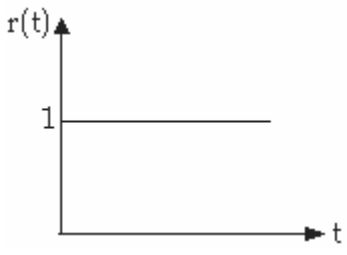
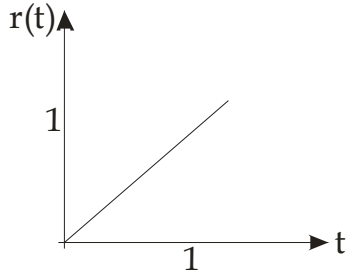
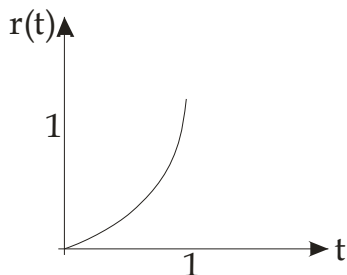
Entrada escalón unitario $r(t) = u(t)$

Entrada rampa unitaria $r(t) = t$

Entrada parábola unitaria $r(t) = t^2$

En la Tabla 3.2 se resumen los tipos básicos de entradas, sus funciones en el dominio del tiempo y su transformada de Laplace, así como sus formas de ondas correspondientes.

Tabla 3.2. Tipos de señales de entrada.

Entrada	Función en el tiempo	Transformada de Laplace	Graficas en el tiempo
Escalón unitario	$r(t) = u(t)$	$R(s) = \frac{1}{s}$	
Rampa unitaria	$r(t) = t$	$R(s) = \frac{1}{s^2}$	
Parábola unitaria	$r(t) = t^2$	$R(s) = \frac{2}{s^3}$	

3.1.3.5. Clasificación de los sistemas de control

Los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su capacidad de seguir entradas escalón, rampa, parábola, etc [4]. Para poder clasificar los tipos de sistemas es necesario expresar la función de transferencia en lazo abierto en la forma

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^N} \left(\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^j + a_1 s^{j-1} + \dots + a_{j-1} s + a_j} \right) \quad (m < j) \quad (3.11)$$

El sistema contiene el término s^N en el denominador, que representa un polo de multiplicidad N en el origen. El esquema de clasificación se basa en la cantidad de integraciones indicadas por s^N en la función de transferencia en lazo abierto. Un sistema se denomina del tipo 0, tipo

1, tipo 2, si $N = 0, N = 1, N = 2, \dots$, respectivamente. Esta clasificación es diferente de la que se basa en el orden del sistema. Conforme N es mayor, mejora la exactitud; sin embargo, al aumentar N también se agrava el problema de estabilidad. En la práctica es raro encontrar sistemas de tipo 3 ó superiores, pues, por lo general, resulta difícil diseñar sistemas estables con dos o más integradores en la trayectoria directa [4].

Típicamente $N = 0, 1$ y 2 , a continuación se muestra un ejemplo con tres funciones que corresponden a sistemas del tipo 0, 1 y 2.

- Sistema tipo 0 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)}$ (3.12)

- Sistema tipo 1 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$ (3.13)

- Sistema tipo 2 $G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)(s+4)}$ (3.14)

El sistema tipo 0 no tiene polos en el origen en tanto que los sistemas tipo 1 y 2 tienen uno y dos polos en el origen respectivamente. Por tanto, como ya se mencionó, el tipo de sistema está asociado al número de polos que estén en el origen definidos por la función retransferencia en lazo abierto [20].

3.2. Acciones de control

Existen varias acciones de control, entre las cuales se encuentran

- Acción de Control Proporcional (P).
- Acción de Control Proporcional Derivativa (PD).
- Acción de Control Proporcional Integral (PI).
- Acción de Control Proporcional Integral Derivativa (PID).

3.2.1. Acción de control proporcional

La acción de control proporcional (P) siempre está presente en los sistemas de lazo cerrado lineales. El efecto que tiene la acción proporcional sobre el comportamiento de los sistemas es incrementar la exactitud de estos, provocando también en la mayoría de los casos un incremento en la velocidad de respuesta, resultando un incremento en el sobrepaso, causando oscilaciones en la salida. La relación entre la salida del controlador $u(t)$ y la señal de error $e(t)$, para este tipo de acción proporcional es $u(t) = k_p e(t)$ (3.15)

Dicho de otra forma, la acción de control es proporcional a la señal de error; la función de transferencia del controlador proporcional es una constante

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (3.16)$$

$$G_c(s) = K_p \quad (3.17)$$

Donde K_p es denominada ganancia proporcional. Es importante resaltar la diferencia que existe entre los términos k_p y K_p , donde el primer término indica el coeficiente estático de error de posición y el segundo la ganancia proporcional.

El control proporcional es una de las acciones de control más fáciles de implementar, sin embargo, si la señal de error es muy pequeña, también lo será la acción de control, entonces la acción proporcional podría ser insuficiente para minimizar o eliminar el error en estado estacionario en la salida del sistema. Otro inconveniente del control proporcional es que si la ganancia proporcional es muy grande el sistema funcionará inadecuadamente debido al ruido. En la Figura 3.9 se muestra un diagrama a bloques simplificado del controlador proporcional.

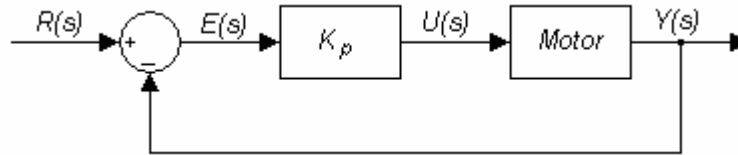


Figura 3.9. Diagrama a bloques del controlador proporcional.

Dentro de las principales características de este tipo de controlador se tienen las siguientes.

- Hacer más rápida la respuesta del sistema.
- Incrementa la ganancia del controlador.
- Al incrementar la ganancia puede provocar que el sistema sea más oscilatorio.

3.2.2. Acción de control proporcional derivativa

La acción de control derivativa (D) siempre debe ir acompañada de otras acciones de control y no puede ser aplicada sola. La definición del control derivativo indica que la señal de control $u(t)$ es proporcional a las variaciones de la señal de error $e(t)$. Una expresión que indica el comportamiento de esta acción en el dominio del tiempo es

$$u(t) = K_D \frac{d_e(t)}{dt} \quad (3.18)$$

Donde K_D es una constante ajustable conocida como ganancia o constante de acción derivativa. Por tanto, la acción, de control derivativa siempre va acompañada por la acción de control proporcional o proporcional integral.

Al combinarse el efecto de la acción de control proporcional con la derivativa se dice que se tiene un control proporcional derivativo (PD) cuyo comportamiento se define mediante la siguiente ecuación

$$u(t) = K_p e(t) + K_D \frac{d e(t)}{dt} \quad (3.19)$$

La función de transferencia del control proporcional derivativa es la siguiente

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_D s \quad (3.20)$$

$$G_c(s) = K_p + K_D s \quad (3.21)$$

En la Figura 3.10 se muestra un diagrama a bloques simplificado del controlador proporcional derivativo.

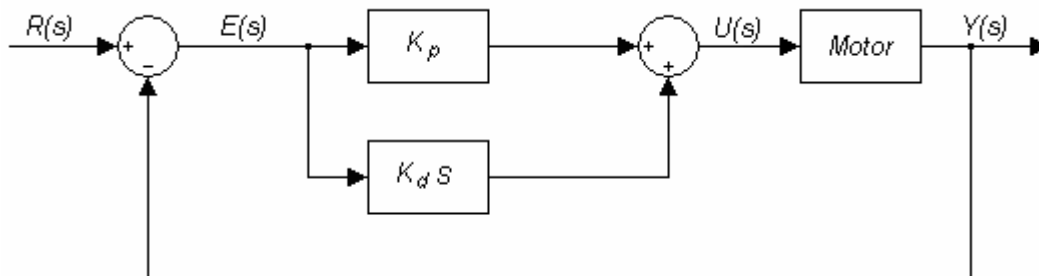


Figura 3.10. Diagrama a bloques del controlador proporcional derivativo.

El control derivativo no afecta en forma directa el error en estado estacionario, pero sí adiciona amortiguamiento al sistema, por lo que se puede dar un valor más grande a la constante proporcional, lo cual provoca una mejora en la exactitud en estado estacionario.

Dentro de las principales características de este tipo de controlador se tienen las siguientes.

- Aumenta el coeficiente de amortiguamiento K_d lo que reduce las oscilaciones del sistema en estado transitorio.
- El control K_d reduce el tiempo de levantamiento.
- No aumenta el orden del sistema en lazo cerrado.

3.2.3. Acción de control proporcional integral

En un controlador con acción de control integral (i), el valor de la salida del controlador $u(t)$ varía proporcionalmente a la señal de error $e(t)$ conforme a la siguiente relación

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \quad (3.22)$$

Resolviendo para $u(t)$ se llega al porqué se le denomina acción integral, es decir, la acción de control es la integral de la señal de error en el tiempo como se muestra a continuación

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt \quad (3.23)$$

Donde K_i es una constante ajustable, conocida como ganancia o constante de acción integral. Al combinar el efecto de la acción de control proporcional con la integral se dice que se tiene un control proporcional integral (PI) cuyo comportamiento se define con la siguiente ecuación.

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt \quad (3.24)$$

La función de transferencia del control proporcional integral es la siguiente

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (3.25)$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (3.26)$$

En la Figura 3.11 se muestra un diagrama a bloques simplificado del controlador proporcional integral.

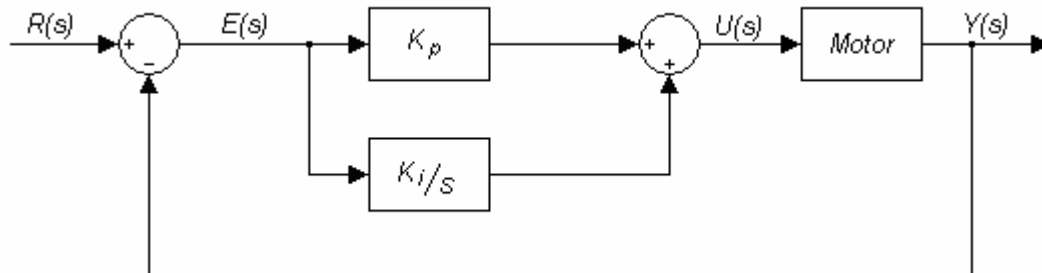


Figura 3.11. Diagrama a bloques del controlador proporcional integral.

Dentro de las principales características de este tipo de controlador se tienen las siguientes.

- Aumenta el coeficiente de amortiguamiento.
- Incrementa el tiempo de levantamiento.
- Mejora el error en estado estable.

3.2.4. Acción controlador proporcional integral derivativa

La combinación de una acción de control proporcional, con una acción de control Integral y una acción de control Derivativa se denomina acción de control Proporcional Integral Derivativa (PID). Esta acción combinada tiene las ventajas de cada una de las tres acciones de

control individuales. La ecuación del controlador con esta acción combinada es

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (3.27)$$

La función de transferencia del control proporcional integral derivativa es la siguiente

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (3.28)$$

$$G_c = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (3.29)$$

En la Figura 3.12 se muestra un diagrama a bloques simplificado del controlador proporcional integral derivativo.

Características del controlador (PID)

Esta acción combinada tiene la característica de cada una de las tres acciones de control individuales

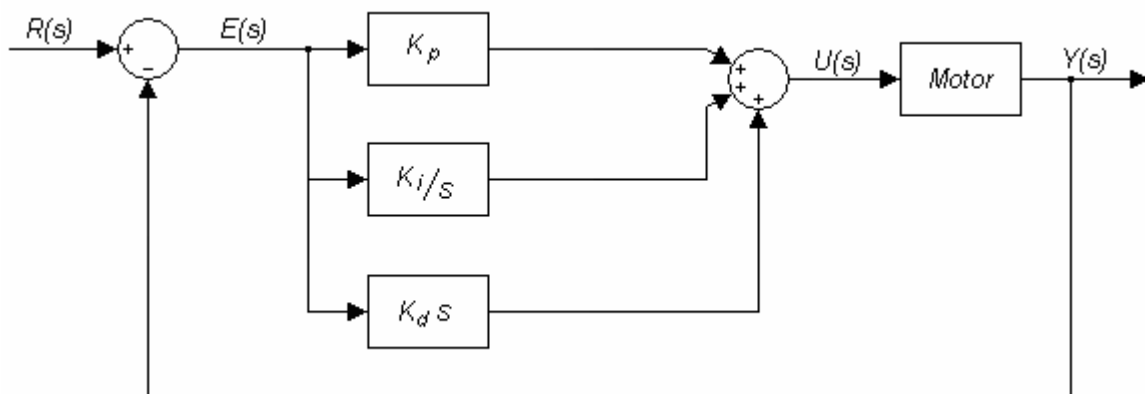


Figura 3.12. Diagrama a bloques del controlador proporcional integral derivativo.

4. Modelado matemático y simulación del motor de cd.

Puesto que los motores de cd se usan en forma extensa en sistemas de control, es necesario establecer modelos matemáticos de los mismos para propósitos de análisis.

4.1. Modelo matemático.

Un modelo matemático es un conjunto de ecuaciones que intentan aproximar el efecto que tienen las variables de entrada sobre las variables de salida en un sistema a lo largo del tiempo. Se construyen con la intención de que correspondan tan exactamente como sea posible con el mundo real, más ningún modelo puede ser jamás una replica exacta de su contraparte real. Un modelo resulta útil en la medida de que sus propiedades corresponden con las del mundo real. Para que un modelo o concepto sea útil desde un punto de vista científico, debe ser verificable mediante la observación [17].

El modelo siempre es una aproximación y supone un compromiso entre exactitud y sencillez.

4.2. Métodos de obtención de modelos matemáticos:

Analítico: Se estudia la constitución de la planta y se aplican las leyes físicas que caracterizan sus componentes para formular las ecuaciones del modelo.

Experimental: Se somete el sistema a pruebas en las variables de entrada y se observa el comportamiento de las salidas, tratando de establecer las ecuaciones que determinarían ese mismo comportamiento.

Habitualmente los modelos matemáticos en el presente trabajo de tesis se expresan mediante sistemas de ecuaciones diferenciales (o en diferencias) de orden n .

4.3. Modelado del motor de cd tipo serie con carga

En la Figura 4.1 se muestra el circuito básico de un motor de cd tipo serie. En este tipo de motores la armadura se modela como un circuito con resistencia de campo R_s en serie con una resistencia de armadura R_a . La inductancia de campo L_s , está a la vez conectada en serie a una inductancia de armadura L_a . Por su parte E_g representa la fuerza contraelectromotriz generada en la armadura cuando el rotor gira.

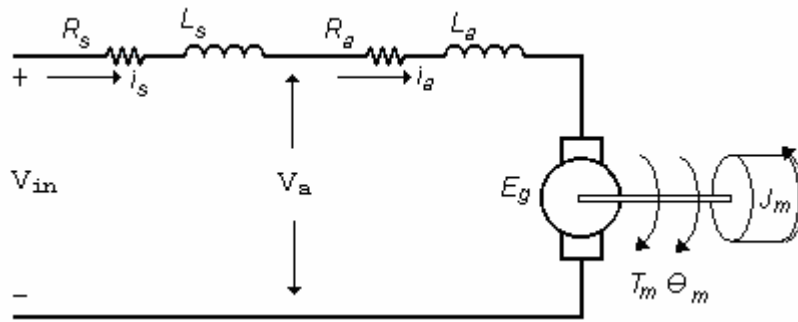


Figura 4.1. Circuito equivalente del motor de cd en serie.

La Figura 4.2 representa el circuito en forma simplificada, donde la resistencia total $R_t = R_s + R_a$, la inductancia total $L_t = L_s + L_a$ y la corriente que circula por el circuito es $i_s = i_a$.

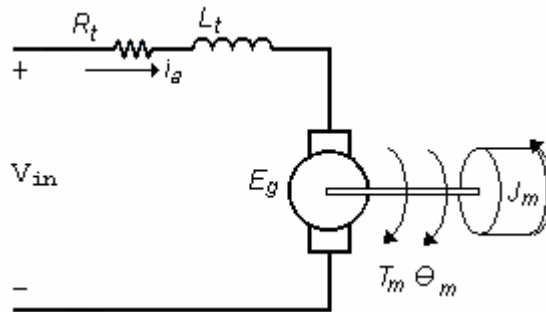


Figura 4.2. Circuito simplificado del motor en serie.

4.3.1. Ecuaciones en el tiempo

Con referencia al circuito de la Figura 4.2, haciendo uso de la ley de Ohm y la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene:

$$V_{in} = R_t i_a + L_t \frac{di_a}{dt} + E_g \quad (4.1)$$

Reacomodando términos:

$$L_t \frac{di_a}{dt} + R_t i_a = V_{in} - E_g \quad (4.2)$$

La ecuación (4.3) describe el modelado matemático del sistema mecánico del motor, el par T_m produce la velocidad angular w_m y el desplazamiento θ_m .

$$\frac{d^2 \theta_m}{dt^2} = \frac{T_m}{J_m} - \frac{T_L}{J_m} - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m}{dt} \quad (4.3)$$

Multiplicando por J_m ambos lados la ecuación (4.3) el resultado es el siguiente:

$$J_m \frac{d^2 \theta_m}{dt^2} = T_m - T_L - B_m \frac{d\theta_m}{dt} \quad (4.4)$$

La fuerza contraelectromotriz esta dada por la siguiente ecuación

$$E_g = K_b \frac{d\theta_m}{dt} = K_b w_m \quad (4.5)$$

El par desarrollado por el motor es:

$$T_m = K_j i_a \quad (4.6)$$

4.3.2. Representación de las ecuaciones mediante variables de estado

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_t i_a}{L_t} - \frac{K_b}{L_t} \frac{d\theta_m}{dt} + \frac{e_g}{L_t} \quad (4.7)$$

$$\frac{dw(t)}{dt} = \frac{K_j i_a}{J_m} - \frac{B_m w(t)}{J_m} - \frac{T_L}{J_m} \quad (4.8)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w_m(t) \quad (4.9)$$

Las ecuaciones de estado del sistema del motor de cd escritas en forma matricial son:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{dw_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_t}{L_t} & -\frac{K_b}{L_t} & 0 \\ \frac{K_j}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ w_m \\ \theta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_g(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t) \quad (4.10)$$

4.3.3. Matriz de controlabilidad

Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado, en un periodo finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un periodo finito, mediante alguna señal de control, no restringido. Si cualquiera de las variables de estado es independiente de la señal de control, entonces resulta imposible controlar esa variable de estado y, por lo tanto, el sistema es no controlable.

Puede no existir solución a un problema de control óptimo, si el sistema se considera no controlable. A pesar de que la mayor parte de los sistemas físicos son controlables, los modelos matemáticos correspondientes quizás no tengan la propiedad de controlabilidad. Por

lo tanto es necesario saber la condición bajo la cual el sistema es controlable [3].

Considerando el sistema lineal e invariante en el tiempo dado por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

x es el vector de estado.

y es el vector de salida.

u es el vector de entrada (o de control).

A es la matriz de estados.

B es la matriz de entrada.

C es la matriz de salida.

D es la matriz de transmisión directa.

La matriz de controlabilidad está dada por

$$P = [B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

De la ecuación (4.10) se obtiene la matriz A y B

$$A = \begin{bmatrix} -153.56 & -3.17 & 0 \\ 178.46 & -2.69 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$B = \begin{bmatrix} 8.81 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1352.86 \\ 1572.23 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} -202761.2125 \\ -245660.6943 \\ 1572.23 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Matriz que define la controlabilidad

$$P = \begin{bmatrix} 8.81 & -1352.86 & -202761.2125 \\ 0 & 1572.23 & -245660.6943 \\ 0 & 0 & 1572.23 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\Delta = 21777502.19$$

Puesto que la matriz es de tres por tres se dice que es de rango pleno, y el determinante es positivo se concluye que al menos existe un control que estabiliza al sistema.

4.3.4. Función de transferencia

Aplicándole la transformada de Laplace a la ecuación (4.2), y considerando las condiciones iniciales igual a cero se tiene.

$$L_t s i_a(s) + R_t i_a(s) = V_{in}(s) - E_g(s) \quad (4.17)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (4.5) se tiene la ecuación:

$$E_g(s) = K_b s \theta_m(s) \quad (4.18)$$

Factorizando y despejando $i_a(s)$ y sustituyendo $E_g(s)$ en la ecuación (4.17), se obtiene la ecuación (4.11) que representa la corriente de armadura del motor.

$$i_a(s) = \frac{V_{in}(s) - K_b s \theta_m(s)}{L_t s + R_t} \quad (4.19)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (4.4) se obtiene:

$$J_m s^2 \theta_m(s) - J_m s \theta_m(0) = T_m(s) - T_L(s) - \beta_m \theta_m(s) s \quad (4.20)$$

Haciendo uso del álgebra y factorizando la ecuación (4.20), el resultado es:

$$(J_m s^2 + \beta_m s) \theta_m(s) = T_m(s) - T_L(s) \quad (4.21)$$

Despejando $\theta_m(s)$, de la ecuación (4.21), se obtiene el desplazamiento angular del motor.

$$\theta_m(s) = \frac{T_m(s) - T_L(s)}{J_m s^2 + \beta_m s} \quad (4.22)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (4.6) se obtiene la ecuación

$$T_m(s) = K_j i_a(s) \quad (4.23)$$

Sustituyendo la ecuación (4.23) en la ecuación (4.21) el resultado es el siguiente.

$$(J_m s^2 + \beta_m s) \theta_m(s) = K_j i_a(s) - T_L(s) \quad (4.24)$$

Sustituyendo la ecuación (4.19) en la ecuación (4.24) el resultado es:

$$(J_m s^2 + \beta_m s) \theta_m(s) = K_j \frac{V_{in}(s) - K_b s \theta_m(s)}{L_t s + R_t} - T_L(s) \quad (4.25)$$

Haciendo uso del algebra en la ecuación (4.25) se tiene que:

$$(J_m s^2 + \beta_m s)\theta_m(s) = \frac{V_{in}(s)K_j - K_b s\theta_m(s)K_j}{L_t s + R_t} - T_L(s) \quad (4.26)$$

Despejando $-K_b s\theta_m(s)K_j$ de la ecuación (4.26) el resultado es

$$(J_m s^2 + \beta_m s)\theta_m(s) + \frac{K_b s\theta_m(s)K_j}{L_t s + R_t} = \frac{V_{in}(s)K_j}{L_t s + R_t} - T_L(s) \quad (4.27)$$

Factorizando la ecuación (4.27) nos queda:

$$\left(J_m s^2 + \beta_m s + \frac{K_b s K_j}{L_t s + R_t} \right) \theta_m(s) = \frac{V_{in}(s)K_j}{L_t s + R_t} - T_L(s) \quad (4.28)$$

multiplicando por $(L_t s + R_t)$ en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\left((J_m s^2 + \beta_m s)(L_t s + R_t) + K_b s K_j \right) \theta_m(s) = V_{in}(s)K_j - (T_L(s))(L_t s + R_t) \quad (4.29)$$

Considerando que $\alpha = \left((J_m s^2 + \beta_m s)(L_t s + R_t) + K_b s K_j \right)$ se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{\alpha \theta_m(s)}{\alpha} = \frac{V_{in}(s)K_j}{\alpha} - \frac{T_L(s)(L_t s + R_t)}{\alpha} \quad (4.30)$$

Despejando $V_{in}(s)$ de la ecuación (4.30) el resultado es el siguiente

$$\frac{\theta_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j}{\alpha V_{in}(s)} - \frac{T_L(s)(L_t s + R_t)}{\alpha V_{in}(s)} \quad (4.31)$$

Factorizando y reagrupando términos en la ecuación (4.31)

$$\frac{\theta_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{\alpha} \left(K_j - \frac{T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)} \right) \quad (4.32)$$

Sustituyendo el valor de α en la ecuación (4.32)

$$\frac{\theta_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m s^2 + B_m s)(L_t s + R_t) + K_b s K_j} \quad (4.33)$$

factorizando y agrupando la ecuación (4.33) se obtiene

$$\frac{\theta_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^3) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s^2 + (V_{in}(s)B_m R_t + K_b K_j)s} \quad (4.34)$$

Factorizando una s

$$\frac{\theta_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{(V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j))s} \quad (4.35)$$

Multiplicando por s ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\frac{\theta_m(s) s}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{(V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j))} \quad (4.36)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación (4.9).

$$s\theta_m(s) = w_m(s) \quad (4.37)$$

Finalmente se obtiene

$$\frac{w_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \quad (4.38)$$

Si $T_L(s) = 0$ N-m, la ecuación resultante sin carga es:

$$\frac{w_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{K_j}{J_m L_t s^2 + (B_m L_t + J_m R_t)s + (B_m R_t + K_b K_j)} \quad (4.39)$$

4.4. Simulaciones del motor en lazo abierto sin carga.

Con el fin de observar la respuesta del motor, se implementa un control de voltaje de armadura en lazo abierto. Las simulaciones del motor serie en lazo abierto se llevan a cabo mediante la utilización de un software, (MATLAB que es un ambiente de cómputo), este software utiliza una herramienta que es SIMULINK que es un programa que permite la simulación en el tiempo de sistemas que el usuario construye gráficamente a partir de bloques predefinidos o definidos por el mismo.

4.4.1. Parámetros del motor.

En la Tabla 4.5 se muestran los parámetros utilizados en la simulación del motor, estos valores fueron obtenidos en el laboratorio de control, utilizando el grupo motor generador y el equipo de Lab-Volt, la medición de estos parámetros se detallan a continuación.

4.4.2. Medición experimental de los parámetros del motor de cd.

Para caracterizar un motor de cd es necesario obtener los parámetros involucrados. Una forma de lograr esto es mediante la realización de experiencias en condiciones de estado estable. Cuando se aplica una tensión constante entre las terminales del motor, después de transcurrir el tiempo necesario para que la respuesta transitoria sea nula, se alcanza la respuesta en estado estable.

Parámetros a medir

Tabla 4.1. Parámetros a medir.

Resistencia de armadura.	R_a
Resistencia en serie.	R_s
Inductancia de armadura.	L_a
Inductancia serial.	L_s
Constante de la fuerza contraelectromotriz.	K_b
Coefficiente de fricción viscosa.	B_m
Constante mecánica	τ_m
Inercia del motor.	J_m

Material y equipo requerido

Grupo Motor Generador cd.

Motor de impulsión dinamómetro.

Multímetro Fluke 187.

Medidor Quad Tech 1715 LCR.

Fuente variable de voltaje 0-120V -8A cd.

Fuente de alimentación de 24V-3A ca.

Captador de Velocidad Tacómetro.

Osciloscopio TEKTRONIX TDS 210.

4.4.2.1. Medición de resistencias

Primero se midieron las resistencias de armadura y de campo del motor, utilizando el medidor RLC Quad Tech 1715 que se encuentra en el laboratorio de control. Estas presentaron variaciones dependiendo del ángulo del rotor (efecto de las escobillas y delgas), por lo que se realizaron varias mediciones de estas. En la Tabla 4.2 se presentan las mediciones. En la Figura 4.3 se muestra el diagrama de conexiones utilizado para medir estos parámetros.

Tabla 4.2. Medición de resistencias.

Resistencia	Valor máximo [Ω]	Valor mínimo [Ω]	Valor promedio [Ω]
R_a [Ω]	12.18	10.98	11.58
R_s [Ω]	6.39	5.31	5.85

4.4.2.2. Medición de inductancias

De la misma forma se midieron las inductancias de campo y de armadura, utilizando el mismo equipo del apartado anterior. Las mediciones de inductancia se presentan en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Medición de inductancias.

Inductancia	Valor máximo [mH]	Valor mínimo [mH]	Valor promedio [mH]
L_a [mH]	78.85	74.01	76.43
L_s [mH]	37.95	36.29	37.12

4.4.2.3. Constante de la fuerza contraelectromotriz K_b

Para determinar K_b , se utiliza el hecho de que en estado permanente

$$V_{in} = (R_a + R_s)I_a + E_g \quad (4.40)$$

$$V_{in} = (R_a + R_s)I_a + K_b \omega_m \quad (4.41)$$

$$K_b = \frac{V_{in} - (R_a + R_s)I_a}{\omega_m} \quad (4.42)$$

En la Tabla 4.4 se presentan las mediciones realizadas para determinar K_b . Para calcular esta constante se hizo un barrido de voltaje y se midió la corriente y la velocidad que son los datos faltantes para determinar dicha constante. En la Figura 4.4 se muestra el diagrama de conexión utilizado.

Tabla 4.4. Medición de parámetros.

V_{in} [V]	I_a [A]	ω_m [Rev/min]	ω_m [Rad/s]	K_b [V/rad/s]
20.13	0.87	600	62.82	0.1994
30.06	0.99	750	78.52	0.2651
40.01	1.11	850	88.99	0.3295

50.3	1.23	980	102.60	0.3748
60.4	1.32	1150	120.40	0.3960
70.1	1.50	1200	125.64	0.4430
80.1	1.81	1240	129.64	0.4834
90.5	2.14	1280	134.01	0.5216

El valor promedio de la constante de la fuerza contraelectromotriz K_b es de 0.3605 V/Rad/Seg

Una vez obtenido el valor de la constante de la fuerza contraelectromotriz K_b , se determina directamente la constante del par K_j a través de la siguiente relación.

$$K_j = K_b \left[\frac{N.m}{A}; \frac{V}{rad/s} \right] \quad (4.43)$$



Figura 4.3. Diagrama de conexión para medir la resistencia de armadura.



Figura 4.4. Diagrama de conexión de la fuerza contraelectromotriz.

4.4.2.4. Coeficiente de fricción viscosa, B_m

Para determinar el coeficiente de fricción viscosa partimos de la siguiente ecuación

$$J \frac{dw_m}{dt} = K_b i_a - B w_m \quad (4.44)$$

Recordando que en estado estable

$$J \frac{dw_m}{dt} = 0 \quad (4.45)$$

despejando B , de la ecuación (4.44) el resultante es

$$B = \frac{K_b i_a}{w_m} \quad (4.46)$$

De la Tabla 4.3 se obtienen los valores de los parámetros para determinar el valor de constante de fricción viscosa.

$$B = \frac{(0.3605)(1.49)}{98.41} = 5.45 \times 10^{-3} \text{ N-m/rad/s.}$$

4.4.2.5. Constante mecánica τ_m

Lamentablemente la constante mecánica no puede ser medida directamente, no obstante se estimó de forma experimental. El experimento se repitió varias veces como se muestra en la Figura 4.5. La constante de tiempo τ_m se estimó como un tercio del tiempo que transcurre entre desconectar la alimentación del motor y su detención (ver Figura 4.6). En la Tabla 4.5 se presentan las mediciones realizadas para determinar la constante mecánica del motor τ_m , estas mediciones se hicieron en lab-volt.

Tabla 4.5. Medición de la constante mecánica.

V_{in} [V]	I_a [A]	w_m [Rev/min] Dinamómetro	Tiempo de caída en [ms]	τ_m [ms]
50.19	1.98	601	880	293.33
60.22	2.12	733	980	326.66
70.70	2.27	854	1.09	363.0
80.44	2.41	957	1.18	393.0
90.40	2.67	1037	1.35	450.0

4.4.2.6. La inercia del motor J_m

La inercia del motor, se calcula mediante la siguiente ecuación

$$\tau_m = \frac{J_m}{B_m} \quad (4.47)$$

Como ya se conocen los valores de la constante mecánica y el coeficiente de fricción viscosa, solo se despeja la inercia del motor de la ecuación (4.47) dando como resultado la siguiente ecuación donde solo se sustituyen los valores.

$$J_m = B_m \tau_m \quad (4.48)$$

$$J_m = (5.45e - 3)(371.66) = 2.0255 \times 10^{-3} \text{ Kg} - m^2$$



Figura 4.5. Diagrama de conexión de la constante mecánica.

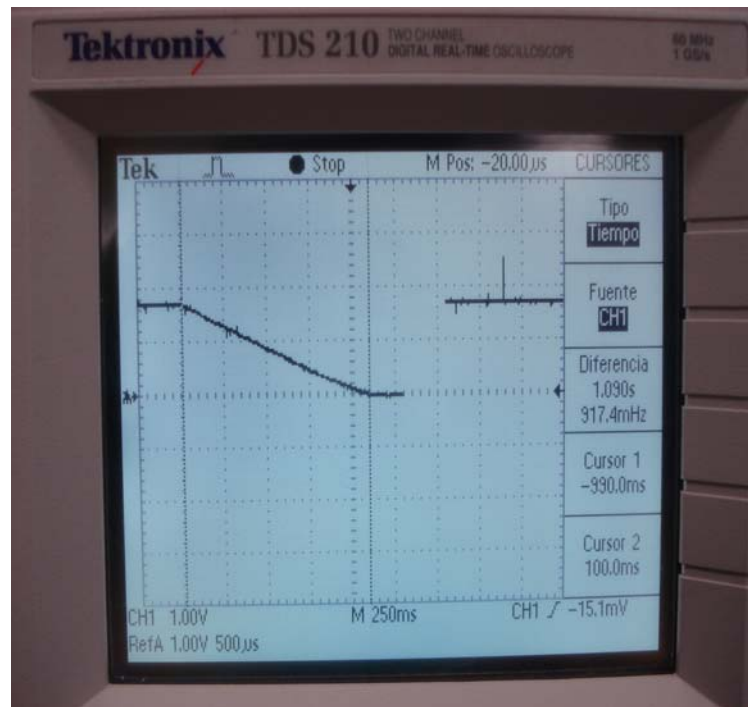


Figura 4.6. Tiempo de caída del motor cuando es apagado.

Tabla 4.6. Parámetros del motor.

Nombre	Parámetros	Unidades
Inercia del motor	J_m	0.00202 $Kg - m^2$
Constante del par	K_j	0.3605 $N - m / A$
Constante de la fuerza contraelectromotriz	K_b	0.3605 $V / rad / s$
Coefficiente de fricción viscosa	B_m	0.00545 $N - m / rad / s$
Resistencia de armadura	R_a	11.58 Ω
Resistencia de campo	R_s	5.85 Ω
Resistencia total	R_t	17.43 Ω
Inductancia de armadura	L_a	0.0764 mH
Inductancia de campo	L_s	0.03712 mH
Inductancia total	L_t	0.1135 mH
Voltaje de entrada	V_{in}	80 V
Par de carga	T_L	0.4 $N - m$

4.4.3. Diagrama general del motor.

La Figura 4.7 muestra el diagrama a bloques realizado en simulink, este diagrama a bloques del motor en lazo abierto se obtiene de las ecuaciones de modelado, de la ecuación (4.19) y la (4.22) ha está ecuación se le hace el cambio de θ_m por la velocidad w_m [21]. Esta simulación se realizó considerando al motor en vacío y un voltaje de entrada de 80 V.

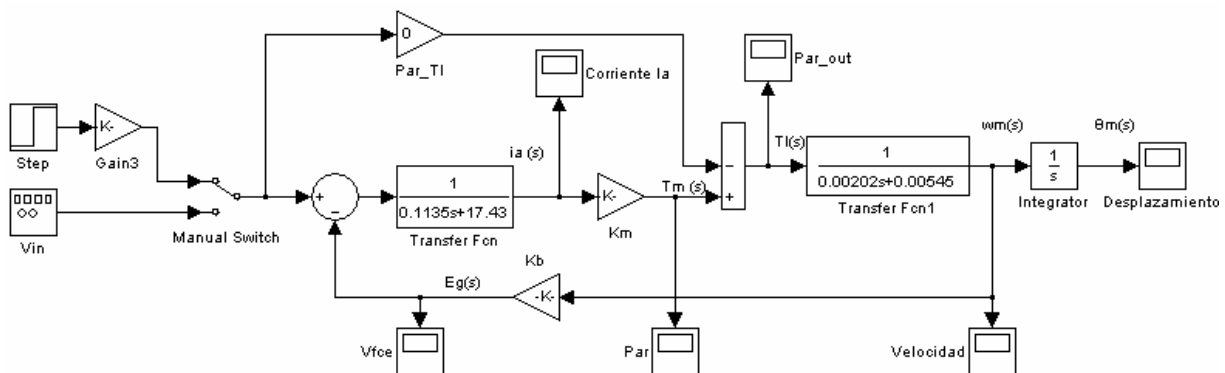


Figura 4.7. Diagrama general del motor lazo abierto sin carga.

4.4.4. Graficas de salida del motor.

En la Figura 4.8 se muestra la corriente de armadura del motor, cuyo pico característico se debe a que inicialmente la armadura no gira y únicamente la resistencia de los devanados es la que se opone al flujo de corriente, posteriormente esta corriente satura las bobinas creando un fuerte campo magnético, de tal manera que se crea el par suficiente para hacer girar la armadura, dando lugar a la fuerza contraelectromotriz que es opuesta en polaridad al voltaje aplicado, disminuyendo de esta manera la corriente y estabilizándola a un valor de 1.94 A.

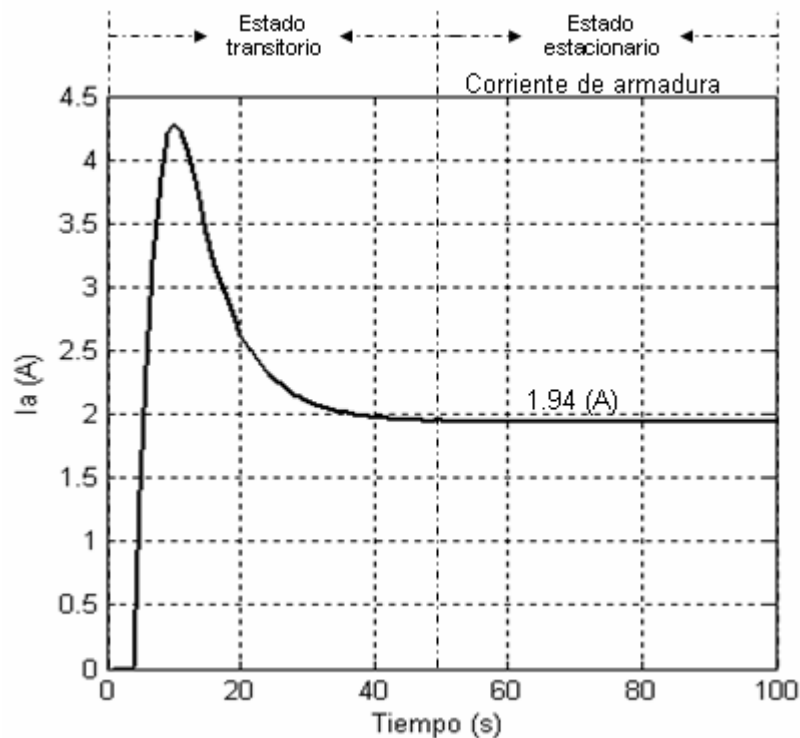


Figura 4.8. Corriente de armadura, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$

En la Figura 4.9 se muestra el par generado del motor (que es una fuerza de giro). Puesto que el par es proporcional a la corriente de armadura, presenta un comportamiento similar a la misma, el par permanece constante con un valor de 0.699 N-m.

En la Figura 4.10 se muestra el par de salida. Como el motor no presenta carga o está funcionando en vacío, el par de salida es el mismo que el par generado.

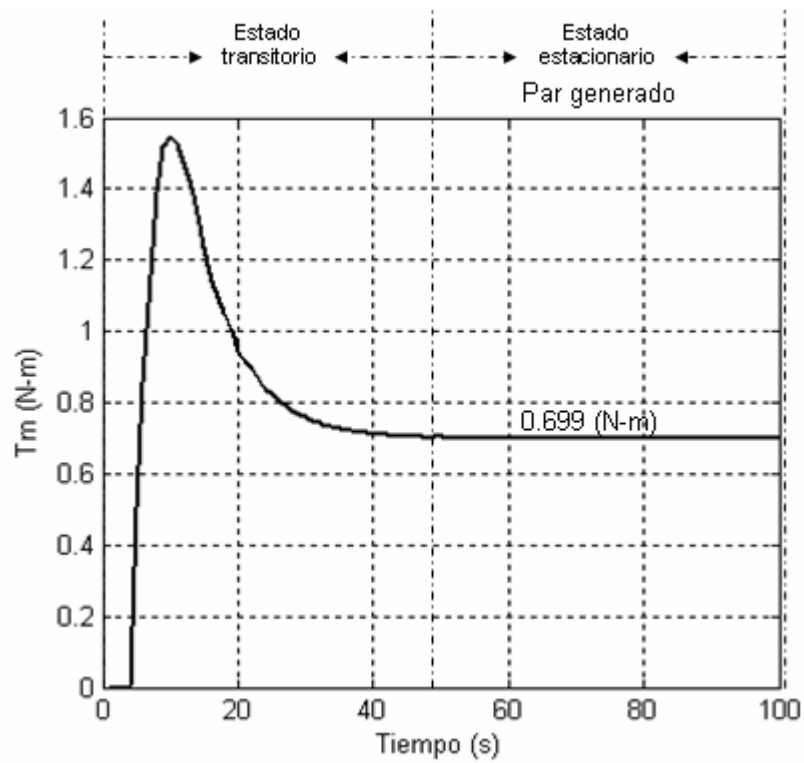


Figura 4.9. Par generado, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$

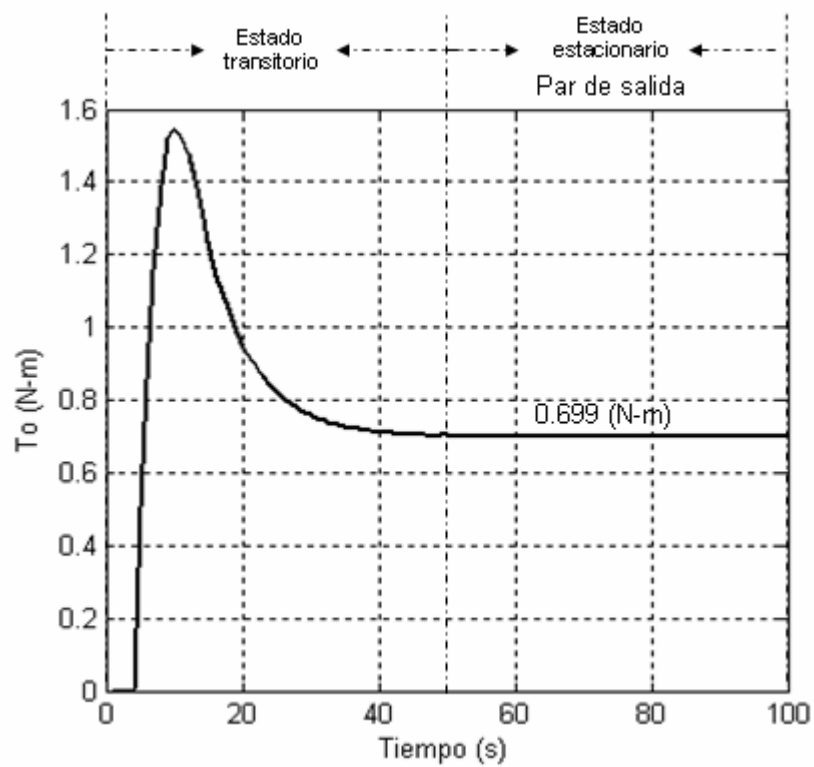


Figura 4.10. Par de salida, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$

En la Figura 4.11 se muestra el desplazamiento o posición angular del motor, cuando se aplica un voltaje al motor la armadura no gira, una vez que la armadura empieza a girar se presenta el desplazamiento angular, (es sencillamente la distancia desde una posición de referencia del motor).

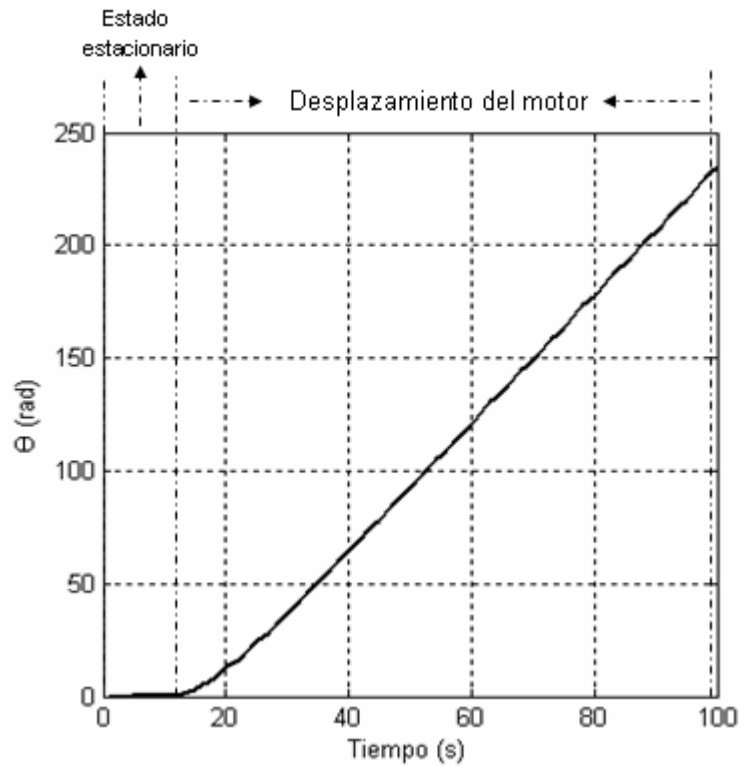


Figura 4.11. Desplazamiento, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$

En la Figura 4.12 se muestra la velocidad del motor, partiendo de un valor de cero, considerando que inicialmente la armadura está en reposo. Sin embargo una vez que la armadura empieza a girar la velocidad se incrementa en función del voltaje aplicado como se observa en la grafica, su estabilización es de un valor de 128.36 rad /s.

En la Figura 4.13 se muestra la fuerza contraelectromotriz que representa el voltaje inducido en la armadura del motor, el cual inicia de cero hasta alcanzar un valor estable 46.27 V.

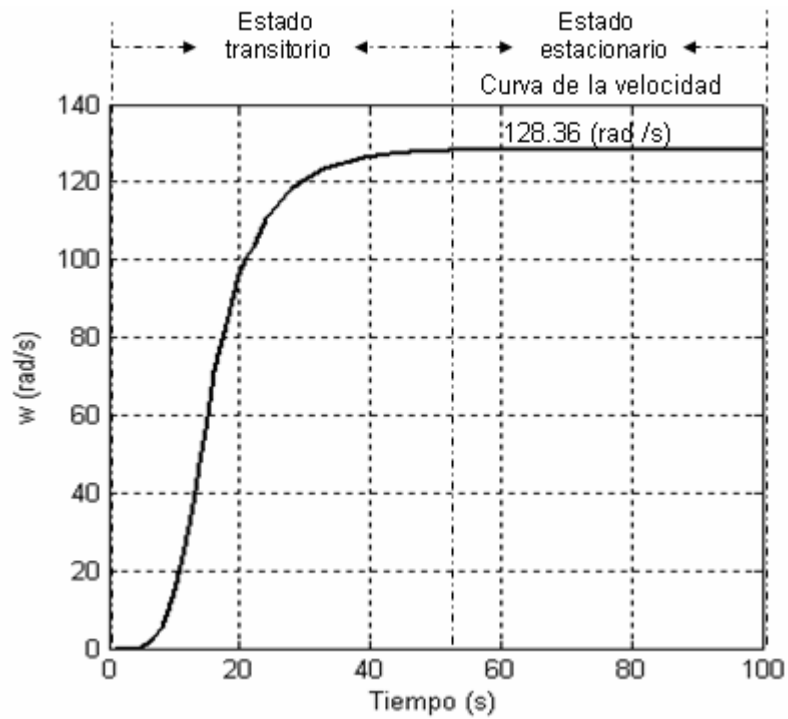


Figura 4.12. Velocidad, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$

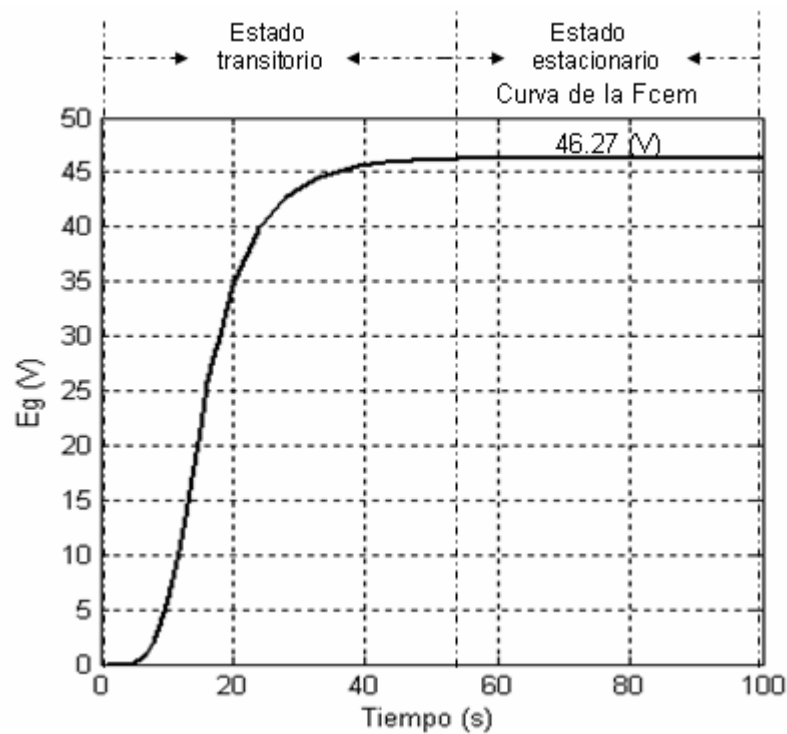


Figura 4.13. Fuerza contraelectromotriz, motor en vacío, $V_{in} = 80 V$

En la Tabla 4.7 se muestran resultados de las simulaciones con otros valores de voltaje sin mostrar las graficas correspondientes.

Tabla 4.7. Parámetros del motor sin carga, simulado en MATLAB.

V_{in} [V]	I_a [A]	w_m [rad/s]
50	1.21	80.13
60	1.45	96.15
70	1.69	112.18
80	1.94	128.4

4.4.5. Validación del modelo del motor.

Para validar el modelo matemático del motor se obtuvo de manera experimental la Tabla 4.8 utilizando el grupo motor-generator de cd, equipo de Lab-Volt e interfaz de adquisición de datos en el laboratorio de control.

Haciendo un análisis comparativo de ambas tablas se observa que los resultados en general presentan un error inferior al 10%.

Tabla 4.8. Parámetros del motor sin carga medido en LAB-VOLT.

V_{in} [V]	I_a [A]	w_m [rad/s]
50	1.34	78.54
60	1.36	91.63
70	1.52	104.73
80	1.57	111.22

4.5. Simulaciones del motor en lazo abierto con carga.

Para observar el comportamiento del motor bajo carga, se aplica un voltaje de 80 V y un par de carga constante de 0.4 N-m, utilizando el grupo motor de impulsión-dinamómetro que se encuentra en el laboratorio de control.

4.5.1. Graficas de salida del motor con carga.

En la Figura 4.14 se muestra la corriente de armadura del motor, la grafica es similar a la obtenida en vacío, sin embargo dicha corriente se incrementa como se esperaba por efecto de la carga, obteniendo un valor permanente de 2.58 A.

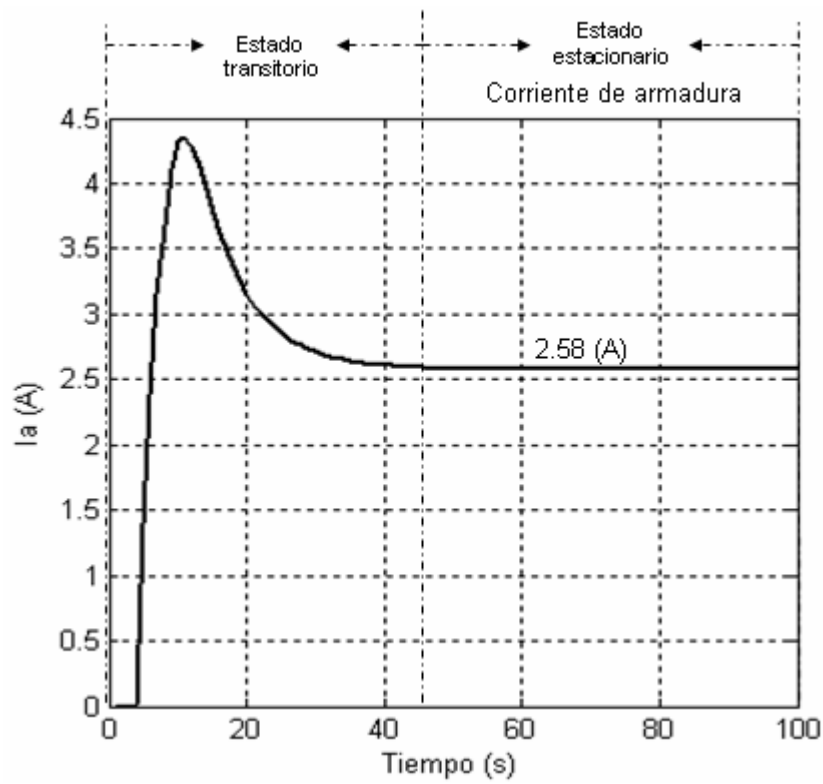


Figura 4.14. Corriente de armadura, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80$ V

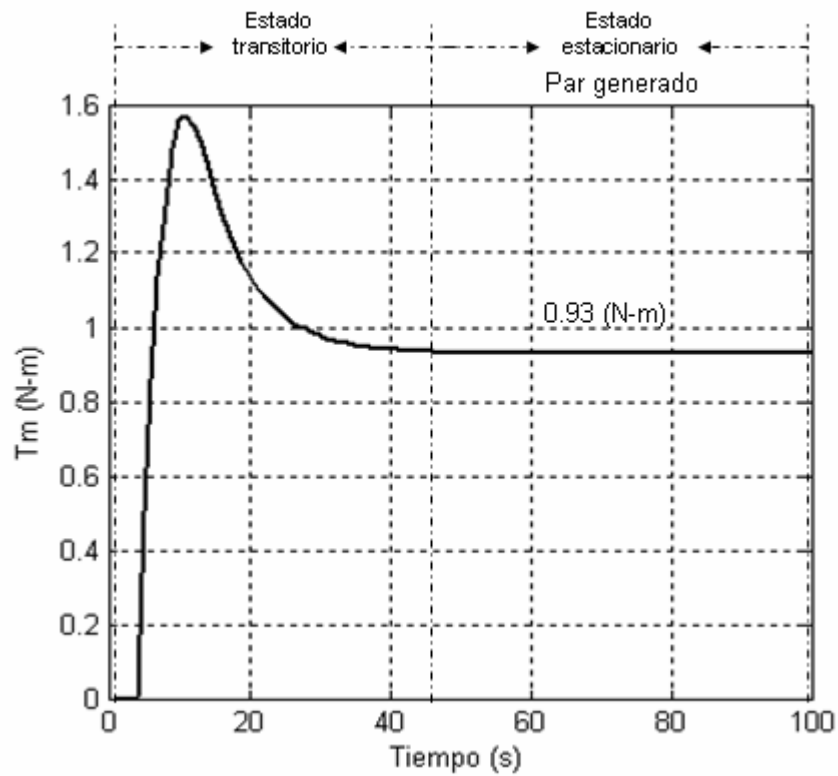


Figura 4.15. Par generado, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80$ V

En la Figura 4.15 se muestra el par generado del motor, puesto que se incrementó la corriente, el par se incrementa proporcionalmente a un valor de 0.93 N-m.

En la Figura 4.16 se muestra el par de salida, que representa la diferencia entre el par generado y el par resistente ó par de carga. En este caso el par de salida disminuye a 0.53 N-m.

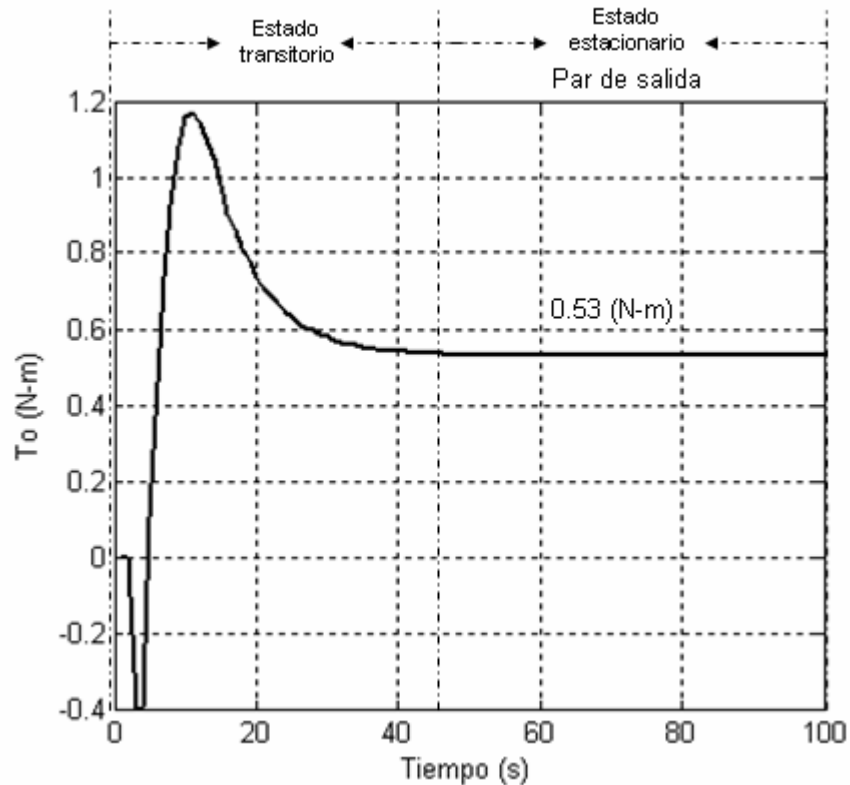


Figura 4.16. Par de salida, con carga de 0.4 N-m, $V_m = 80 V$

La Figura 4.17 muestra el desplazamiento o posición angular del motor, como el motor presenta carga su desplazamiento es más lento.

En la Figura 4.18 se muestra la velocidad del motor, cuyo valor es 97.5 rad/s, la cual disminuye por efecto de la carga aplicada.

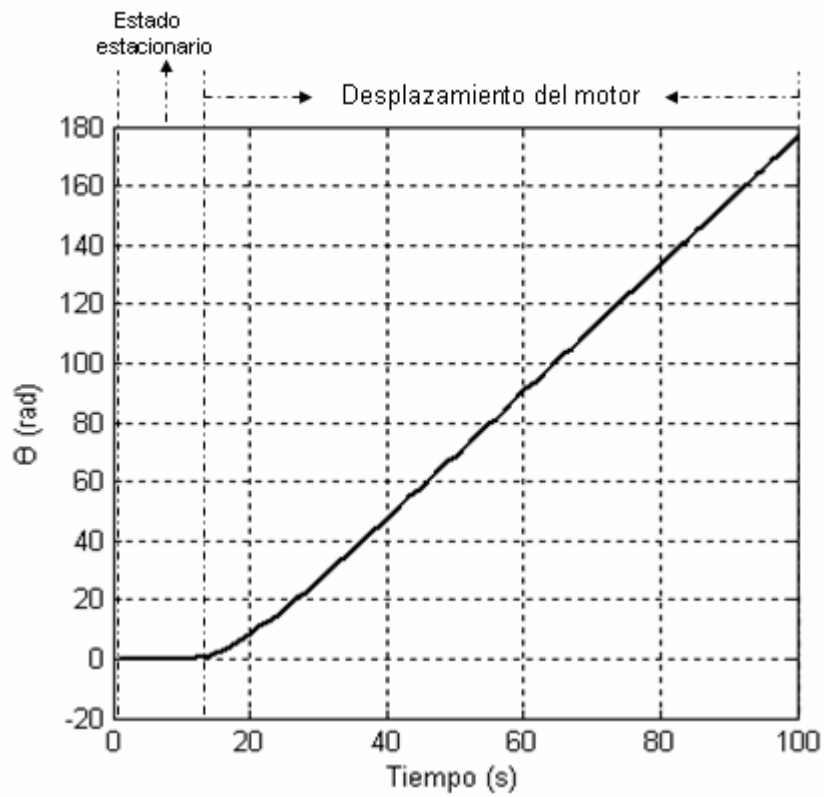


Figura 4.17. Desplazamiento, con carga de 0.4 N-m, $v_{in} = 80 V$

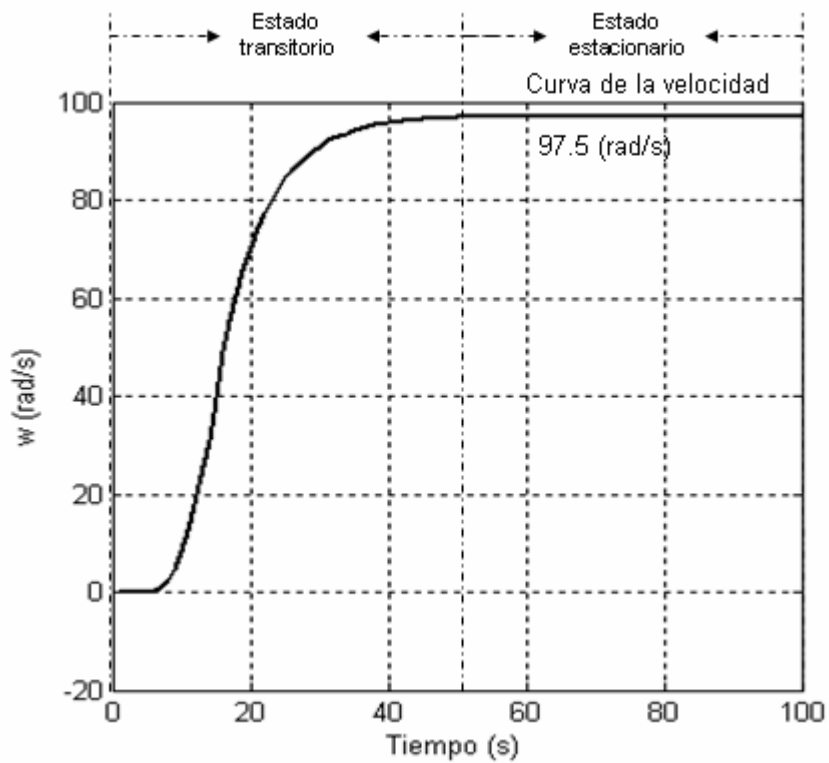


Figura 4.18. Velocidad, con carga de 0.4 N-m, $v_{in} = 80 V$

En la Figura 4.19 se muestra la fuerza contraelectromotriz que representa un voltaje inducido en la armadura del motor, el cual disminuye a un valor de 35.2 V bajo la acción de la carga.

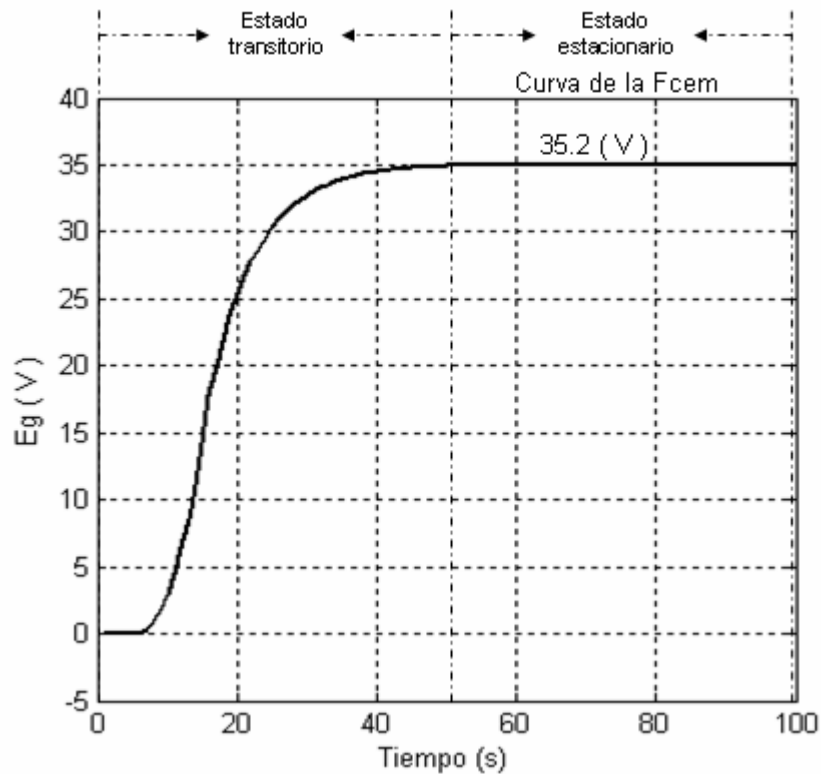


Figura 4.19. Fuerza contraelectromotriz, con carga de 0.4 N-m, $V_{in} = 80$ V

En la Tabla 4.9 se muestran resultados de las simulaciones considerando un par constante y otros valores de voltaje sin mostrar las graficas correspondientes.

Tabla 4.9. Parámetros del motor con carga simulado en MATLAB.

V_{in} [V]	I_a [A]	T_L [N-m]	w_m [rad/s]
50	1.61	0.4	60.7
60	1.93	0.4	72.9
70	2.25	0.4	85.06
80	2.58	0.4	97.21
86	2.77	0.4	104.5

4.5.2. Validación del modelo del motor

Para validar el modelo matemático del motor se obtuvo de manera experimental la Tabla 4.10 utilizando el grupo motor-generador de cd, dinamómetro, equipo de Lab-Volt e interfaz de

adquisición de datos en el laboratorio de control

Haciendo un análisis comparativo de ambas tablas se observa que los resultados en general presentan un error inferior al 8%.

Tabla 4.10. Parámetros del motor con carga medido en LAB-VOLT.

V_{in} [V]	I_a [A]	T_L [N-m]	w_m [rad/s]
50	2.13	0.4	55.61
60	2.27	0.4	68.91
70	2.44	0.4	83.05
80	2.59	0.4	94.36
86	2.74	0.4	98.86

4.6. Simulación del motor en lazo cerrado con carga.

Una forma de controlar posición, velocidad o par en un motor es por medio de un sistema de control en lazo abierto. Sin embargo en este tipo de sistemas la salida sigue la señal de referencia siempre y cuando, todas las variables del sistema sean constantes. Cualquier cambio en la carga o cualquier otra variable del sistema, causará una desviación en el valor deseado. Para que el motor siga a una señal de referencia, independientemente del cambio en estas variables, debe utilizarse un sistema en lazo cerrado.

En un sistema en lazo cerrado, la salida es medida, retroalimentada y comparada con la señal de referencia. Cualquier diferencia entre estas dos señales es una desviación del resultado deseado. La desviación es utilizada para corregir el error. Sin embargo, la respuesta del sistema depende del lazo cerrado, en lugar de los componentes individuales, por tanto, debe darse un especial cuidado al diseño del lazo cerrado para tener una respuesta satisfactoria.

4.6.1. Control proporcional del motor

La ecuación (4.27) representa la función de transferencia de la velocidad del motor con respecto al voltaje de entrada del sistema en lazo abierto.

$$\frac{W_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \quad (4.27)$$

En la Figura 4.20 se muestra el diagrama a bloques del control proporcional aplicado al motor en lazo cerrado.

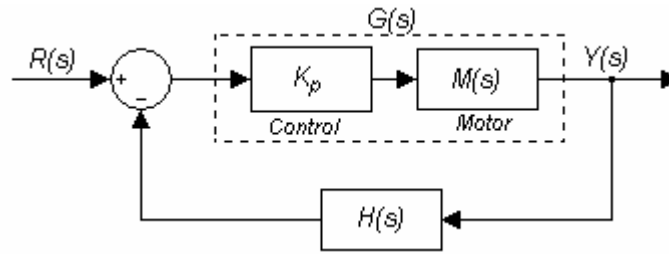


Figura 4.20. Diagrama del control y el motor.

La función de transferencia del sistema anterior está representada con la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.49)$$

$$H(s) = 1$$

En la Figura 4.21 se muestra el diagrama simplificado de la Figura 4.20.

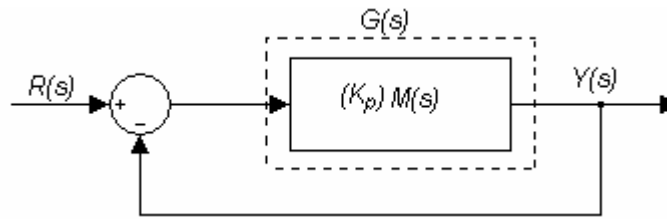


Figura 4.21. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.

Se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (4.50)$$

Al sustituir la ecuación 4.50, donde $G(s)$ es igual a $((K_p)M(s))$ donde $M(s)$ es el motor y K_p es el control, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p)M(s)}{1 + (K_p)M(s)} \quad (4.51)$$

y sustituyendo la ecuación (4.51) el resultado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]}{1 + (K_p) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]} \quad (4.52)$$

Multiplicando la ecuación (4.52) por el siguiente factor en ambos lados, se obtiene la ecuación (4.53) que representa la función de transferencia del controlador proporcional del motor en

lazo cerrado.

$$V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p)[V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)]}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j) + K_p[V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)]} \quad (4.53)$$

Haciendo uso del algebra, a la ecuación (4.53)

Nota: para que las ecuaciones siguientes se vean mejor se le quito la dependencia de (s).

$$\frac{Y}{R} = \frac{(K_p)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]}{V_{in}(J_m L_t s^2) + V_{in}(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + K_p[V_{in}K_j - T_L(s)L_t s - T_L(s)R_t]} \quad (4.54)$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{(K_p)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]}{V_{in}(J_m L_t s^2) + V_{in}(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in}K_p K_j - T_L L_t s K_p - T_L R_t K_p} \quad (4.55)$$

Factorizando y agrupando términos

$$\frac{Y}{R} = \frac{(K_p)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]}{V_{in}(J_m L_t s^2) + [V_{in}(B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p]S + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in}K_p K_j - T_L R_t K_p} \quad (4.56)$$

La ecuación característica es

$$V_{in}(J_m L_t s^2) + [V_{in}(B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p]S + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in}K_p K_j - T_L R_t K_p = 0 \quad (4.57)$$

4.6.1.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional.

Siguiendo el procedimiento del criterio de Routh-Hurwitz se obtiene la Tabla 4.11, con la cual se determina la estabilidad del sistema.

Tabla 4.11. Tabulación de Routh, control P.

s^2	$V_{in}(J_m L_t)$	$V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in}K_p K_j - T_L R_t K_p$
s^1	$V_{in}(B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p$	0
s^0	$V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in}K_p K_j - T_L R_t K_p$	0

Considerando la segunda ecuación

$$V_{in}(B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p > 0 \quad (4.58)$$

$$K_p < \frac{V_{in}(B_m L_t + J_m R_t)}{T_L L_t} \quad (4.59)$$

El rango de valores que puede tomar K_p para que la ecuación sea positiva es el siguiente

$$K_p < 63.26$$

Considerando la tercera ecuación

$$V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_p K_j - T_L R_t K_p > 0 \quad (4.60)$$

$$K_p > \frac{-V_{in}(B_m R_t + K_b K_j)}{(V_{in} K_j - T_L R_t)} \quad (4.61)$$

El rango de valores que puede tomar K_p para que la ecuación sea positiva es el siguiente

$$K_p > -0.8230$$

El rango final que satisface ambas ecuaciones es el siguiente

$$(-0.8230 \leq K_p \leq 63.26)$$

Con el rango de valores determinado para K_p se demuestra que los coeficientes de la primera columna son todos positivos, por lo tanto el sistema es estable.

La Figura 4.22 muestra el diagrama a bloques en simulink del control proporcional aplicado al motor, y la respuesta del sistema se muestra en la Figura 4.23, donde se observa que la señal de salida sigue la señal de referencia sin embargo presenta varias oscilaciones al inicio de su estado transitorio, y la señal se estabiliza dando lugar al error en el estado estacionario. Este controlador hace más rápida la respuesta del sistema (mejora el tiempo de elevación), incrementa la ganancia del controlador pero al incrementar la ganancia puede provocar que el sistema sea más oscilatorio.

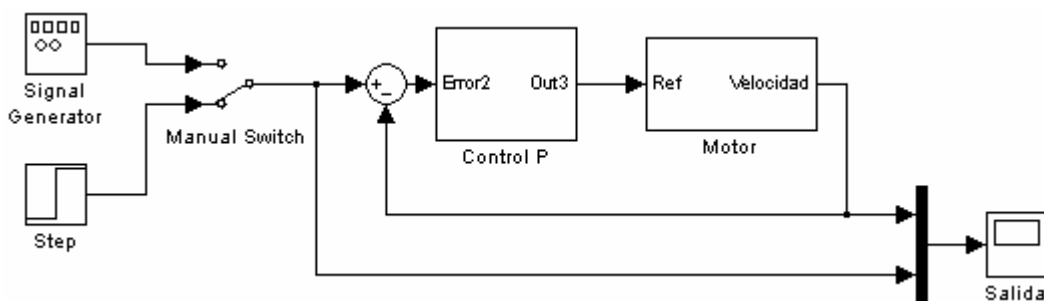


Figura 4.22. Diagrama en simulink del control P aplicado al motor.

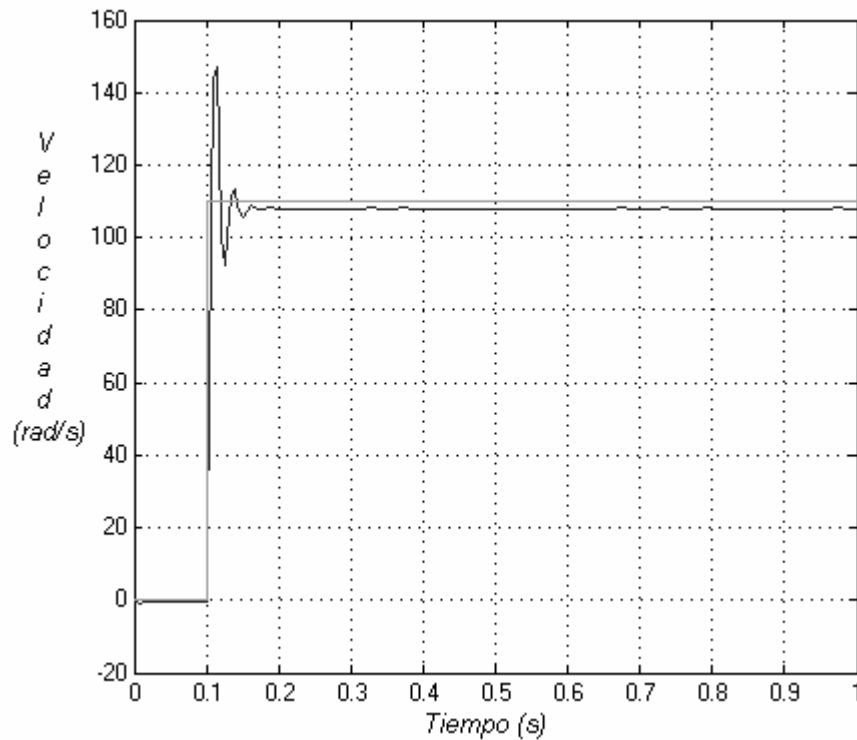


Figura 4.23. Gráfica de salida del sistema.

4.6.2. Control proporcional derivativo del motor

La ecuación (4.63) representa la función de transferencia de la velocidad del motor con respecto al voltaje de entrada del sistema en lazo abierto.

$$\frac{W_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \quad (4.63)$$

En la Figura 4.24 se muestra el diagrama a bloques del control proporcional derivativo del motor en lazo cerrado.

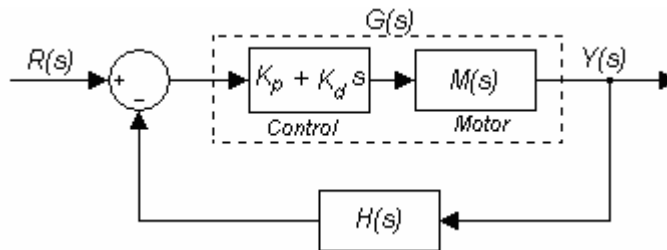


Figura 4.24. Diagrama en simulink del control proporcional derivativo.

La función de transferencia del sistema anterior está representada con la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.64)$$

$$H(s) = 1$$

En la Figura 4.25 se muestra el diagrama simplificado de la Figura 4.24.

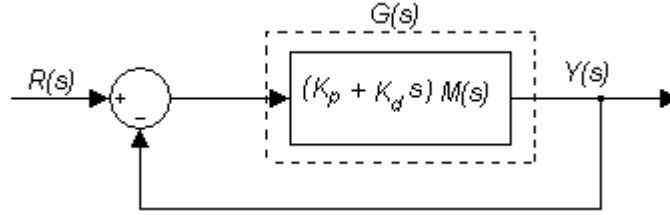


Figura 4.25. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.

Se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (4.65)$$

Sustituyendo la ecuación (4.65) se tiene la siguiente ecuación.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_d s)M(s)}{1 + (K_p + K_d s)M(s)} \quad (4.66)$$

De la ecuación (4.66) sustituyendo $M(s)$ se obtiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_d s) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]}{1 + (K_p + K_d s) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]} \quad (4.67)$$

Multiplicando la ecuación (4.67) por el factor

$$V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)$$

se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_d s)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]}{V_{in}(L_t J_m s^2) + V_{in}(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + (K_p + K_d s)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]} \quad (4.68)$$

Usando el algebra la ecuación resultante es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_d s)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]}{V_{in}(L_t J_m s^2) + V_{in}(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + (K_p + K_d s)[V_{in}K_j - T_L L_t s - T_L R_t]} \quad (4.69)$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{(K_p + K_d s)[V_{in}K_j - T_L(L_t s + R_t)]}{V_{in}(L_t J_m s^2) + V_{in}(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in}K_j(K_p + K_d s) - T_L L_t s(K_p + K_d s) - T_L R_t(K_p + K_d s)} \quad (4.70)$$

La ecuación (4.70) es la función de transferencia del controlador proporcional derivativo

aplicado al motor en lazo cerrado.

Factorizando y agrupando términos de la ecuación (4.70), la ecuación característica es la siguiente

$$[V_{in}(J_m L_t) - T_L L_t K_d] s^2 + [V_{in}(B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_d - T_L L_t K_p - T_L R_t K_d] s + V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L R_t K_p = 0 \quad (4.71)$$

4.6.2.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional derivativo

En base al criterio de Routh-Hurwitz explicado anteriormente y siguiendo el mismo procedimiento se construyó la Tabla 4.12.

Tabla 4.12. Tabulación de Routh, control PD.

s^2	$V_{in}(J_m L_t) - T_L L_t K_d$	$V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L R_t K_p$
s^1	$V_{in}(B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_d - T_L L_t K_p - T_L R_t K_d$	0
s^0	$V_{in}(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L R_t K_p$	0

Manipulando las ecuaciones de la primera columna se obtiene el siguiente rango de valores para la ganancia proporcional y derivativa.

$$(-0.8230 \leq K_p \leq 63.26)$$

$$(-0.03969 \leq K_d \leq 0.404)$$

En base a este rango de valores, las ecuaciones son positivas por lo tanto el sistema es estable.

La Figura 4.26 muestra el diagrama a bloques obtenido en simulink del control proporcional derivativo aplicado al motor. La Figura 4.27 muestra la respuesta del sistema, cuyas características son las siguientes: la señal de salida sigue la señal de referencia, este controlador aumenta el coeficiente de amortiguamiento por lo que no presenta ninguna oscilación en estado transitorio y reduce el tiempo de levantamiento, y no aumenta el orden del sistema en lazo cerrado, estabilizándose la señal presentando el error en estado estable.

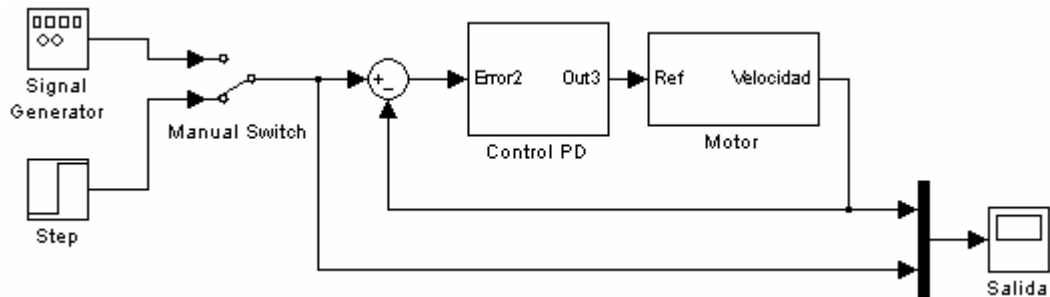


Figura 4.26. Diagrama en simulink, del control PD aplicado al motor.

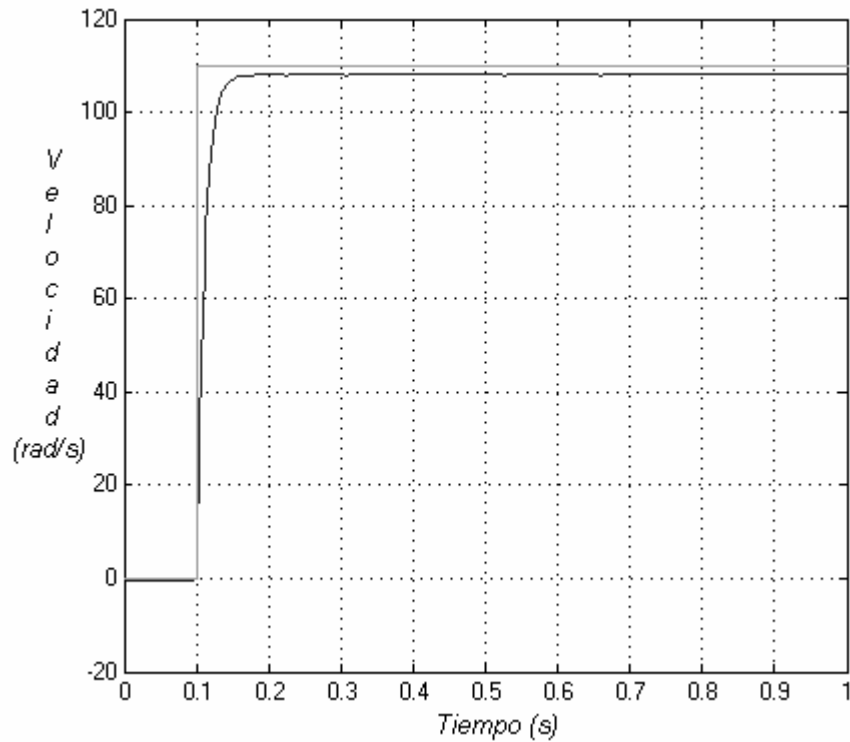


Figura 4.27. Gráfica de salida del sistema.

4.6.3. Control proporcional integral del motor

La ecuación (4.72) representa la función de transferencia de la velocidad del motor con respecto al voltaje de entrada del sistema en lazo abierto.

$$\frac{W_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \quad (4.72)$$

En la Figura 4.28 se muestra el diagrama de bloques del control proporcional integral del motor en lazo cerrado.

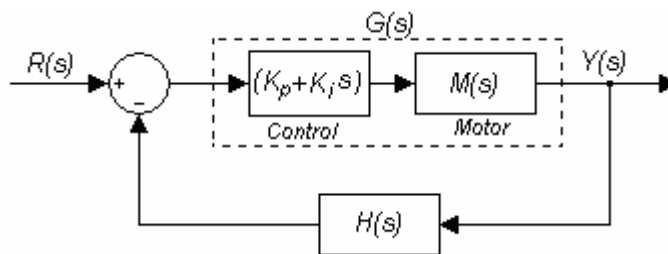


Figura 4.28. Diagrama en simulink del control proporcional integral.

La función de transferencia del sistema anterior está representada con la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (4.73)$$

$$H(s) = 1$$

En la Figura 4.29 se muestra el diagrama simplificado de la Figura 4.28.

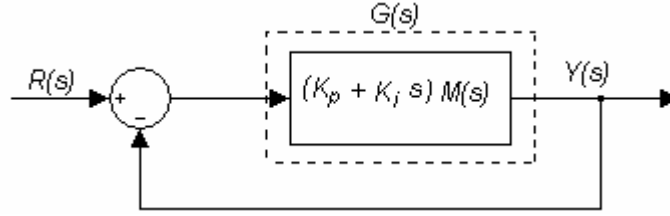


Figura 4.29. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.

Se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (4.74)$$

Sustituyendo la ecuación (4.74) se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_i / S)M(s)}{1+(K_p + K_i / S)M(s)} \quad (4.75)$$

De la ecuación (4.75) se sustituye $M(s)$ y el resultado es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]} \quad (4.76)$$

Multiplicando la ecuación (4.76) por el factor

$$V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)S + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)$$

Se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y}{R} = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]}{V_{in} (J_m L_t s^2) + V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) s + V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]} \quad (4.77)$$

y haciendo uso del algebra en la ecuación (4.77) el resultado es .

$$\frac{Y}{R} = \frac{(K_p s + K_i) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]}{V_{in} (J_m L_t s^3) + V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) s^2 + V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) s + (K_p s + K_i) [V_{in} K_j - T_L L_t s - T_L R_t]} \quad (4.78)$$

Desarrollando la ecuación (4.78), factorizando y agrupando términos la ecuación es la siguiente

$$\frac{Y}{R} = \frac{(K_p s + K_i) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]}{V_{in} (J_m L_t s^3) + [V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p] s^2 + [V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i] s + V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i} \quad (4.79)$$

La ecuación (4.79) es la función de transferencia del controlador proporcional integral aplicado al motor en lazo cerrado.

La ecuación característica es la siguiente

$$V_{in} (J_m L_t s^3) + [V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p] s^2 + [V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i] s + V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i = 0 \quad (4.80)$$

4.6.3.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional integral

En base al criterio de Routh-Hurwitz y siguiendo el mismo procedimiento para la Tabla 4.13.

Tabla 4.13. Tabulación de Routh, control PI.

s^3	$V_{in} J_m L_t$	$V_{in} (s) (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i$	0
s^2	$V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p$	$V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i$	0
s^1	β	0	0
s^0	$V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i$	0	0

El primer término asociado a s^1 se define como β donde

$$\beta = \frac{(V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p) (V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i) - (V_{in} J_m L_t) (V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i)}{V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) - T_L L_t K_p}$$

Manipulando las ecuaciones de la primera columna se obtiene el siguiente rango de valores para la ganancia proporcional e integral.

$$(-0.8230 \leq K_p \leq 63.26)$$

$$(0 \leq K_i \leq 3492.7036)$$

En base a este rango de valores, las ecuaciones son positivas por lo tanto el sistema es estable.

La Figura 4.30 muestra el diagrama a bloques del control proporcional integral aplicado al motor. La Figura 4.31 muestra la respuesta del sistema, como se observa la señal de salida sigue a la señal de referencia, este controlador incrementa el tiempo de levantamiento y presenta varias oscilaciones en su estado transitorio, se estabiliza la señal mejorando el error en estado estable.

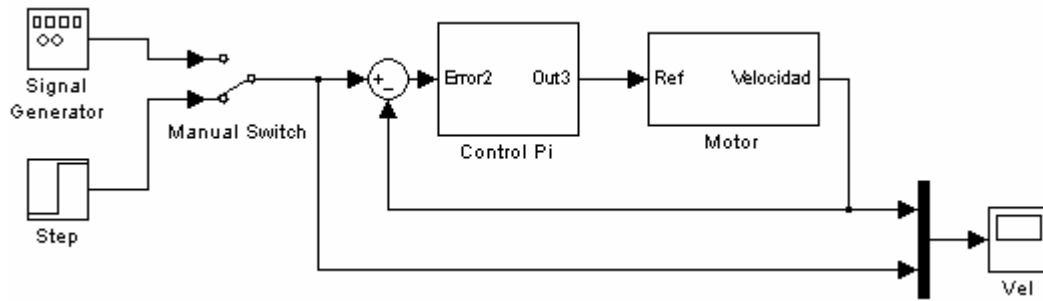


Figura 4.30. Diagrama en simulink del control PI aplicado al motor.

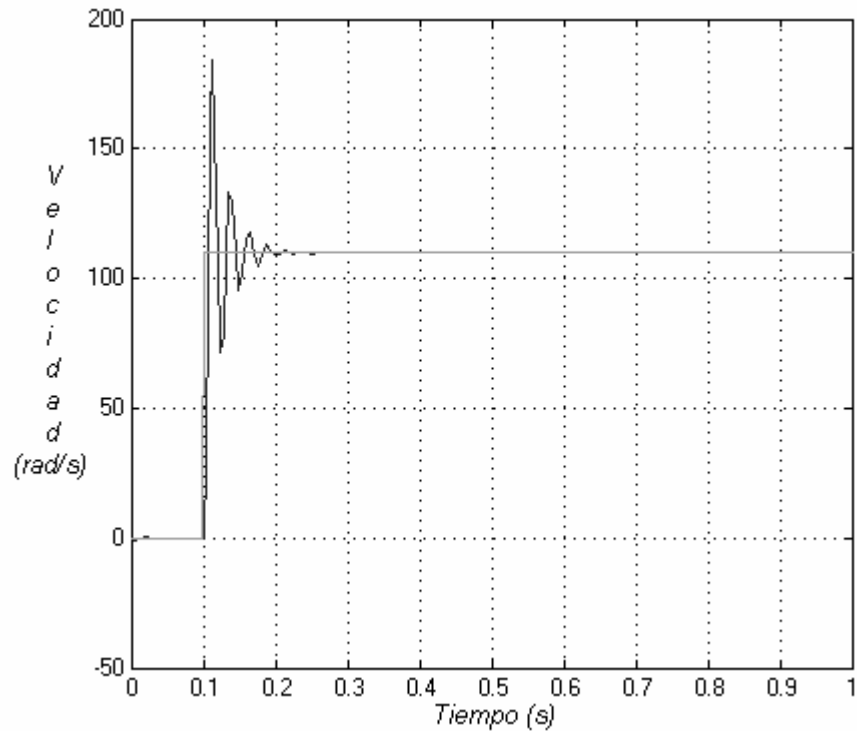


Figura 4.31. Gráfica de salida del sistema.

4.6.4. Control proporcional integral derivativo del motor

La ecuación (4.81) representa la función de transferencia de la velocidad del motor con respecto al voltaje de entrada del sistema en lazo abierto.

$$\frac{W_m(s)}{V_{in}(s)} = \frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \quad (4.81)$$

En la Figura 4.32 se muestra el diagrama de bloques en simulink del control proporcional integral derivativo del motor en lazo cerrado.

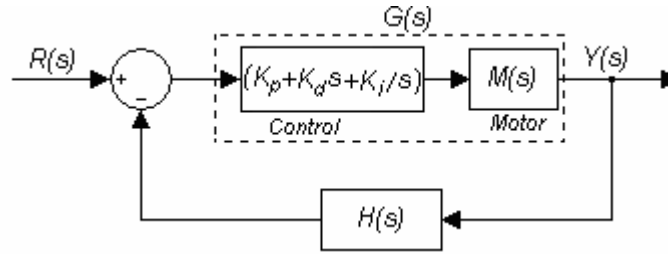


Figura 4.32. Diagrama en simulink del control proporcional integral derivativo.

La función de transferencia del sistema anterior está representada con la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{4.82}$$

$$H(s) = 1$$

En la Figura 4.33 se muestra el diagrama simplificado de la Figura 4.32.

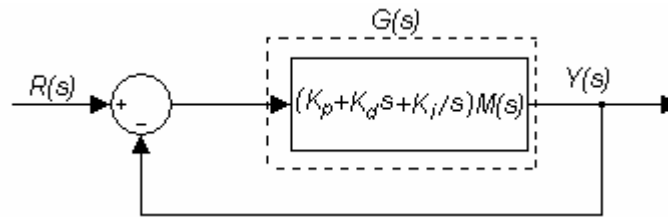


Figura 4.33. Diagrama simplificado del sistema en lazo cerrado.

Se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \tag{4.83}$$

Sustituyendo la ecuación (4.83) se tiene que

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) M(s)}{1 + \left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) M(s)} \tag{4.84}$$

Y sustituyendo $M(s)$ de la ecuación (4.84) el resultado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]}{1 + \left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s} \right) \left[\frac{V_{in}(s)K_j - T_L(s)(L_t s + R_t)}{V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)} \right]} \tag{4.85}$$

Multiplicando la ecuación (4.85) por el factor

$$V_{in}(s)(J_m L_t s^2) + V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t)s + V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j)$$

Se tiene la siguiente ecuación

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}\right) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]}{V_{in} (J_m L_t s^2) + V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) s + V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + \left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}\right) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]} \quad (4.86)$$

haciendo uso del algebra la ecuación resultante es la siguiente.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p s + K_d s^2 + K_i) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]}{V_{in} (J_m L_t s^3) + V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) s^2 + V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) s + (K_p s + K_d s^2 + K_i) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]} \quad (4.87)$$

Desarrollando la ecuación (4.87) y agrupando términos el resultado es el siguiente

$$\frac{(K_p s + K_d s^2 + K_i) [V_{in} K_j - T_L (L_t s + R_t)]}{[V_{in} (J_m L_t) - T_L L_t K_d] s^3 + [V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_d - T_L L_t K_p - T_L R_t K_d] s^2 + [V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p] s + V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i} \quad (4.88)$$

La ecuación (4.88) es la función de transferencia del controlador proporcional integral derivativo aplicado al motor en lazo cerrado.

La ecuación característica es la siguiente

$$[V_{in} (J_m L_t) - T_L L_t K_d] s^3 + [V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_d - T_L L_t K_p - T_L R_t K_d] s^2 + [V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p] s + V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i = 0 \quad (4.89)$$

4.6.4.1. Análisis de estabilidad del controlador proporcional integral derivativo

La Tabla 4.14 muestra el arreglo Routh-Hurtwitz para el controlador PID aplicado al motor.

Tabla 4.14. Tabulación de Routh, control PID.

s^3	$V_{in} J_m L_t - T_L L_t K_d$	$V_{in}(s)(B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p$	0
s^2	$V_{in}(s)(B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p$	$V_{in} K_i K_i - T_L R_t K_i$	0
s^1	β	0	0
s^0	$V_{in} K_i K_i - T_L R_t K_i$	0	0

El primer término asociado a s^1 se define como β donde

$$\beta = \frac{(V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p) (V_{in} (B_m R_t + K_b K_j) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p) - (V_{in} J_m L_t - T_L L_t K_d) (V_{in} K_j K_i - T_L R_t K_i)}{V_{in} (B_m L_t + J_m R_t) + V_{in} K_j K_p - T_L L_t K_i - T_L R_t K_p}$$

En base a las ecuaciones de la primera columna se obtiene los rangos de valores para las ganancias proporcional, derivativa e integral.

Ganancia proporcional ($0 \leq K_p \leq 63.26$).

Ganancia derivativa ($0 \leq K_d \leq 0.404$).

Ganancia integral ($0 \leq K_i \leq 3492.7036$).

En base a este rango de valores, las ecuaciones son positivas por lo tanto el sistema es estable.

En la Figura 4.34 se muestra el diagrama a bloques del control proporcional integral derivativo aplicado al motor. En la Figura 4.35 se muestra la salida del sistema, como se observa la señal de salida sigue a la señal de referencia, este controlador presenta las características de los tres controladores anteriores, por lo que reduce las oscilaciones en estado transitorio, se estabiliza rápidamente y mejora el error en estado estable.

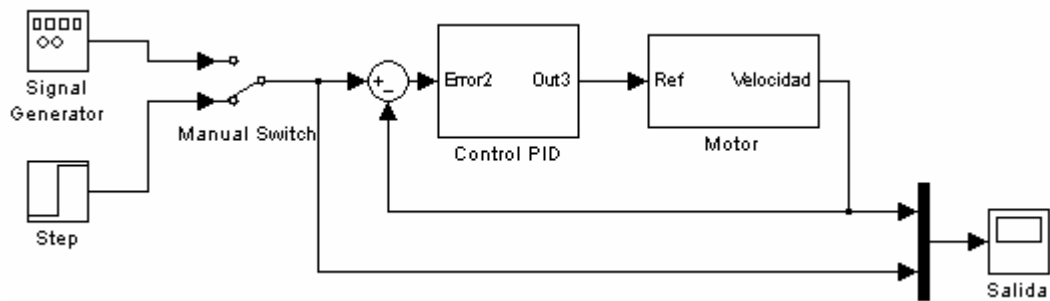


Figura 4.34. Diagrama en simulink, del control PID aplicado al motor.

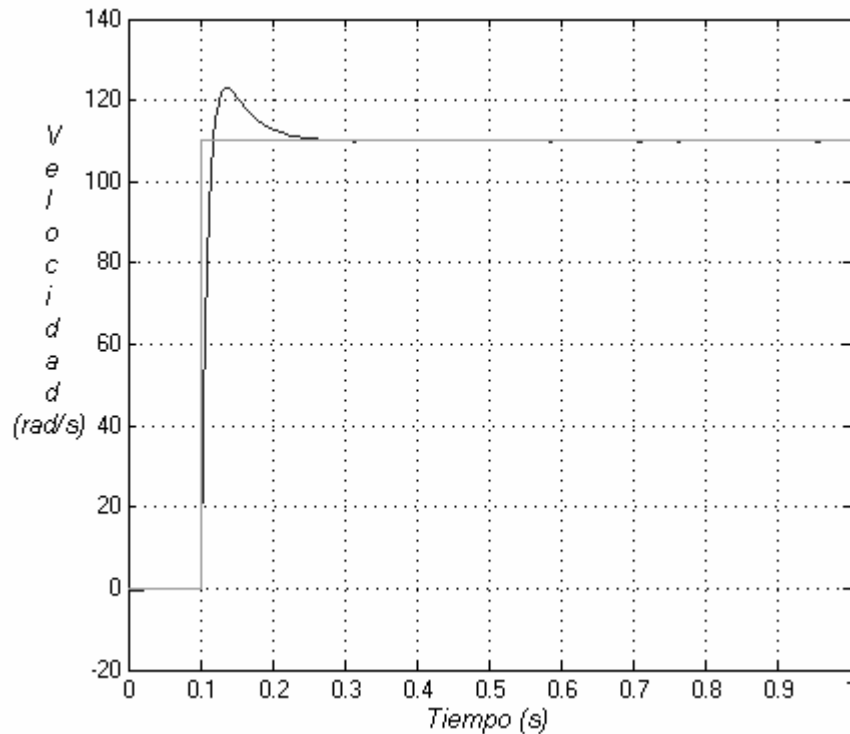


Figura 4.35. Grafica de salida del sistema.

4.6.5. Metodología que se utilizó en este trabajo de tesis.

Los Pasos para realizar el control clásico (P, PI, PD, PID) de un sistema lineal o linealizado.

Pasos	
1.-	Dado el sistema o planta, se obtiene su modelo matemático.
2.-	Se representa el modelo matemático por ecuaciones diferenciales de orden n.
3.-	Las ecuaciones diferenciales de orden n se representan por n ecuaciones diferenciales de orden 1.
4.-	Las ecuaciones diferenciales se escriben en términos de ecuaciones de estado.
5.-	Se construye la matriz de controlabilidad
6.-	Se obtiene la función de transferencia por medio de la transformada de Laplace.
7.-	Se propone el tipo de controlador (P, PD, PI, PID) según los objetivos que se persiguen.
8.-	Se realiza el análisis de estabilidad del sistema.
9.-	Se lleva a cabo la simulación en Matlab utilizando la herramienta de Simulink. Se realiza la simulación del sistema en lazo abierto y lazo cerrado.
10.-	Si se cuenta con el prototipo, pasar a la implementación, para comprobar los resultados obtenidos en el modelo matemático.

5. Conclusiones y trabajos futuros

5.1. Conclusiones

En este trabajo de tesis, se presentaron aspectos teóricos relativos a los fundamentos de motores de corriente directa. Esta parte es de vital importancia para entender el principio de funcionamiento de dichos motores y entender su comportamiento tanto en lazo abierto como en lazo cerrado.

Parte importante de este trabajo de tesis es el modelado matemático del motor, ya que gracias a éste, se puede conocer el comportamiento del mismo ante diferentes condiciones de funcionamiento sin necesidad de tener el sistema físicamente. Con la finalidad de obtener resultados más precisos, es indispensable obtener de manera experimental los parámetros físicos del mismo cuyo procedimiento se muestra en la sección (4.4.2).

Puesto que uno de los principales objetivos es observar el comportamiento del motor, se implementa un control de voltaje de armadura bajo las siguientes condiciones del motor: trabajando en vacío y con carga, en lazo abierto mediante la simulación, donde se hicieron variaciones al voltaje de entrada y se obtuvieron diferentes graficas, principalmente la corriente de armadura y la velocidad del motor, resultados que posteriormente fueron comprobados mediante la experimentación. Haciendo un análisis comparativo de los resultados obtenidos, se concluye que el porcentaje de error en la mayoría de las mediciones es inferior al 10 %.

Finalmente se desarrolló un control de velocidad del motor en lazo cerrado utilizando diferentes controladores. Mediante un análisis de estabilidad se obtuvieron las ganancias de los diferentes controladores y se hizo la simulación correspondiente de cada uno de ellos. Cuyos resultados se muestran en las graficas correspondientes.

5.2. Trabajos futuros

En cuanto a los trabajos futuros, se proponen los siguientes

Contemplar la compensación de los efectos no lineales para implementar un control más exacto, ya que en esta tesis, se empleó un análisis puramente lineal que no considera los efectos no lineales como la fricción estática o dinámica.

En base a la metodología seguida para el motor tipo serie. Se plante aplicar esta misma metodología a los motores de cd tipo paralelo y compuesto. Siendo mínimo los cambios necesarios para está aplicación.

Es posible que se implementen otras técnicas de control como puede ser el control difuso, el control basado en redes neuronales.

Se plantea también desarrollar experimentalmente el control de velocidad del motor en lazo cerrado con los diferentes controladores.

Bibliografía

- [1] Timothy J. Maloney, “Electrónica Industrial Moderna”, Tercera Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A, 1997.
- [2] Stephen J. Chapman, “Máquinas Eléctricas”, Segunda Edición, McGraw-Hill Interamericana, S.A, 1995.
- [3] Katsuhiko Ogata, “Sistemas de Control en tiempo Discreto”, Segunda Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A,1996.
- [4] Katsuhiko Ogata. “Ingeniería de control moderna”, Cuarta Edición, Prentice-Hall Pearson Educación, S.A, 2003.
- [5] Benjamín C. Kuo, “Sistemas de control automático”, Séptima Edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A, 1996.
- [6] Howard W Penrose,Ph.D “Direct Current Motor Electrical Evaluation Using Motor Circuit Analysis”BJM Corp, ALL-TEST Division Old Saybrook, CT
- [7] A .Costa F. Bonne, “Principios fundamentales de accionamiento eléctrico”, Ed. Pueblo y Educación, Ciudad de la Habana, Cuba, 1989.
- [8] P. C. Sen, “Principles of Electric Machines and Power Electronics”, New York: Wiley, 1988.
- [9] P. C. Sen, “Thyristor DC Drives”, New York: Wiley Interscience, 1981.
- [10] S. B. Dewan, G. R. Slemon, and A. Straughen, “Power Semiconductor Drives”, New York: Wiley Interscience, 1984.
- [11] B. K. Bose, “Power Electronics and AC Drives”, Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall, 1986.
- [12] Jimmie J. Cathey “Máquinas Eléctricas”, Primera Edición. McGraw-Hill Interamericana Editores de S.A. de C.V. 2002.
- [13] Robert L. Mott “Diseño de Elementos de Maquinas”, Segunda Edición Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1995.
- [14] Eronini Umez-Eronini “Dinámica de Sistemas de Control” Internacional Thomson Editores 2001.

- [15] George McPherson “Introduction to Electrical and Transformer”, Primera Edición Limusa S.A de C.V 1987.
- [16] Richardson, Donald V. y Artur J. Caisse. “Máquinas Eléctricas Rotativas y Transformadores”, Prentice Hall. Cuarta Edición. México. 1997.
- [17] Baird, D. C. “Experimentación una Introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos”, Prentice-Hall. Segunda Edición. México. 1991.
- [18] Ollero Baturone, A. Robótica: “Manipuladores y robots móviles”, Sevilla. Edición Marcombo. 2001.
- [19] Borenstein, J., Everett, H. R., FENA, L., Where am I? “Sensors and Methods for Mobile Robot Positioning”, Eddición. Borenstein. 1996.
- [20] José Luís Pérez Mercado “Control de Posición de Servomecanismos de Corriente Directa”, México DF, Noviembre de 2005.
- [21] The Math Works Inc, “MATLAB the Language of Technical Computing”, Using MATLAB graphics COPYRIGHT 1984-2002, Versión 6.
- [22] Irving L. Kosow, “Máquinas Eléctricas y Transformadores”, Segunda Edición Prentice Hall. Hispanoamericana, S.A.1993.
- [23] A. E. Fitzgerald, Charles Kingsley, Jr. Stephen D. Umans, “Máquinas Eléctricas”, segunda edición en español, McGraw-Hill Interamericana de México, S.A, de C.V 1992.

Sitios de Internet

- [URL1] http://olmo.pntic.mec.es/~jmarti50/el_arenal/practica9.html /11/25/08
- [URL2] <http://www.terra.org/articulos/art01244.html> /11/25/08

APÉNDICES

Apéndice A. Términos básicos en control automático

Señal de salida: cantidad o condición que se mide y controla (posición, velocidad, presión, temperatura, etc.). También denominada variable controlada.

Señal de referencia: valor que se desea que alcance la señal de salida.

Error: diferencia entre la señal de referencia y la señal de salida real.

Señal analógica: señal definida en un intervalo continuo de tiempo cuya amplitud puede adoptar un intervalo continuo de valores.

Señal digital: señal en tiempo discreto con amplitud cuantificada.

Planta: cualquier objeto físico que se desea controlar.

Proceso: operación artificial y voluntaria progresiva que consiste en una serie de acciones o movimientos controlados sistemáticamente dirigidos hacia un resultado o propósito determinados.

Sistema: combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen un objetivo determinado. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse como una implicación de sistemas físicos, biológicos económicos y similares.

Perturbación: señal que tiende a afectar adversamente el valor de salida de un sistema.

Control retroalimentado: estrategia que en presencia de perturbaciones trata de reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia. También denominado control en lazo cerrado.

Transformada de Laplace: es la transformación en el dominio del tiempo $f(t)$ al dominio de la frecuencia compleja produciendo una función $F(s)$.

Función de Transferencia de un sistema: es la relación entre la transformada de Laplace de la señal de salida y la transformada de Laplace de la señal de referencia, suponiendo que todas las condiciones iniciales se hacen iguales a cero. En otras palabras, es una descripción entrada-

salida del comportamiento de un sistema. Una función de transferencia puede definirse solamente para sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Sistema lineal: es aquel que satisface el principio de superposición y de homogeneidad. De esta manera, si y_1 es la respuesta del sistema a la entrada x_1 , y y_2 es la respuesta a la entrada x_2 , entonces el sistema es lineal sí y solo sí, para cualesquiera escalares α y β , la respuesta a la entrada $\alpha x_1 + \beta x_2$ es $\alpha y_1 + \beta y_2$. Un sistema lineal se puede describir mediante ecuaciones diferenciales.

Sistema lineal e invariante en el tiempo: es aquel en el que los coeficientes de la ecuación diferencial no varían con el tiempo, esto es, aquel sistema cuyas propiedades no cambian con el tiempo.

Modelo: imagen simplificada de una situación real en la cual las relaciones empíricas se traducen en relaciones matemáticas o lógicas entre los entes introducidos en el modelo.

Armadura: conductor giratorio de un motor de cd .

Bobinas: los de vanados estacionarios del motor cd que generan el campo magnético.

Flujo magnético: la dirección de un campo magnético.

Rotor: la parte giratoria de un motor.

Motor de devanado en serie: es un motor de cd con la bobina de campo alambrada en serie con la bobina de armadura.

Motor de devanado en derivación: es un motor de cd con la bobina de campo alambrada en paralelo con la bobina de armadura.

Motor compuesto: es un motor de cd que combina las características de los motores de devanado en serie y de los motores de devanado en derivación.

Estator: es la parte estacionaria de un motor.

Par: es la fuerza de rotación.

Entrehierro: distancia entre el estator y el rotor.

Pares de polos: representa el número de campos magnéticos (Norte-Sur) que tiene el motor.

Apéndice B. Acrónimos

FT función de transferencia.

CD corriente directa.

CA corriente alterna.

P proporcional.

PD proporcional derivativo.

PI proporcional integral.

PID proporcional integral derivativo.

Apéndice C. Simbología

Tabla 1.

Símbolo	Definición	Unidades
R_s	Resistencia en serie	Ω
R_a	Resistencia de armadura	Ω
R_t	Resistencia total	Ω
L_a	Inductancia de armadura	mH
L_s	Inductancia en serie	mH
L_t	Inductancia total	mH
E_g	Fuerza contraelectromotriz	V
θ_m	Desplazamiento del motor	rad
J_m	Inercia del motor	$Kg - m^2$
K_j	Constante del par	$N - m / A$
i_a	Corriente de armadura	A
T_l	Par de carga	$N - m$
B_m	Coefficiente de fricción viscosa	$N - m / rad / s$
W_m	Velocidad angular del rotor	$rad / s, r / s$
K_b	Constante de la fuerza contraelectromotriz	$V / rad / s$
K_p	Ganancia proporcional	-
K_d	Ganancia derivativa	-
K_i	Ganancia integral	-
V_i	Voltaje de entrada	V