



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

ANÁLISIS DE UNA HERRAMIENTA DE PRESIONES ADAPTABLES PARA EL PULIDO DE SUPERFICIES

TESIS:

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA:

RENÉ ZURITA CORRO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CUAUHTÉMOC HÉCTOR CASTAÑEDA ROLDÁN

CO-DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALBERTO CORDERO DÁVILA

HUAJUAPAN DE LEÓN, OAXACA.
JULIO DE 2008

Índice general

Agradecimientos	VII
Prefacio	IX
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Pulido clásico de superficies ópticas	1
1.3. Herramienta en línea de presiones adaptables	3
2. Funciones de desgaste	5
2.1. Descripción del procedimiento de pulido	5
2.2. Configuración de la herramienta	5
2.3. Tasa de remoción de material	6
2.3.1. Movimiento de la herramienta	6
2.3.2. Contacto de la herramienta con la pieza de trabajo	7
2.3.3. Estimación de la integral de Preston	8
2.4. Evaluaciones del perfil de desgaste	9
2.4.1. Caso 1: Centros coincidentes	9
2.4.2. Caso 2: Herramienta que flota libremente	10
2.5. Análisis de las funciones base Uve	12
2.5.1. Configuraciones utilizadas	12
2.5.2. Independencia lineal de las funciones $\phi_{r,j}(x)$	13
2.5.3. Propiedades de convergencia	14
3. Modelo Propuesto	19
3.1. Descripción de la máquina NCC	19
3.2. Descripción de la herramienta	19
3.3. Variables a considerar	21
3.4. Notación utilizada	21
3.5. Obtención del movimiento de la herramienta	22
3.5.1. Movimiento de tipo pendular	23
3.5.2. Posición relativa al centro de la herramienta	24
3.5.3. Rotación del vidrio	25
3.5.4. Vector de posición general	25
3.6. Desgaste generado por la herramienta	26
3.7. Geometría de contacto	27

3.7.1. Anillo de contacto	27
3.7.2. Límites de la integral, trayectoria de contacto	29
3.8. Resultados	30
A. Recorridos de la herramienta	35
B. Códigos	39
B.1. Q.m	39
B.2. derivadaQ.m	39
B.3. inter_rect_circ.m	39
B.4. chicharronera.m	40
B.5. herramienta.m	40
B.6. recta_perp.m	42
B.7. w_ght.m	42
B.8. funcionTrayectoria	42
B.9. roemberg-particular.m	43
Conclusiones	45
Bibliografía	46

Índice de figuras

1.1. Herramienta de pétalo.	2
1.2. Herramienta anular.	2
1.3. Herramienta sólida.	2
2.1. Configuración de la Herramienta.	6
2.2. Vector de posición de un punto en la herramienta.	7
2.3. Geometría del punto de contacto.	7
2.4. $\bar{\beta}(r)$ con $r + S \leq s$	9
2.5. Tasa de remoción para el caso 1: La función Uve.	10
2.6. Tasa de remoción para el caso 2, con $s < S$	11
2.7. Tasa de remoción para el caso 2 con $s \geq S$	12
2.8. Ilustración de la partición del intervalo.	13
2.9. Intervalos I_{rj}^+ e I_{rj}^-	14
2.10. Bosquejo de funciones base.	15
2.11. Bosquejo de la función $\sum_{j=1}^n \phi_{rj}(x)$	16
3.1. Configuración de la herramienta.	20
3.2. Diagrama de la herramienta.	22
3.3. Movimiento tipo pendular.	23
3.4. Gráfica de $\varphi_1(t)$	23
3.5. Modificación de la rotación.	24
3.6. Movimiento de rotación de la pieza de trabajo	25
3.7. Posición al tiempo t	27
3.8. Herramienta sin oscilación.	28
3.9. Trayectoria de contacto.	31
3.10. Desgaste modelado	32
3.11. Desgaste de una herramienta con excentricidad no nula.	33
3.12. Configuración de una herramienta con excentricidad no nula.	33
A.1. Recorrido de P , ejemplo 1	35
A.2. Recorrido de P , ejemplo 2	36
A.3. Recorrido de P , ejemplo 3	36
A.4. Recorrido de P , ejemplo 4	36
A.5. Recorrido de P , ejemplo 5	37
A.6. Recorrido de P , ejemplo 6	37

Agradecimientos

A mis padres Jorge y Pricila que tanto me han apoyado brindandome su comprensión.

A mis hermanos Jorge y Anai que saben distraerme cuando lo requiero.

A mis tios y demás familiares que me han brindado consejos y facilitado material de estudio.

A Alan, Aristeo, Erandy e Isabel por la compañía y apoyo durante la carrera.

Al Dr. Cuauhtémoc Héctor Castañeda Roldan por su apoyo durante el tortuoso pero graficante proceso de elaboración y redacción de la tesis.

A la M.C. Verónica Borja Macías y M.C. Jesús Alejandro Tello Hernández por su apoyo técnico en la elaboración de este documento.

A mis profesores por brindarme la oportunidad de mejorar y ponerme a prueba.

A los cuates, por los gratos ratos.

A todos aquellos que saben que se les debe algo, gracias.

Prefacio

El esquema del trabajo realizado en esta tesis se detalla a continuación.

En el Capítulo 1 se exponen a manera de introducción los factores que hacen relevante un análisis matemático del proceso de pulido de superficies ópticas, presentando al lector la teoría básica que sustenta el modelado matemático de este proceso de pulido, así como una ubicación en el ambiente en el cual se desarrolla este trabajo, para proporcionar un sentido de dirección y continuidad sin el cual nos encontraríamos en un mar de adversidades. Por último se señalan algunas particularidades del proceso de pulido que se analizará en el Capítulo 3.

En el Capítulo 2 se expone el modelado matemático del pulido generado por una herramienta capaz de realizar movimientos circulares compuestos; también se encuentran los desgastes producidos por esta herramienta, en su forma analítica, para algunos casos sencillos. Se hace incapié en los detalles involucrados en las demostraciones pues una exposición clara de ellas y un entendimiento de las ideas subyacentes inspira y facilita el trabajo posterior. Es también un esquema que se intenta seguir en el Capítulo 3.

En el Capítulo 3 se modela el movimiento y el desgaste producido por una herramienta de presiones adaptables que fué diseñada y construida en el Taller de óptica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Es en este capítulo donde se alcanza el objetivo de esta tesis, que es describir el movimiento de esta herramienta y calcular el desgaste que produce en algunos casos simples, siguiendo el esquema de Hall et al [2], presentado en el Capítulo 2. A lo largo del Capítulo 3 se intenta brindar una explicación concisa que motive y justifique los pasos realizados en cada etapa del modelado. En la parte final se presentan los resultados obtenidos con el modelo y se comparan con resultados previos del Taller de óptica de la BUAP. Debe descartarse que con el nuevo modelo propuesto en esta tesis es posible modelar el desgaste de una herramienta rectangular rotada; ésto a su vez permitirá el modelaje de una herramienta con movimiento pendular ya que en este caso la herramienta se translada y rota simultáneamente.

Al final de este trabajo y previo a las conclusiones se presentan dos apéndices: el Apéndice A muestra una serie de trayectorias generadas por el modelo con el objetivo de aclarar su funcionamiento; el Apéndice B muestra las implementaciones realizadas en *Octave* para el cálculo del desgaste, entre las que se incluye una implementación del método de integración de Roemberg utilizado para el cálculo del desgaste sobre las trayectorias de contacto.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los estándares de vida en tiempos actuales han cambiado mucho a comparación de los existentes incluso 50 años atrás en cualquier lugar del mundo. Por otro lado estos estándares de vida no sólo presentan diferencias al transcurrir el tiempo, sino también al comparar diferentes regiones del mundo en un mismo momento. Evidencia de estos cambios, consecuencia del crecimiento económico, es la participación cada vez más y más importante de tecnologías dentro de la vida diaria de los individuos y dentro de un marco industrial en una sociedad; objetos como videocámaras, televisores, anteojos, etc., en la vida cotidiana de las personas; telescopios, microscopios, espejos y otras herramientas que involucran el uso de superficies para aplicaciones científicas e industriales son sólo parte de una lista extensa de dichos objetos.

En el listado mencionado anteriormente hay un elemento en común, las superficies ópticas; este patrón por si mismo establece la importancia del estudio de las superficies ópticas y debido a que se necesitan formas especiales de estas, es importante estudiar el proceso mediante el cual se logra que las superficies obtengan la forma deseada.

1.2. Pulido clásico de superficies ópticas

El proceso mediante la cual se dota una superficie óptica de una forma deseada se denomina *pulido de superficies ópticas* y consiste en la remoción de material de una pieza de trabajo hasta conseguirla. Las técnicas utilizadas para el pulido de superficie son variadas en nivel tecnológico y en restricciones presupuestales que le acompañan. Una de las técnicas más utilizadas es el método de pulido clásico, en el cual el desgaste se logra al tallar la superficie con una herramienta. Generalmente la herramienta se monta sobre una máquina que la mueve en contacto y sobre la pieza de trabajo. Nosotros analizaremos una herramienta que se monta sobre la máquina pulidora comercial **R. H. Strasbaugh-64DE4**.

Dentro del pulido de superficies, mediante el pulido clásico, existen diferentes herramientas que son tradicionales: herramienta sólida (figura 1.3), herramienta anular (figura 1.2) y herramienta de pétalo (figura 1.1). Para dichas herramientas ya se han hecho modelos para el desgaste que generan y se sabe cómo utilizarlos para generar un perfil de

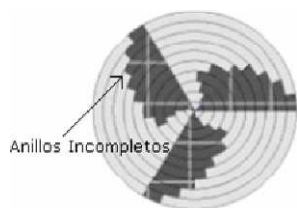


Figura 1.1: Herramienta de pétalo.

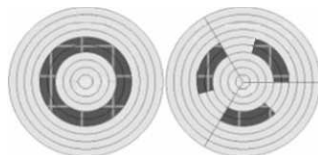


Figura 1.2: Herramienta anular.

desgaste deseado.

La teoría básica para el modelado de este método de pulido de superficies es proporcionada por Preston [5], quien en su trabajo establece un resultado ampliamente comprobado experimentalmente:

Teorema 1.2.1 (Ecuación de Preston). *En el proceso de pulido de superficies ópticas clásico, el desgaste D generado por una herramienta de pulido en un intervalo de tiempo $[0, t]$ está dado por*

$$D = \int_0^t ACpv dt \tag{1.2.1}$$

en donde

p es la presión ejercida por la herramienta sobre la pieza de trabajo.

v es la velocidad relativa existente entre la herramienta y la pieza de trabajo.

A es una constante que depende del material constituyente de la herramienta, del abrasivo, de la superficie óptica y de otros factores presentes.

C es una función que indica el contacto entre la pieza de trabajo y la herramienta de pulido.

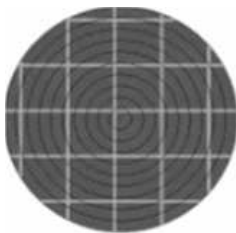


Figura 1.3: Herramienta sólida.

Generalmente los desgastes deseados se logran con las herramientas sólidas y de pétalo, manipulando los tiempos de estancia. Experimentalmente se ha comprobado que el desgaste generado por las herramientas tradicionales en el pulido clásico de superficies es proporcional a los tiempos de estancia de las herramientas, en el caso de la herramienta de pétalo los tiempos de estancia están controlados mediante el tamaño angular de los anillos que las componen [12, 11, 13, 14]. En cualquier caso controlar el tiempo de estancia significa, en términos de la ecuación 1.2.1, obtener el desgaste deseado fijando límites de integración adecuados, para cada punto de la superficie de trabajo.

Una gran desventaja de la herramienta de pétalo es que se requiere construir una diferente por cada desgaste deseado. Por otra parte, la herramienta es rígida y de un radio ligeramente menor al del vidrio, se le dota de un movimiento rotacional y otro que puede ser pendular o bien, desplazamiento lineal. La posición inicial para su centro es única, esto hace que cuando la pieza de trabajo ya ha sufrido cierto desgaste la herramienta pierda paulatinamente el contacto con la misma, dejando de actuar en cierta parte de la pieza de trabajo.

1.3. Herramienta en línea de presiones adaptables

Una alternativa para lograr el desgaste deseado es manipular la presión de contacto ejercida por la herramienta. Esto es lo que hace la herramienta propuesta por Korhonen y Lappalainen [3], la cual se describe con cuidado en el capítulo 3 y se modela su funcionamiento para analizar el desgaste que produce. Este análisis lo haremos siguiendo el esquema presentado por C. A. Hall y T. A. Porsching [2] en el Capítulo 2 de esta tesis. Aquí sólo mencionaremos algunas características de la herramienta:

Presiones variables. Con esta herramienta es posible variar las presiones ejercidas sobre diferentes zonas de la pieza de trabajo para alcanzar en ellas diferentes tasas de desgaste en forma simultánea.

Una herramienta para varios perfiles deseados. La capacidad de variar las presiones da cabida a que una herramienta pueda generar una amplia gama de perfiles deseados, en contraposición a enfoques anteriores que necesitan al menos tantas herramientas como desgastes deseados se tengan

Ahorro significativo. Con esta nueva propuesta de herramienta se puede ahorrar significativamente en costo y tiempo relacionados a la construcción de herramientas de pulido al igual que en tiempos de producción de desgastes deseados.

Capítulo 2

Obtención de funciones de desgaste, un antecedente

En este capítulo se expone parte del artículo de Hall y Porsching [2], el cual sirve de introducción al trabajo de modelado matemático de la herramienta de pulido que se analizará en el capítulo 3 así como a la obtención de los desgastes generados por ésta.

En secciones posteriores se hará uso de la notación *NCC* para referirse a una máquina de pulido de superficies *Numéricamente Controlada por Computadora*, tal máquina está programada para realizar una serie de movimientos automatizados de forma repetitiva, diseñados para desgastar la superficie de una pieza de trabajo o vidrio y la precisión de sus movimientos está monitoreada y controlada por computadora.

2.1. Descripción del procedimiento de pulido

A continuación se enumeran los contenidos del artículo [2] que se expondrán en este capítulo y que sirven como base e introducción al trabajo desarrollado posteriormente.

1. Definición y explicación de la configuración de la herramienta de la máquina NCC.
2. Determinación de la tasa de remoción de material mediante el modelado matemático de los movimientos realizados por la herramienta.
3. Construcción de un espacio de dimensión finita de perfiles (funciones) de remoción de material, correspondientes a ciertas especificaciones sobre el movimiento de la herramienta.

2.2. Configuración de la herramienta

Se considera una máquina NCC equipada con una herramienta que es capaz de realizar movimientos circulares compuestos de forma tal que se puede posicionar en cualquier parte de la pieza de trabajo. La herramienta en sí consiste de una circunferencia de radio s que rota a una velocidad angular ω respecto a un centro C ; dicho centro C rota alrededor de un centro secundario O con velocidad angular Ω , el centro O se encuentra a una distancia

de S unidades del centro C ; al centro O se le considera el centro de la herramienta. En la figura 2.1 se puede ver un esquema del comportamiento de la herramienta, cabe señalar que la circunferencia con centro en O y radio S es sólo la trayectoria que sigue el centro C y no es necesariamente el borde de la pieza de trabajo.

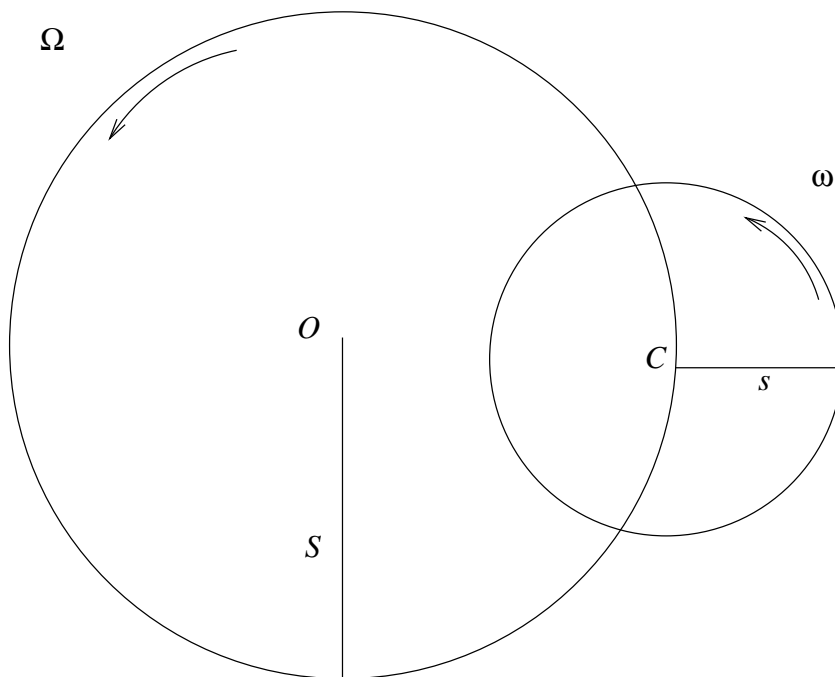


Figura 2.1: Configuración de la Herramienta.

2.3. Tasa de remoción de material

Se convendrá que ϕ es la tasa de remoción de material de un punto P sobre la pieza de trabajo. Es claro que el conjunto de puntos P en la pieza de trabajo que entran en contacto con la herramienta forma un anillo en la pieza de trabajo cuyo radio interior es $a = \max\{0, S - s\}$ y radio exterior es $b = s + S$. Es además fácil observar que el desgaste ϕ está en función de la distancia radial de P a O , que se denotará por r , puesto que para cualquier punto a esta misma distancia radial la velocidad a la que pasan los diferentes puntos en la herramienta que tienen contacto con P permanece inalterada, debido a que Ω y ω son constantes. Por lo anterior $\phi(r) = 0$ para $|r| < a$ y $|r| > b$, dejando pendiente determinar $\phi(r)$ dentro del anillo $a \leq |r| \leq b$, aunque es suficiente considerar $a \leq r \leq b$ pues se tiene simetría radial del desgaste.

2.3.1. Movimiento de la herramienta

Para modelar el movimiento de un punto en la herramienta, se considera a O el origen del plano complejo y se denota por $Q(t)$ el vector de posición de un punto determinado en la herramienta al tiempo t , por conveniencia se expresará a $Q(t)$ como un número complejo

expresado en coordenadas polares; la posición del centro C al tiempo $t = 0$ estará dada por $C(0) = S = S + 0i$ y $Q(0) - C(0) = \rho$, es decir, el punto a analizar en la herramienta se encuentra a una distancia ρ del centro C de la misma, en el punto $S + \rho + 0i$. Utilizando estos hechos y que $C(t) = Se^{i\Omega t}$ (según la descripción del movimiento de la herramienta) se tiene que

$$Q(t) = Se^{i\Omega t} + \rho e^{i(\Omega+\omega)t}, \quad 0 \leq \rho \leq s. \quad (2.3.1)$$

Un diagrama de este vector de posición se muestra en la figura 2.2

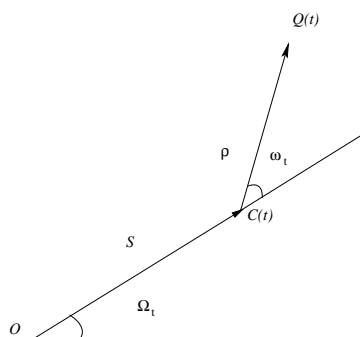


Figura 2.2: Vector de posición de un punto en la herramienta.

2.3.2. Contacto de la herramienta con la pieza de trabajo

Asumiendo que el punto P en la pieza de trabajo tiene coordenadas $(0, r)$, $a \leq r \leq b$, es decir $P = r$ y $\arg P = 0$, se necesita determinar aquellos tiempos t para los cuales $Q(t) = r$. De acuerdo con el diagrama mostrado en la figura 2.3 se puede ver que al aplicar ley de senos y cosenos se tienen las ecuaciones:

$$\rho^2 = r^2 + S^2 - 2rS \cos \beta, \quad 0 \leq \rho \leq s, \quad (2.3.2)$$

$$\rho \sin \alpha = r \sin \beta, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq \pi, \quad (2.3.3)$$

en donde los ángulos α y β son los que se muestran en la figura 2.3 y están dados por

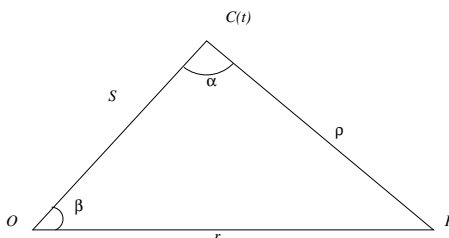


Figura 2.3: Geometría del punto de contacto.

$\beta = \Omega t$, $\alpha \equiv \pi + \omega t \pmod{2\pi}$, por lo que de la ecuación 2.3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= iS\Omega e^{i\Omega t} + i\rho(\Omega + \omega)e^{i(\Omega + \omega)t} \\ &= iS\Omega e^{i\beta} - i\rho(\Omega + \omega)e^{i(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

2.3.3. Estimación de la integral de Preston

Para utilizar la ecuación 1.2.1, consideramos a $[0, 2\pi/\Omega]$ como el intervalo de integración, pues es el tiempo que le toma a la herramienta terminar una rotación alrededor del centro O , con lo que se tiene

$$\phi(r) = \frac{K\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} v(t) dt, \quad a \leq r \leq b, \quad (2.3.5)$$

en donde K es una constante de proporcionalidad que depende de varios factores entre los que se encuentran la sustancia de abrasión, el material del cual está constituido la herramienta que realiza el pulido, etc; y en este caso K también absorbe la presión ejercida sobre la pieza de trabajo que se considera constante, mientras que la velocidad está aproximada mediante

$$v(t) = \begin{cases} |dQ(t)/dt| & \text{si } Q(t) = r, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Con el fin de utilizar la ecuación 2.3.5 se puede observar que la primera línea de la ecuación 2.3.6 se aplica justo cuando $-\bar{\beta}(r) \leq r \leq \bar{\beta}(r)$, siendo $\bar{\beta}(r) \in [0, \pi]$ el ángulo máximo que satisface la ecuación 2.3.2. Tomando en cuenta el intervalo en el cual está definido β se observa que el lado derecho de la ecuación 2.3.2 es creciente respecto a β , y considerando la figura 2.4 se tiene que

$$\bar{\beta}(r) = \begin{cases} \pi & \text{cuando } r + S \leq s, \\ \cos^{-1} \left(\frac{r^2 + S^2 - s^2}{2rS} \right) & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Así que al realizar un cambio de variable de integración $\beta = \Omega t$ en la ecuación 2.3.5 y usando la simetría de $|dQ(t)/dt|$ se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{K\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\Omega} v(t) dt \\ &= \frac{K\Omega}{\pi} \int_0^{\bar{\beta}(r)} |iS\Omega e^{i\beta} - i\rho(\Omega + \omega)e^{i(\alpha + \beta)}| dt \\ &= \frac{K\Omega}{\pi} \int_0^{\bar{\beta}(r)} |ie^{i\beta}||S\Omega - i\rho(\Omega + \omega)e^{i\alpha}| \frac{d\beta}{\Omega} \\ &= \frac{K}{\pi} \int_0^{\bar{\beta}(r)} |S\Omega - \rho(\beta)(\Omega + \omega)e^{i\alpha(\beta)}| d\beta, \quad a \leq r \leq b, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

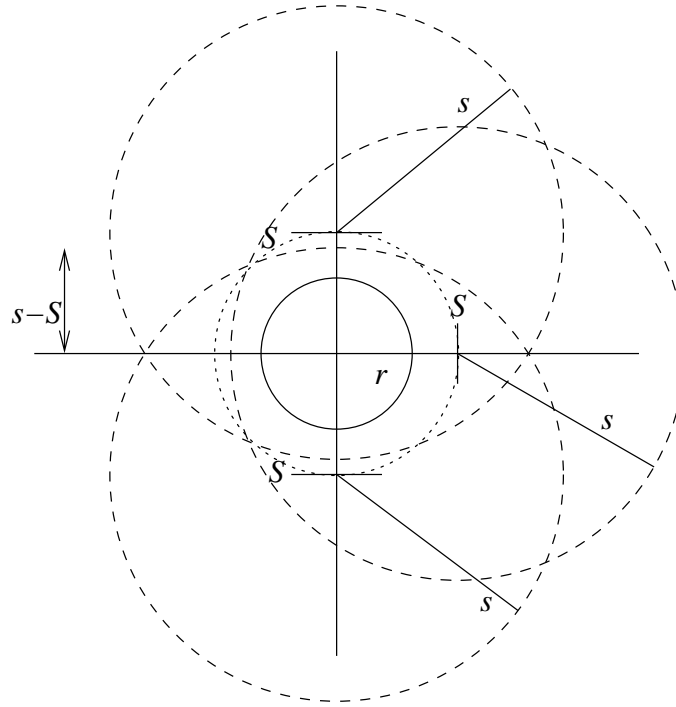


Figura 2.4: Varias posiciones de la herramienta de pulido con radio $s > S$ (línea discontinua) y puntos en la pieza de trabajo con distancia radial $r \leq s - S$ (línea continua).

en la cual $\bar{\beta}(r)$ se define por la ecuación 2.3.7, y de acuerdo a las ecuaciones 2.3.2 y 2.3.3 se tiene que

$$\rho(\beta) = \sqrt{r^2 + S^2 - 2rS \cos(\beta)}, \quad \alpha(\beta) = \sin^{-1} \left(\frac{r \sin \beta}{\rho(\beta)} \right) \quad (2.3.9)$$

2.4. Evaluaciones del perfil de desgaste

Una vez definida la ecuación para el perfil de desgaste por la ecuación 2.3.8, se abordan dos casos en los cuales este perfil puede ser evaluado con relativa facilidad.

2.4.1. Caso 1: Centros coincidentes

En el caso en que los centros coincidan, $S = \omega = 0$, luego $a = 0$, $b = s$, $\bar{\beta}(r) = \pi$, así que ya no hay dependencia de α en la ecuación 2.3.8, de modo que

$$\phi(r) = \frac{K}{\pi} \int_0^\pi r \Omega d\beta = K \Omega r, \quad 0 \leq r \leq s.$$

Este perfil tiene una forma de *wve* como se muestra en la figura 2.5.

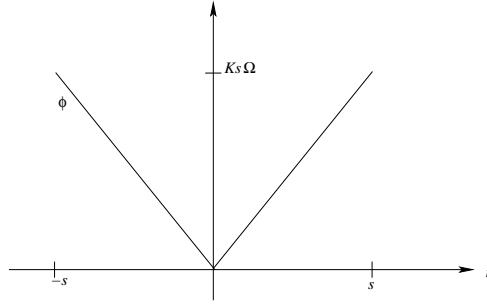


Figura 2.5: Tasa de remoción para el caso 1: La función Uve.

2.4.2. Caso 2: Herramienta que flota libremente

En este caso sólo se produce movimiento de rotación del punto C al rededor de O , la posición del punto P relativa al centro C , $Q(t) - C(t)$, no cambia en ningún momento. Dado que $Q(t) - C(t) = \rho e^{i(\omega+\Omega)t}$, para que lo anterior se cumpla se necesita que $\omega = -\Omega$, lo cual implica que la rotación de C alrededor de O induce una rotación de la herramienta (y el punto P) al rededor de C con igual magnitud pero en sentido contrario. Con esto la ecuación 2.3.8 se transforma en

$$\phi(r) = \frac{K}{\pi} \int_0^{\bar{\beta}(r)} S\Omega d\beta = \frac{KS\Omega}{\pi} \bar{\beta}(r), \quad a \leq r \leq b. \quad (2.4.1)$$

Ésto a su vez da lugar a diferentes ecuaciones dependiendo de la posición radial de C respecto a O ; si la herramienta nunca toca el centro, es decir, si $s < S$, se tiene $a = S - s$ y $b = S + s$ y entonces de acuerdo con la ecuación 2.4.1 se tiene

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\beta}(S - s)) &= \frac{S^2 - 2Ss + s^2 + S^2 - s^2}{2(S - s)S} \\ &= \frac{2(S^2 - sS)}{2S(S - s)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\beta}(S + s)) &= \frac{S^2 + 2Ss + s^2 + S^2 - s^2}{2(S + s)S} \\ &= \frac{2(S^2 + sS)}{2S(S + s)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

por lo que $\bar{\beta}(S + s) = \bar{\beta}(S - s) = 0$, además para calcular el máximo de $\bar{\beta}(r)$ se puede utilizar el criterio de la primera derivada, con esto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\arccos \left(\frac{S^2 - s^2 + r^2}{2rS} \right) \right) &= 0 \\ -\frac{\frac{1}{S} - \frac{S^2 - s^2 + r^2}{2r^2 S}}{\sqrt{1 - \frac{(S^2 - s^2 + r^2)^2}{4r^2 S^2}}} &= 0 \end{aligned}$$

de aquí se tiene que $r = \sqrt{S^2 - s^2}$, con lo cual

$$\max_{r \in [S-s, S+s]} \bar{\beta}(r) = \bar{\beta}(\sqrt{S^2 - s^2}) = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{S^2 - s^2}}{S} \right).$$

Con esto la ecuación 2.4.1 se escribe como

$$\phi(r) = \frac{KS\Omega}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{r^2 + S^2 - s^2}{2rS} \right), \quad S - s \leq r \leq S + s.$$

En la figura 2.6 se muestra un diagrama del perfil de desgase generado por las herramientas con estas especificaciones.

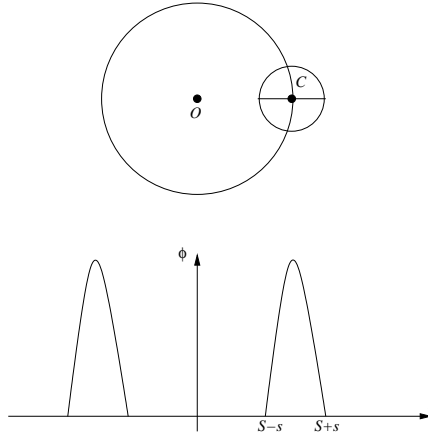


Figura 2.6: Tasa de remoción para el caso 2, con $s < S$.

Para el caso en que hay contacto de la herramienta con el centro O , $s \leq S$, se tiene $\bar{\beta}(r) = \pi$ para $r \in [0, s - S]$ y así de las ecuaciones 2.3.7 y 2.4.1 se concluye que

$$\phi(r) = \begin{cases} KS\Omega & \text{si } 0 \leq r \leq s - S, \\ \frac{KS\Omega}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{r^2 + S^2 - s^2}{2rS} \right) & \text{si } s - S \leq r \leq s + S. \end{cases}$$

Para dicho perfil de desgaste se tiene un diagrama en la figura 2.7.

Cada una de las funciones de remoción de material calculadas puede ser considerada como generadora de espacios lineales dimensionalmente finitos de funciones aproximantes. Dichos espacios son generados por traslaciones de una función de desgaste dada. Estos espacios se llaman *Espacios de desgaste generado*. Si el campo de escalares se considera

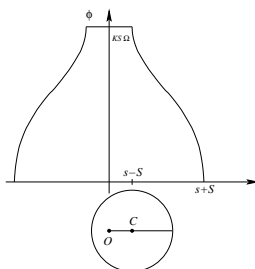


Figura 2.7: Tasa de remoción para el caso 2 con $s \geq S$.

como el tiempo, el problema de aproximación consiste en determinar el tiempo de estancia del centro de la herramienta en cada posición para optimizar la aproximación a un perfil de remoción de material dado.

2.5. Análisis de las funciones base Uve

En esta sección se analizan las propiedades de aproximación sobre el intervalo $[0, 1]$ que poseen las combinaciones lineales de las translaciones de funciones Uve continuas por partes que se mostraron anteriormente.

2.5.1. Configuraciones utilizadas

Definición 2.5.1. Sea $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, entonces se define $h = 1/(n - 1)$ y

$$\phi(x) = \begin{cases} |x/h| & \text{si } |x| \leq h, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.5.1)$$

De acuerdo con la sección 2.4.1, h se puede considerar como el radio de la herramienta circular.

Definición 2.5.2. Se define una malla de posiciones para los centros de la herramienta Π_{nk} mediante $\Pi_{nk} = \{x_{rj}\}$ con $k \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} x_{rj} &= [(r - 1)2^{-k} + j - 1]h, \quad 1 \leq r \leq 2^k; 1 \leq j \leq n - 1, \\ x_{1n} &= 1. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Nótese que hay $n_k = 2^k(n - 1) + 1$ posiciones, las cuales particionan el intervalo $[0, 1]$ en el orden

$$\begin{aligned} 0 = x_{11} &< x_{2,1} < \dots < x_{2^k,1} < \dots \\ & \dots < x_{1,n-1} < x_{2,n-1} < \dots \\ & \dots < x_{2^k,n-1} < x_{1n} = 1, \end{aligned}$$

con espacio uniforme de $h_k = 2^{-k}h$ entre ellos, tal como se muestra en la figura 2.8.

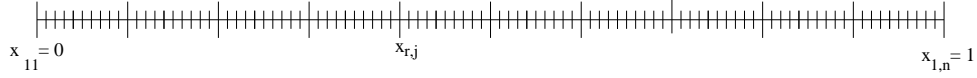


Figura 2.8: Ilustración de la partición del intervalo.

Definición 2.5.3. Para cada centro descrito en la ecuación 2.5.2 se define

$$\phi_{r,j}(x) = \phi(x - x_{r,j}), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.5.3)$$

Estas funciones son las translaciones de funciones uve o funciones base, que se van a analizar.

Claramente $\phi_{r,j}(x)$ es diferente de cero sólo en el intervalo $[x_{r,j} - h, x_{r,j} + h] \cap [0, 1]$.

2.5.2. Independencia lineal de las funciones $\phi_{r,j}(x)$

Para aclarar el término de *funciones base* asociado con las funciones $\phi_{r,j}(x)$ se tiene el siguiente:

Lema 2.5.1. Los elementos $\phi_{r,j}(x)$ definidos anteriormente son linealmente independientes.

Demostración. Consideremos la función

$$S(x; \delta \mathbf{t}) := \sum_{r,j} \delta t_{r,j} \phi_{r,j}(x) \quad x \in [0, 1], \quad (2.5.4)$$

en la cual $\delta \mathbf{t}$ es un vector de tiempos de estadía constantes. Debido a las propiedades de \mathbb{R} se pueden determinar n_k intervalos abiertos $I_{r,j}$ con $x_{r,j} \in I_{r,j}$ tales que el único punto de discontinuidad de S sobre $I_{r,j}$ se da en $x_{r,j}$ debido a los saltos en $\phi_{r,j \pm 1}$.

Definimos los conjuntos

- $S_1 = \{x_{pq} : x_{r,j-1} \leq x_{pq} < x_{r,j}\}$
- $S_2 = \{x_{pq} : x_{r,j} < x_{pq} < x_{r,j+1}\}$
- $S_3 = \{x_{pq} : x_{r,j-1} < x_{pq} < x_{r,j}\}$
- $S_4 = \{x_{pq} : x_{r,j} < x_{pq} \leq x_{r,j+1}\}$

entendiendo que $x_{r,0} = 0$, $x_{r,n+1} = 1$, y recordando que $x_{r,j} = x_{r,j-1} + h = x_{r,j+1} - h$, entonces, tal como se muestra en la figura 2.9, existen dos subintervalos no vacíos de $I_{r,j}$, digamos $I_{r,j}^+$ e $I_{r,j}^-$, a la derecha e izquierda de $x_{r,j}$ respectivamente, para los cuales

$$\begin{aligned} hS(x; \delta \mathbf{t}) &= \sum_{x_{pq} \in S_1} \delta t_{pq}(x - x_{pq}) + \delta t_{r,j}(x_{r,j} - x) \\ &+ \sum_{x_{pq} \in S_2} \delta t_{pq}(x_{pq} - x), \quad x \in I_{r,j}^-, \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

$$\begin{aligned}
 hS(x; \boldsymbol{\delta t}) &= \sum_{x_{pq} \in S_3} \delta t_{pq}(x - x_{pq}) + \delta t_{rj}(x - x_{rj}) \\
 &+ \sum_{x_{pq} \in S_4} \delta t_{pq}(x_{pq} - x), \quad x \in I_{rj}^+.
 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

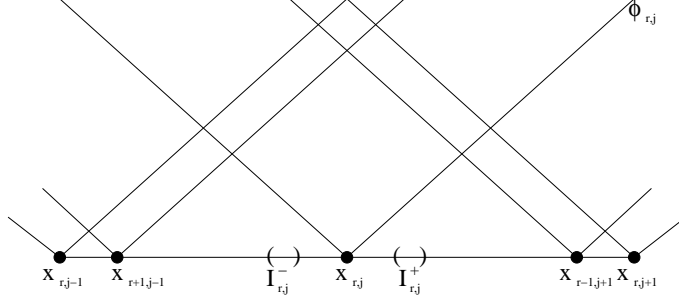


Figura 2.9: Intervalos I_{rj}^+ e I_{rj}^- .

Asumiendo $S(x; \boldsymbol{\delta t}) = 0$ en $[0, 1]$, se tiene que los coeficientes de los términos lineales en las ecuaciones 2.5.5 y 2.5.6 son nulos, de donde se deduce el sistema

$$\sum_{x_{pq} \in S_1} \delta t_{pq} - \delta t_{rj} - \sum_{x_{pq} \in S_2} \delta t_{pq} = 0, \tag{2.5.7}$$

$$\sum_{x_{pq} \in S_3} \delta t_{pq} + \delta t_{rj} - \sum_{x_{pq} \in S_4} \delta t_{pq} = 0. \tag{2.5.8}$$

Se observa que las diferencias de conjuntos $S_1 - S_3$ y $S_2 - S_4$, constan de sólo un punto, lo cual es útil, pues al restar la ecuación 2.5.7 de la ecuación 2.5.8 obtenemos

$$-\delta t_{r,j-1} + 2\delta t_{rj} - \delta t_{r,j+1} = 0, \quad 2 \leq j \leq n-1, \tag{2.5.9}$$

$$2\delta t_{r1} - \delta t_{r,2} = 0, \tag{2.5.10}$$

$$-\delta t_{r,n-1} + 2\delta t_{rn} = 0, \tag{2.5.11}$$

con $1 \leq r \leq 2^k$. El sistema que comprende las ecuaciones 2.5.9–2.5.11, como se ve en cursos de análisis numérico, sólo posee la solución trivial.

w^5

2.5.3. Propiedades de convergencia

En esta subsección se analizan las propiedades de convergencia que poseen las funciones $\phi_{r,j}(x)$ conforme el radio de la herramienta de pulido se hace más pequeño ($h \rightarrow 0$).

Definición 2.5.4. *Sea r un entero con $1 \leq r \leq 2^k$ y las funciones $\phi_{r,j}(x)$ definidas como en la ecuación 2.5.3, entonces se definen*

$$I_r = \int_0^1 \sum_{j=1}^{\nu_r} |\phi_{r,j}(x)| dx, \tag{2.5.12}$$

$$J_r = \int_0^1 \left| 1 - \sum_{j=1}^{\nu_r} \phi_{rj}(x) \right| dx, \quad (2.5.13)$$

en donde

$$\nu_r = \begin{cases} n & \text{si } r = 1, \\ n - 1 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Para continuar con el análisis de la convergencia, se necesitan cotas para I_r y J_r .

Lema 2.5.2. Sean I_r y J_r las cantidades definidas por las ecuaciones 2.5.12 y 2.5.13, entonces se cumple que $I_r \leq 1$ y $J_r \leq 3h/4$.

Demostración. De acuerdo con la definición 2.5.3, $\phi_{1j}(x) \geq 0$, por lo que al considerar la figura 2.10 se tiene que

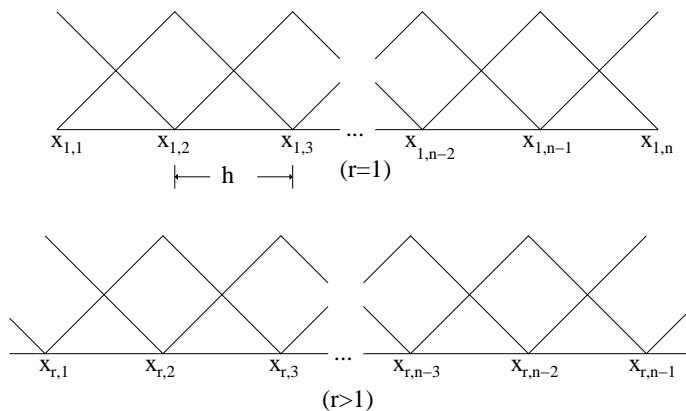


Figura 2.10: Bosquejo de funciones base.

$$\sum_{j=1}^n \phi_{1j}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = x_{1,j}, 1 < j < n - 1, \\ 1 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

y para $r \geq 2$, ver figura 2.11, se tiene

$$\sum_{j=1}^n \phi_{rj}(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = x_{r,j}, 1 < j < n - 1, \\ \frac{x_{r1}-x}{h} & \text{si } 0 \leq x < x_{r1}, \\ \frac{x-x_{r,n-1}}{h} & \text{si } x_{r,n-1} < x \leq 1, \\ 1 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

De lo anterior se obtiene $I_1 = 1$ y $J_1 = 0$.

En cuanto a $2 \leq r \leq 2^k$, de acuerdo con Rudin [8],

CAPÍTULO 2. FUNCIONES DE DESGASTE
2.5. ANÁLISIS DE LAS FUNCIONES BASE UVE

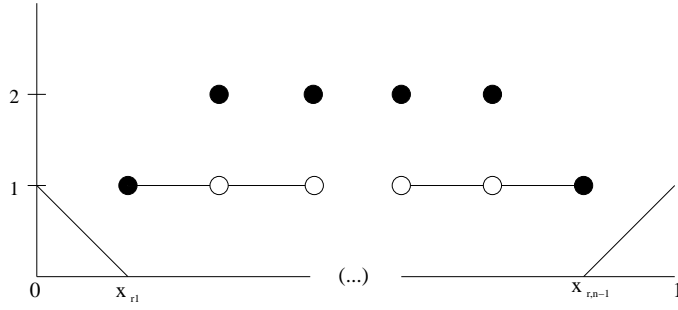


Figura 2.11: Bosquejo de la función $\sum_{j=1}^n \phi_{rj}(x)$.

$$\begin{aligned}
 I_r &= \int_0^{x_{r1}} \frac{x_{r1} - x}{h} dx + \int_{x_{r1}}^{x_{r,n-1}} 1 dx + \int_{x_{r,n-1}}^1 \frac{x - x_{r,n-1}}{h} dx \\
 &= \frac{n-2}{n-1} + \frac{2^{-4k-1}(8^k + (4^k - 2^{2k+1})(r-1))(1-r+2^k)}{n-1} \\
 &\quad + \frac{2^{-4k-1}(2^{2k+1} - 4^k)(r-1)^2}{n-1} \\
 &= -\frac{3}{2(n-1)} + \frac{2^{-2k-1}}{n-1} - \frac{2^{-2k}}{n-1} + \frac{2^{-k}}{n-1} + \frac{n}{n-1} \\
 &\quad + \frac{2^{-2k-1}r}{n-1} - \frac{2^{-2k-2}r}{n-1} - \frac{2^{-k}r}{n-1} + \frac{2^{-2k+1}r^2}{n-1} - \frac{2^{-2k}r^2}{n-1} \\
 &= \frac{2^{-2k-1}(2 - 3(2^{2k}) + 2^{k+1} + 2^{2k+1}n - 4r - 2^{k+1}r + r^2)}{n-1} \\
 &= 1 - \frac{1}{2(n-1)} + \frac{2^{-2k}}{n-1} + \frac{2^{-k}}{n-1} - \frac{2^{-2k+1}r}{n-1} - \frac{2^{-k}}{n-1} + \frac{2^{-2k}r^2}{n-1} \\
 &= 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1 - 2^{-k}(r-1))^2 + 2^{-2k}(r-1)^2}{2(n-1)} \\
 &= 1 - h + \frac{\theta_{r,k}^2 + (1 - \theta_{r,k})^2}{2}h,
 \end{aligned}$$

en donde $\theta_{rk} := 2^{-k}(r-1)$, lo que da paso a

$$\begin{aligned}
 2 &\leq r \leq 2^k, \\
 2^{-k} &\leq \theta_{rk} \leq 1 - 2^{-k}, \quad [\text{porque } \theta_{rk} = 2^{-k}(r-1)]
 \end{aligned}$$

y también

$$2^{-k} \leq 1 - \theta_{rk} \leq 1 - 2^{-k}, \quad [\text{porque } \theta_{rk} = 2^{-k}(r-1)]$$

además

$$\begin{aligned} \theta_{rk}^2 &< \theta_{rk}, & [\text{porque } \theta_{rk} < 1] \\ 1/2 \leq \theta_{rk}^2 + (1 - \theta_{rk})^2 &< 1, & [\text{porque } \theta_{rk}^2 + (1 - \theta_{rk})^2 = 2(\theta_{rk}^2 - \theta_{rk}) + 1 < 1] \end{aligned}$$

por tanto

$$1 - 3h/4 \leq I_r < 1 - h/2,$$

mientras que

$$h/2 < J_r \leq 3h/4.$$

w^5

Se necesita ahora de la siguiente definición:

Definición 2.5.5. *Se define el módulo de continuidad de f respecto a h sobre $[0, 1]$ por*

$$\omega(f; h) := \sup_{\substack{0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \\ |x_1 - x_2| \leq h}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

y la norma uno de f sobre $[0, 1]$ por

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| dx.$$

Se procede ahora con el teorema que analiza las propiedades de convergencia de las funciones base.

Teorema 2.5.3. *Sean Π_{nk} los centros de la herramienta dados por la ecuación 2.5.2 y la función $S(x; \delta \mathbf{t})$ asociada a estos centros dada por la ecuación 2.5.4. Si $f \in \mathcal{C}[0, 1]$ y*

$$\delta t_{rj} := 2^{-k} f(x_{rj}),$$

entonces

$$\|f - S(\cdot; \delta \mathbf{t})\| \leq 3/4 \|f\|_\infty h + \omega(f; h)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\|f - S(\cdot; \delta \mathbf{t})\| &= \int_0^1 |2^{-k} f(x) [2^k - \sum_{r,j} \phi_{rj}(x)] \\
&\quad + 2^{-k} \sum_{r,j} [f(x) - f(x_{rj})] \phi_{rj}(x)| dx \\
&\leq 2^{-k} \|f\|_\infty \int_0^1 |\sum_r [1 - \sum_j \phi_{rj}(x)]| dx && (\sum_r 1 = 2^k) \\
&\quad + 2^{-k} \sum_{r,j} \int_0^1 |f(x) - f(x_{rj})| \phi_{rj}(x) dx && (\text{Desigualdad del triángulo}) \\
&\leq 2^{-k} \|f\|_\infty \sum_r \int_0^1 |1 - \sum_j \phi_{rj}(x)| dx && (\text{Desigualdad del triángulo}) \\
&\quad + 2^{-k} \omega(f; h) \sum_{r,j} \int_0^1 |\phi_{rj}(x)| dx && (f \phi_{rj}(x) \leq \omega(f; h)) \\
&= 2^{-k} \|f\|_\infty \sum_r J_r + 2^{-k} \omega(f; h) \sum_r I_r && (\text{ecuaciones 2.5.12 - 2.5.13}) \\
&= 2^{-k} \|f\|_\infty \frac{3}{4} h 2^k + 2^{-k} \omega(f; h) 2^k && (\text{Lema 2.5.2}) \\
&= \|f\|_\infty \frac{3}{4} h + \omega(f; h)
\end{aligned}$$

w^5

Este teorema es un estimado de la convergencia del desgaste deseado f en términos del número de ubicaciones para el centro de la herramienta y de propiedades de la misma función f . La modelación que se hace en el capítulo siguiente para la herramienta de presiones adaptables sigue el esquema presentado en este capítulo. Si bien no se llega a un teorema similar al teorema 2.5.3 debido a la forma complicada que tiene el movimiento, se sientan las bases para posteriores estudios y se encuentran las funciones de desgaste, utilizando la ecuación de Preston y un método numérico.

Capítulo 3

Modelo Propuesto

En el capítulo anterior se describió el modelado propuesto por Hall et al [2] para la herramienta de movimientos circulares compuestos. En este capítulo se describirá la herramienta de presiones adaptables, objeto de nuestro estudio, para después modelar su funcionamiento y el desgaste que produce.

3.1. Descripción de la máquina NCC

La *máquina NCC* tiene un brazo recto horizontal dotado de un movimiento pendular. El vidrio gira sobre un soporte que se encuentra por debajo del brazo y este brazo sujeta las herramientas de pulido que entran en contacto con la superficie del vidrio. En la figura 3.1 se aprecian el eje de giro del brazo de la herramienta, O_{GBH} ; el centro del vidrio, O_{CV} ; así como el eje de descentramiento de la herramienta, O_{DH} ; la posición de este eje sobre la ranura mostrada determina cierta inclinación del brazo respecto al eje Y_1 , denominada excentricidad, con la cual se define la posición central del movimiento pendular del brazo.

3.2. Descripción de la herramienta

La herramienta consiste en un conjunto de subherramientas rectangulares independientes, cada una montada sobre una misma barra rectangular por medio de una aguja, lo cual permite que aún cuando la subherramienta oscile ésta se acople a la altura de la superficie. Los orificios por los cuales pasan las agujas están alineados e igualmente espaciados.

La barra rectangular es perpendicular al brazo de la herramienta y está sujeta a él en su punto medio O_{CH} . Por otro lado, con las agujas independientes es posible aplicar diferentes pesos y por tanto diferentes presiones por cada subherramienta.

El desgaste generado por la herramienta en la superficie del vidrio, una vez ajustados los parámetros necesarios, se da mediante el movimiento giratorio del vidrio y el movimiento oscilatorio de la herramienta, cada uno de los cuales tiene una velocidad de giro propia.

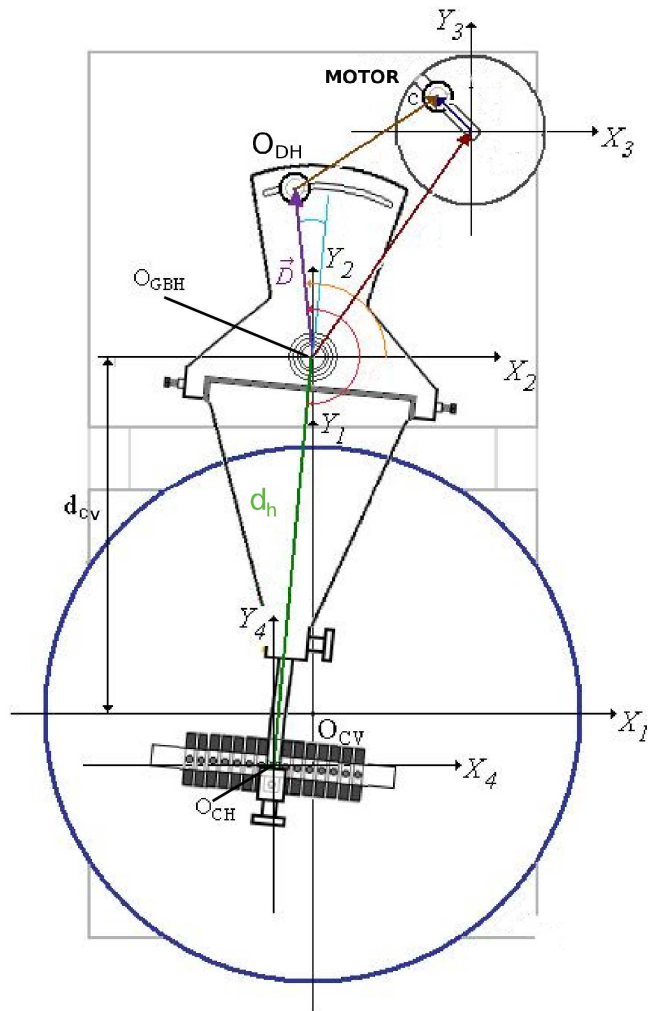


Figura 3.1: Configuración de la herramienta.

3.3. Variables a considerar

Para efectos de modelado se tomarán en cuenta sólo algunas de las variables que explican de forma completa el funcionamiento de la herramienta [10], aquellas que son indispensables para describir su movimiento, y se omitirá su relación con las demás. Dichas relaciones conciernen a la forma en que el técnico logra que las primeras asuman cierto valor y así establece los parámetros de la herramienta antes de ponerla en funcionamiento, pero para el modelo no es necesario tener conocimiento detallado de estos hechos.

En este sentido se dan las siguientes definiciones de las variables a considerar para analizar el movimiento de un punto P sobre la superficie de una subherramienta:

Definición 3.3.1. *Considerando una máquina NCC y una subherramienta como se muestra en la figura 3.1 y de forma más concisa en la figura 3.2.*

1. d_{cv} es la distancia entre el centro del vidrio y el punto O_{GBH} .
2. e es la excentricidad.
3. d_h es la distancia del centro de la herramienta al punto O_{GBH} .
4. d_{cx} es distancia horizontal del centro de la herramienta al punto P (figura 3.2).
5. d_{cy} es distancia vertical del centro de la herramienta al punto P (figura 3.2).
6. θ es el ángulo formado por los segmentos $\overline{O_{GBH}, O_{CH}}$ y $\overline{O_{GBH}, P}$.
7. ω_{gvi} es la velocidad de giro del vidrio, (figura 3.2).
8. $\omega_{gh}(t)$ es el ángulo que el brazo de la herramienta forma con la recta que determina la posición media del movimiento pendular al tiempo t (figura 3.3).
9. δ es la amplitud máxima de oscilación del movimiento de tipo pendular.

3.4. Notación utilizada

En lo que resta de este capítulo se utilizarán de forma recurrente algunas ideas que son expresadas de manera sencilla mediante una notación particular (ver *Concrete Mathematics* [7]) que se introduce en las siguientes definiciones:

Definición 3.4.1. *Se define y denota la función piso para todo número real x mediante:*

$$\lfloor x \rfloor = \text{el mayor entero menor o igual a } x.$$

Definición 3.4.2. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$. Se define el residuo de x entre y mediante*

$$x \bmod y = x - y\lfloor x/y \rfloor.$$

Definición 3.4.3. *Para una proposición lógica p , se denota su valor de verdad mediante $[p]$, teniéndose entonces que*

$$[p] = \begin{cases} 1 & \text{cuando la proposición } p \text{ es verdadera} \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

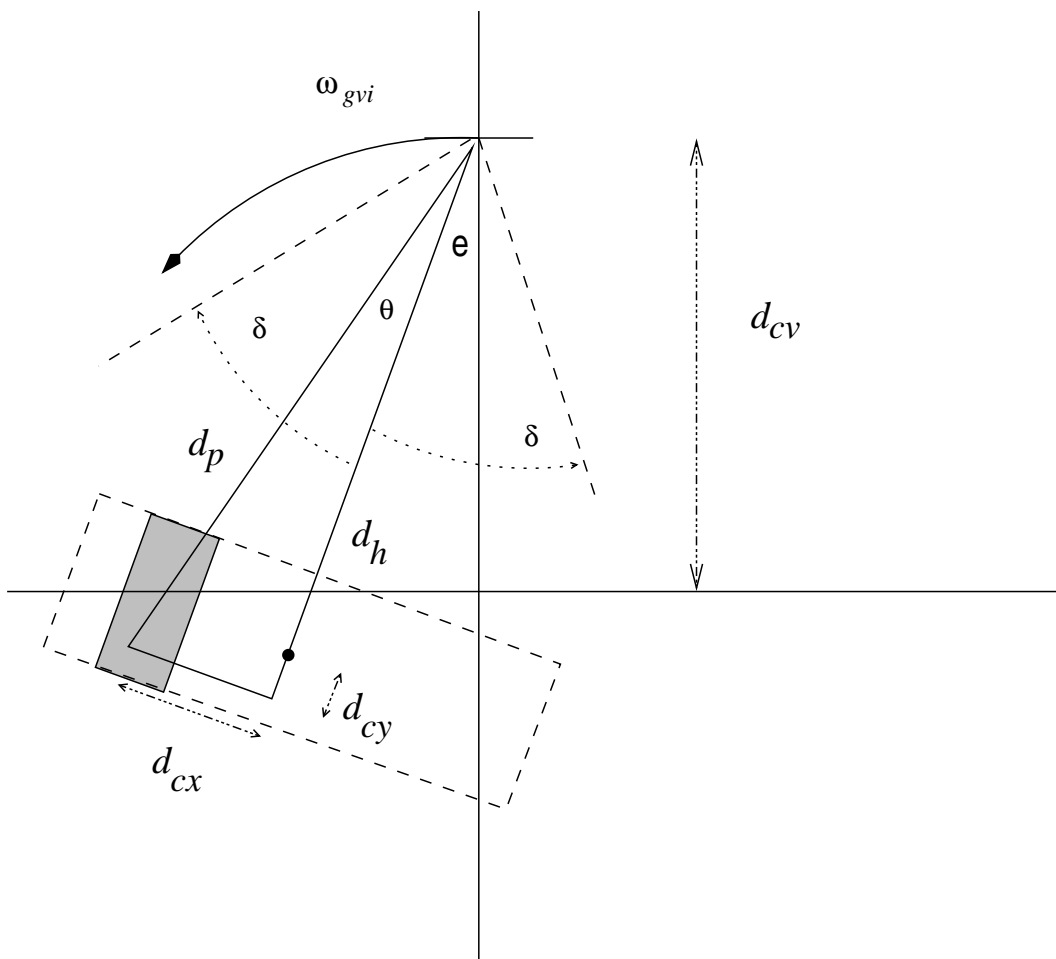


Figura 3.2: Diagrama de la herramienta.

3.5. Obtención del movimiento de la herramienta

El movimiento de un punto P de la herramienta resulta de componer diferentes tipos de movimiento: pendular del brazo de la herramienta y rotacional del vidrio. Por otro lado, la excentricidad debe también tomarse en cuenta, así como la posición relativa de P respecto al centro de la herramienta. En la subsección 3.5.1 se considera la posición del centro de la herramienta cuando el sistema está dotado únicamente del movimiento pendular. En la subsección 3.5.2 se amplía la descripción de este movimiento para incluir cualquier punto de la herramienta. En la subsección 3.5.3 se traslada el movimiento pendular para situar el origen del plano complejo en el centro del vidrio y efectuar la composición con el movimiento giratorio del vidrio. Finalmente en la subsección 3.5.4 se conectan todos los movimientos para obtener la descripción completa del movimiento del punto P .

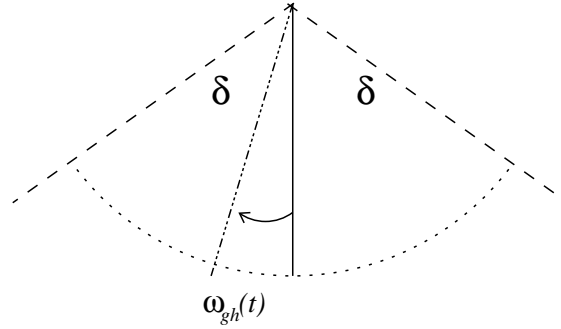


Figura 3.3: Movimiento tipo pendular.

3.5.1. Movimiento de tipo pendular

Situamos en esta subsección el origen en O_{GBH} y el eje imaginario sobre la recta que define la posición media del movimiento pendular. La oscilación de tipo pendular estará modelada mediante la función $\omega_{gh}(t)$ que da el ángulo de posición al tiempo t (y no su velocidad angular), esto se hace con el fin de que el modelo describa una amplia gama de movimientos de tipo pendular, (ver figura 3.3). Supongamos que P recorre la amplitud de oscilación de 2δ con una velocidad promedio de k , i.e., que pase de $-\delta$ a δ en un tiempo de $\frac{2\delta}{k}$. Como ejemplo de funciones $\omega_{gh}(t)$ que tienen este comportamiento se pueden considerar las siguientes

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) = & \left((1 + \lfloor \frac{kt}{2\delta} \rfloor) \bmod 2 \right) ((kt) \bmod (2\delta) - \delta) \\ & + \left(\lfloor \frac{kt}{2\delta} \rfloor \bmod 2 \right) (\delta - (kt) \bmod (2\delta)), \end{aligned}$$

de la cual se puede ver un bosquejo en la figura 3.5.1; y $\varphi_2(t) = \delta \cos(\frac{k\pi t}{2\delta} + \pi)$.

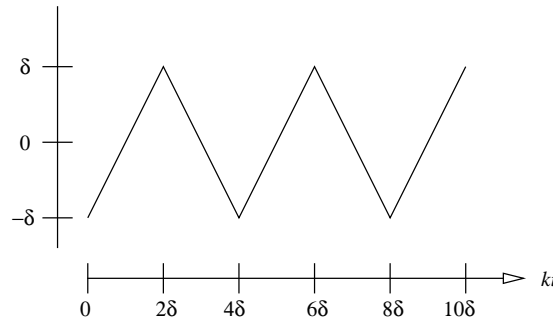


Figura 3.4: Gráfica de $\varphi_1(t)$.

Ambas funciones alcanzan máximos y mínimos cuando

$$t \equiv \frac{2\delta}{k} \bmod (2\delta).$$

Para garantizar que en posición inicial se tenga una herramienta alineada con el eje imaginario es suficiente trasladar el eje t por δ/k , es decir, se usa $\omega_{gh}(t) = \varphi(t + \delta/k)$ con $t \geq 0$, donde φ puede ser cualquiera de las funciones φ_1 , φ_2 u otra función con la periodicidad y la amplitud indicadas.

De lo anterior se deduce que la posición del centro de la herramienta en el tiempo t está dada por $\exp i(\omega_{gh}(t) + e + \frac{3}{2}\pi)$ cuando se considera el movimiento pendular y una excentricidad de e .

3.5.2. Posición relativa al centro de la herramienta

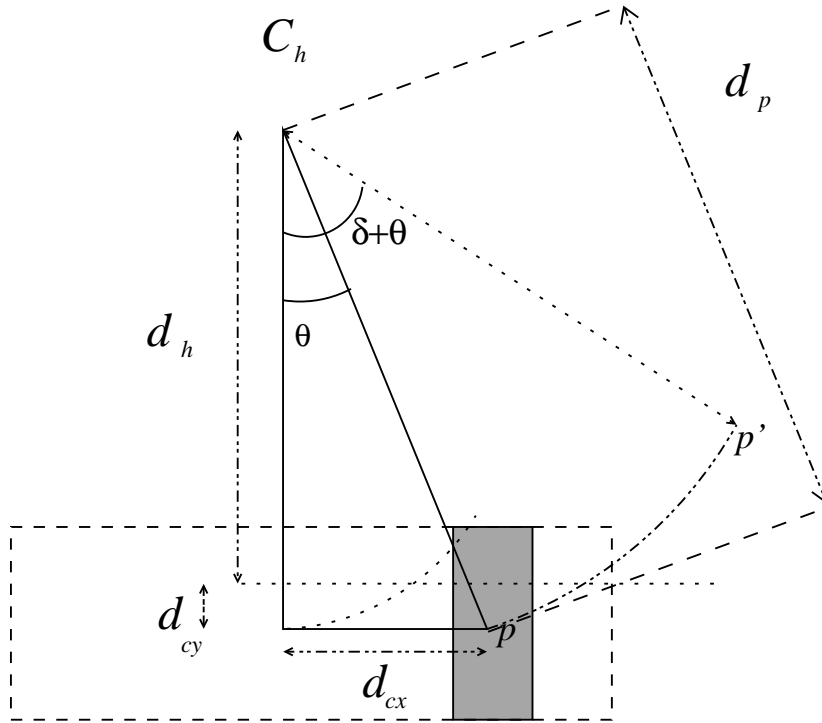


Figura 3.5: Modificación de la rotación.

En esta subsección el origen y los ejes del plano complejo se sitúan como en la subsección anterior. Dirigiendo nuestra atención a un punto P dentro de una subherramienta cualquiera, se puede notar que su desplazamiento respecto del centro de la herramienta O_{CH} ocasiona una modificación en el movimiento de tipo pendular, pues este desplazamiento no sólo altera el ángulo de posición del movimiento pendular, sino que también modifica la distancia radial a la cual se da, es decir, altera la distancia al eje de giro de la base de la herramienta (ver figura 3.5). Se puede notar de igual forma que este movimiento se da sobre una circunferencia, pero que no se describe completa, ver figura 3.3, y deja intacta la amplitud de oscilación.

La descripción del movimiento de tipo pendular del punto P se da entonces en función de los desplazamientos respecto al centro de la herramienta en el eje x , d_{cx} , y en el eje y , d_{cy} , añadiendo a los ángulos de movimiento de tipo pendular el ángulo $\theta = \arctan \frac{d_{cx}}{d_h + d_{cy}}$,

(ver figura 3.5). Respecto a la modificación de la distancia del punto P al punto O_{GBH} , se cumple que $d_h + d_{cy} = d_p \cos \theta$, de donde $d_p = \frac{d_h + d_{cy}}{\cos \theta}$, (ver figura 3.5). Al considerar esto en la ecuación de movimiento de tipo pendular se tiene que $d_p \exp(i(\omega_{gh}(t) + \theta))$ es la posición del punto P situado en la subherramienta.

3.5.3. Rotación del vidrio

La rotación del vidrio se modelará considerando que este no se mueve y que el punto O_{GBH} rota describiendo una trayectoria circular con centro en el centro del vidrio y en sentido contrario al movimiento circular del mismo. Dicho movimiento es equivalente al real para efectos del contacto que se da entre los puntos de la herramienta y los puntos del vidrio, ver figura 3.6.

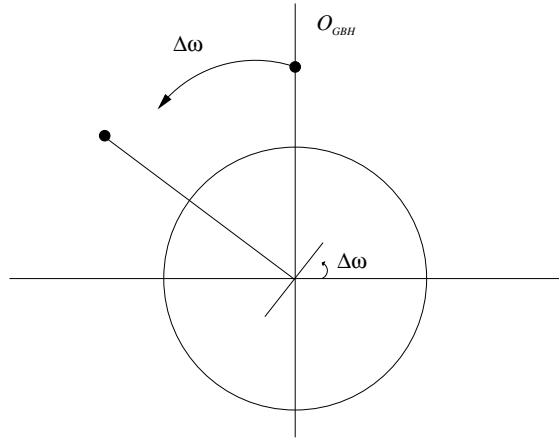


Figura 3.6: Rotación en O_{CH} implica rotación en el punto P del brazo.

Si se consideran los ejes coordenados como en las subsecciones previas, se puede ver que el centro de la herramienta O_{CH} posee coordenadas $d_h e^{i3/2\pi} = (0, -d_h)$, pero al trasladar los ejes coordenados al centro del vidrio O_{CV} , O_{GBH} toma las coordenadas $(0, d_{cv})$ y al considerar la rotación de la pieza de trabajo, la posición de O_{CH} esta dada por

$$(d_h e^{i3/2\pi} + i d_{cv}) e^{i\omega_{gvt}},$$

debido a que la rotación se da con un ángulo ω_{gvt} y tiene que considerarse desde la base de la herramienta, que se encuentra en el origen, claro que esta es una ecuación del movimiento del punto $P = O_{CH}$, es decir, con $d_{cx} = d_{cy} = 0$.

3.5.4. Vector de posición general

Uniando todo lo anterior se obtiene una expresión para el vector de posición de la siguiente manera:

1. Inicialmente se considera solamente el movimiento pendular del brazo de la herramienta.

$$e^{i(\omega_{gh}(t) + \frac{3}{2}\pi)}$$

CAPÍTULO 3. MODELO PROPUESTO
3.6. DESGASTE GENERADO POR LA HERRAMIENTA

2. Se añade el efecto de la excentricidad y la posición relativa de P en la herramienta .

$$\frac{d_h + d_{cy}}{\cos \theta} e^{i(\omega_{gh}(t) + \theta + e + \frac{3}{2}\pi)}$$

3. Se trasladan los ejes coordenados, situando el origen en el centro del vidrio.

$$\frac{d_h + d_{cy}}{\cos \theta} e^{i(\omega_{gh}(t) + \theta + e + \frac{3}{2}\pi)} + id_{cv}$$

4. Por último se añade el efecto de rotar el vidrio con lo cual se obtiene la expresión final del vector de posición $Q(t)$ de un punto P sobre la herramienta al tiempo t .

$$Q(t) = e^{i(\omega_{gvi})t} \left(\frac{d_h + d_{cy}}{\cos \theta} e^{i(\omega_{gh}(t) + \theta + e + \frac{3}{2}\pi)} + id_{cv} \right) \quad (3.5.1)$$

Un diagrama completo del movimiento del punto P se puede ver en la figura 3.2.

Unas palabras respecto al vector de posición obtenido; se observa que la mayoría de las funciones utilizadas en la modelación de la posición son periódicas, por lo que surge la pregunta de si se tiene un periodo para la función Q .

El movimiento circular del vidrio tiene un periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{gvi}}$, suponiendo que el movimiento pendular tiene un periodo T_2 y existen enteros p, q tales que $T_1 p = T_2 q = T^*$, entonces para cualquier tiempo $t \geq 0$ y cualquier punto sobre la herramienta se tendrá $Q(t + T^*) = Q(t)$.

Para el caso de las funciones $\omega_{gh}(t)$ propuestas anteriormente se tiene que esto ocurre cuando

$$\frac{2\pi k}{\omega_{gvi}} \equiv 0 \pmod{2\delta}.$$

A este fenómeno se le conoce como *sincronización* (ver figuras A.1–A.6) y es ampliamente evitado por los técnicos que operan la máquina NCC debido a que implica que la trayectoria de cada punto P sobre la herramienta se repita con un periodo T^* , y si p y q tienen valores relativamente bajos, el desgaste estaría lejos de tener simetría radial, por lo tanto no se comentará mas del asunto.

3.6. Desgaste generado por la herramienta

Usando el vector de posición $Q(t)$ se puede aproximar el desgaste generado por la herramienta sobre un punto del vidrio mediante la ecuación de Preston [5], en nuestro caso se tiene que el desgaste promedio generado por la herramienta sobre un punto del vidrio con coordenadas polares (r, η) se estima por la función

$$\phi(r, \eta) = \frac{K}{\mu(I)} \int_I [Q(t) = r e^{i\eta}] \left| \frac{dQ(t)}{dt} \right| dt. \quad (3.6.1)$$

La notación $[Q(t) = r e^{i\eta}]$ representa la función de contacto de la herramienta con el punto a analizar, pues vale 1 cuando se cumple la igualdad y 0 en caso contrario; $\frac{dQ(t)}{dt}$ se obtiene derivando la ecuación 3.5.1 y está dada por

$$id_p \left(\frac{d}{dt} w_{gh}(t) \right) e^{i(\theta + w_{gh}(t) + w_{gvi}t + \frac{3\pi}{2} + e)} + iw_{gvi} e^{i(w_{gvi}t)} \left(d_p e^{i(\theta + w_{gh}(t) + \frac{3\pi}{2} + e)} + id_{cv} \right).$$

3.7. Geometría de contacto

En el proceso de calcular el desgaste generado por la herramienta estudiada utilizando la ecuación de Preston, se necesita calcular la función de contacto, para lo cual se analizará la geometría de contacto de la herramienta. Haremos esto en un caso simplificado, se considerará una herramienta en la cual no hay movimiento de tipo pendular, es decir, $\omega_{gh}(t) = 0$ para todo t , lo cual tiene como implicación el hecho de que ahora el desgaste sólo depende de la distancia radial P , con lo cual la ecuación 3.6.1 se simplifica como:

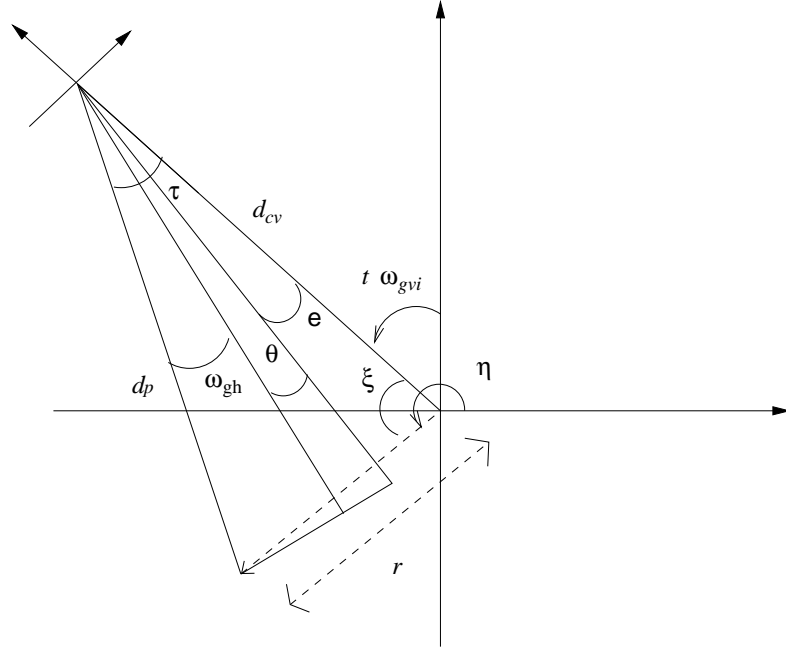


Figura 3.7: Posición al tiempo t .

$$\begin{aligned}
 \phi(r, \eta) &= \frac{K}{\mu(I)} \int_I [Q(t) = re^{i\eta}] \left| \frac{dQ(t)}{dt} \right| dt \\
 &= \frac{K}{\mu(I)} \int_I [Q(t) = re^{i\eta}] |i\omega_{gvi} e^{i\omega_{gvi}t} (d_p e^{i(\theta + \frac{3\pi}{2} + e)} + id_{cv})| dt \\
 &= \frac{K}{\mu(I)} \int_I [Q(t) = re^{i\eta}] |\omega_{gvi} (d_p e^{i(\theta + \frac{3\pi}{2} + e)} + id_{cv})| dt. \tag{3.7.1}
 \end{aligned}$$

3.7.1. Anillo de contacto

Se analizará solamente el caso en que $I = [0, \frac{2\pi}{\omega_{gvi}}]$ que es el intervalo de tiempo en el que el vidrio completa su primera vuelta. Como la herramienta sólo tiene rotación (figura 3.8) ejerce desgaste sólo sobre un anillo definido por distancias radiales r de los puntos sobre el vidrio que cumplen $a \leq r \leq b$ con

$$a = \min \|Q(0)\|_{Q(0) \in \text{Herramienta}},$$

$$b = \max \|Q(0)\|_{Q(0) \in \text{Herramienta}}.$$

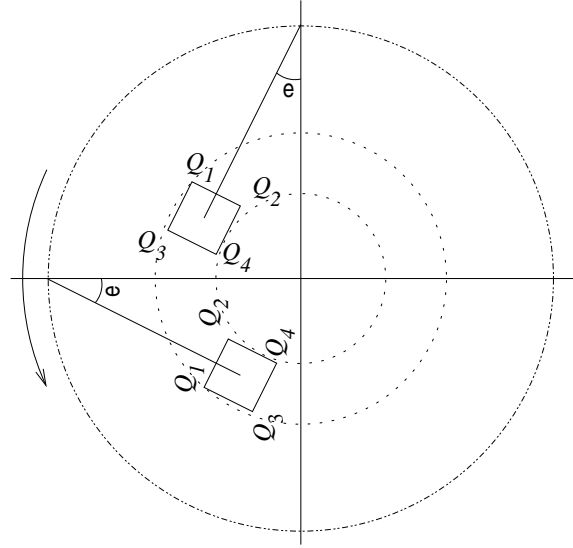


Figura 3.8: Herramienta sin oscilación.

Para el cálculo de a y b cuando el origen no se encuentra en la herramienta, es suficiente considerar los lados y vértices de la herramienta; si estos últimos están enumerados como en la figura 3.8, generan rectas dirigidas r_1, r_2, r_3, r_4 que tienen ecuaciones:

$$\begin{aligned} r_1 : \quad z &= (Q_3 - Q_1)\tau + Q_1, \\ r_2 : \quad z &= (Q_4 - Q_2)\tau + Q_2, \\ r_3 : \quad z &= (Q_2 - Q_1)\tau + Q_1, \\ r_4 : \quad z &= (Q_4 - Q_3)\tau + Q_3, \end{aligned}$$

las cuales representan los lados de la herramienta cuando el parámetro τ cumple que $\tau \in [0, 1]$. Se necesitan ahora las siguientes definiciones:

Definición 3.7.1. Sean las rectas dirigidas r_1, r_2, r_3, r_4 definidas como en el párrafo anterior, se define y denota a:

- P_i como el pie de la perpendicular a r_i que pasa por el origen, (la distancia de r_i al origen es $\|P_i\|$).
- $H_1 = \{\|P_i\| : P_i \text{ pertenece al lado } i\}$.
- $H_2 = \{\|Q_1\|, \|Q_2\|, \|Q_3\|, \|Q_4\|\}$.
- $H = H_1 \cup H_2$.

Se observa de la definición 3.7.1 que $a = \text{mín } H$ y $b = \text{máx } H$.

En cuanto a la forma explícita del punto P_j en la recta r_j que minimiza su distancia al origen, es necesario considerar una recta perpendicular que pasa por el origen. De acuerdo con Lars V. Ahlfors [1], una recta en el plano complejo \mathbb{C} que pasa por un punto \mathbf{a} y tiene dirección \mathbf{b} tiene la forma $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}\tau$ con $\tau \in \mathbb{R}$, y dos rectas $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}\tau$ y $z = \mathbf{a}' + \mathbf{b}'\kappa$ son perpendiculares si y sólo si \mathbf{b}/\mathbf{b}' es un número imaginario puro. Así, dada la recta r_j con ecuación $z = \mathbf{a} + \mathbf{b}\tau$ y una recta $z = 0 + \mathbf{b}'\kappa$ perpendicular a la primera y que pasa por el origen, se cumple que

$$\begin{aligned} \arg \mathbf{b}/\mathbf{b}' &\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \\ \arg \mathbf{b} - \arg \mathbf{b}' &\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \\ \arg \mathbf{b} &\equiv \arg \mathbf{b}' + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

por lo que se escoge $b' = e^{i(\arg \mathbf{b} + \frac{\pi}{2})}$ para $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|e^{i \arg \mathbf{b}}$, luego la intersección de las dos rectas se obtiene igualando sus expresiones paramétricas, $\mathbf{a} + \mathbf{b}t = \mathbf{b}'\kappa$, lo cual conlleva a dos ecuaciones reales con sus partes real e imaginaria respectivamente, que se traducen en el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \Re \mathbf{b} & -\Re \mathbf{b}' \\ \Im \mathbf{b} & -\Im \mathbf{b}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Re \mathbf{a} \\ -\Im \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

y cuando $\tau \in [0, 1]$, se tiene que la intersección de las rectas ocurre en un lado de la herramienta, por lo que $P_j = \mathbf{a} + \mathbf{b}\tau$.

3.7.2. Límites de la integral, trayectoria de contacto

Como se supone $\omega_{gh}(t) = 0$ para todo t , y sólo se tiene translación de la herramienta, se necesita dibujar la trayectoria de los puntos sobre la misma que en algún momento tienen contacto con la circunferencia de radio r y centro O_{CV} , y determinar el intervalo de tiempo en el cual se da este contacto. Para el cálculo de esta trayectoria se necesitan los puntos sobre los bordes de herramienta que tienen norma r , es decir, se necesita obtener τ tal que para la recta $(Q_i - Q_j)\tau + Q_j$, se cumple

$$\begin{aligned} r^2 &= \|(Q_i - Q_j)t + Q_j\|^2 \\ &= ((Q_i - Q_j)t + Q_j) * \overline{(Q_i - Q_j)t + Q_j} \\ &= \|(Q_i - Q_j)\|^2 t^2 + t(Q_j(\overline{Q_i - Q_j}) + \overline{Q_j}(Q_i - Q_j)) + \|Q_j\|^2 \\ &= \|(Q_i - Q_j)\|^2 t^2 + 2(\Re Q_i \overline{Q_j} - \|Q_j\|) + \|Q_j\|^2 \end{aligned}$$

Y si la solución de este polinomio en τ cumple que $\tau \in [0, 1]$, hay intersección del lado de la herramienta en cuestión con los puntos de la circunferencia de radio r , estos puntos se utilizarán para crear la trayectoria de contacto de la siguiente forma: Suponiendo que los puntos en los lados de la herramienta que tocan a los puntos sobre el vidrio a una distancia radial r son b_0 y b_1 como se muestra en la figura 3.9, entonces se puede definir

la trayectoria como el arco de la circunferencia que empieza en b_0 , terminando en b_1 y el recorrido de la trayectoria lo realiza en $\frac{\arg b_0/b_1}{\omega_{gvi}}$ unidades de tiempo, lo cual nos da los límites de integración: de 0 a $\frac{\arg b_0/b_1}{\omega_{gvi}}$; pero como para cálculos futuros es conveniente tener esta trayectoria expresada respecto a O_{GBH} , se debe de trasladar en dirección $-id_{cv}$ para compensar la posición de O_{GBH} , también hay que considerar la excentricidad, que rota la trayectoria en un ángulo $-e$, y por último, se necesita la distancia de estos puntos a O_{CH} que está en dirección $-id_h$ de O_{GBH} , con lo cual al hacer la diferencia se tiene que la trayectoria es

$$\gamma(t) = \left[r e^{i(\arg b_0 - \omega_{gvi}t)} - id_{cv} \right] e^{-ie} + id_h, \quad 0 \leq t \leq \frac{\arg b_0/b_1}{\omega_{gvi}}.$$

En el caso en que la trayectoria de contacto pase por cuatro puntos, se realiza la integral sobre dos trayectorias que tienen una forma similar a la que se acaba de construir en el párrafo anterior.

3.8. Resultados

En esta sección se presentan los resultados del modelo que en secciones anteriores se explicó de manera detallada. La integral 3.6.1 se ha calculado usando el método de Roemberg [9], el cual se ha implementado en *Octave* (Apéndice B) y ha sido comprobado para un caso particular de una herramienta situada en el eje real mediante un desgaste testigo proporcionado por el *Taller de óptica* de la *BUAP*, a través de un programa proporcionado por el doctor Alberto Cordero Dávila, las gráficas se muestran en la figura 3.10.

Cabe señalar que el desgaste testigo corresponde a una subherramienta con las siguientes características:

- excentricidad nula.
- 5 cm de ancho por 10 cm de alto.
- centro de la subherramienta colocado a 15 cm del origen en dirección este.

Es para este tipo de configuraciones que se tiene un modelo previo desarrollado en el taller de óptica de la *BUAP*. Por otro lado, el modelo propuesto en esta tesis, a pesar de la restricción concerniente a la falta de movimiento pendular, acepta configuraciones más generales de la herramienta, pues deja libres a la excentricidad y a la posición del centro de la subherramienta, tal como se aprecia en las figuras 3.11–3.12, esto muestra el poder de alcance que posee modelado matemático desarrollado.

Por otro lado y como producto de las implementaciones en *Octave* del Apéndice B se puede evaluar numéricamente la ecuación 2.3.8 para el caso general, sin recurrir a simplificaciones como las supuestas en el Capítulo 2.

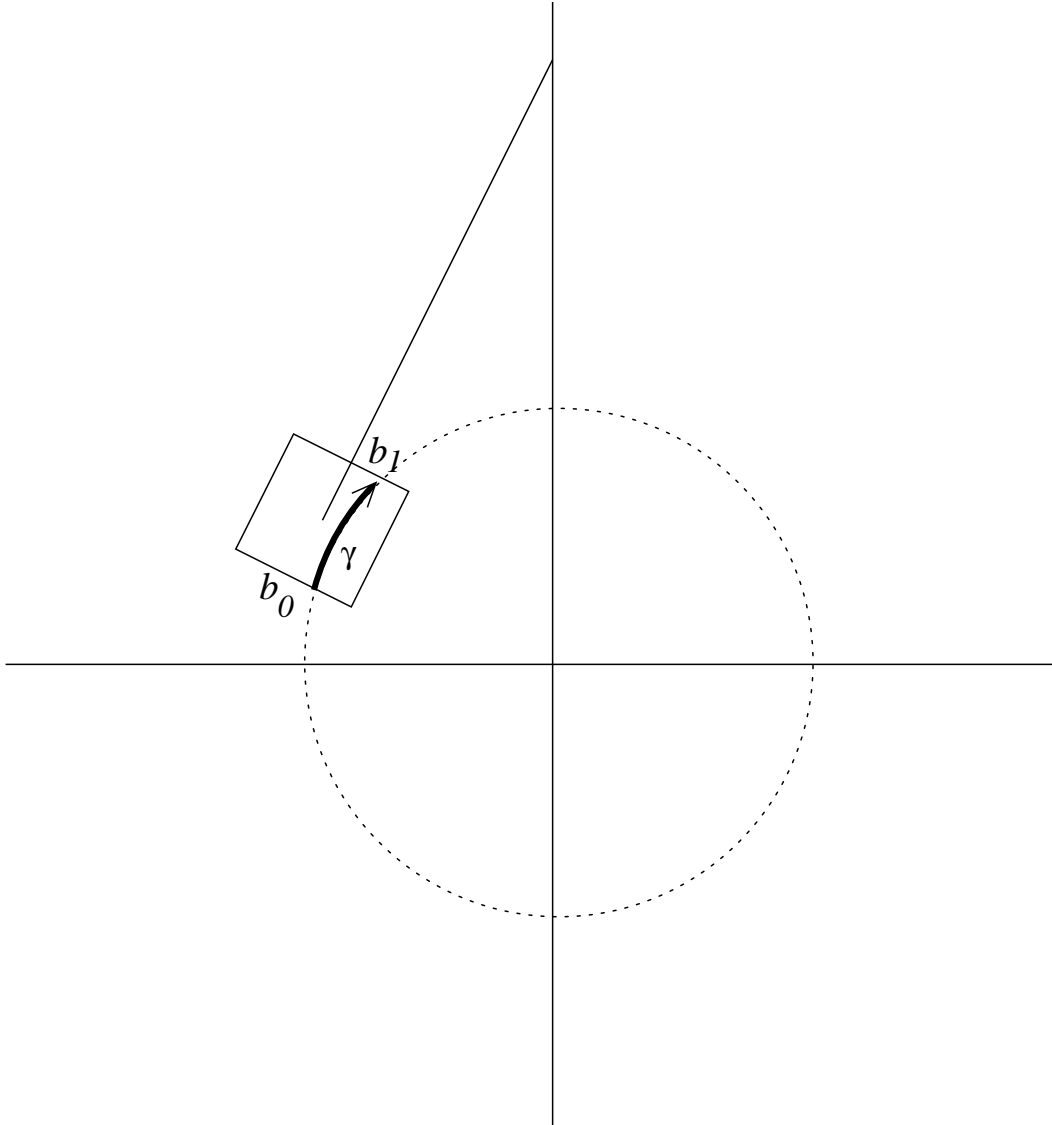


Figura 3.9: Trayectoria de contacto.

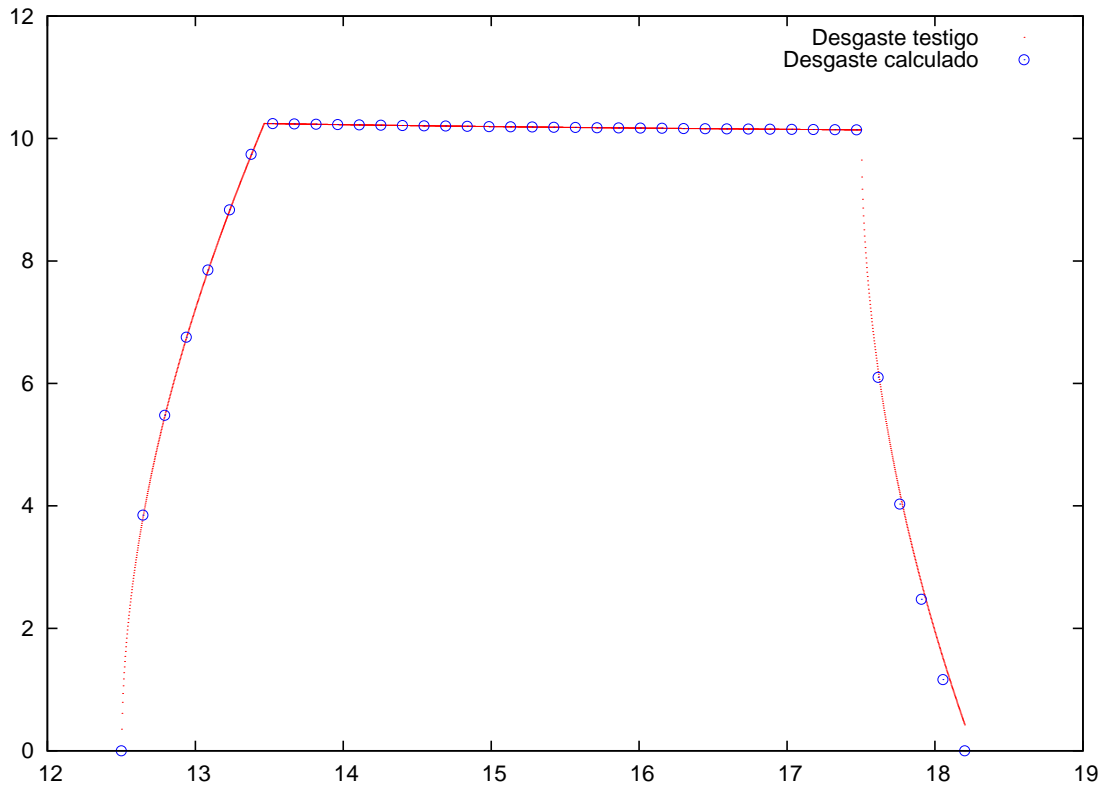


Figura 3.10: En la figura se muestra el desgaste proporcionado por el taller de óptica de la BUAP (desgaste testigo, puntos) y el desgaste resultado del modelo propuesto (círculos con centros punteados).

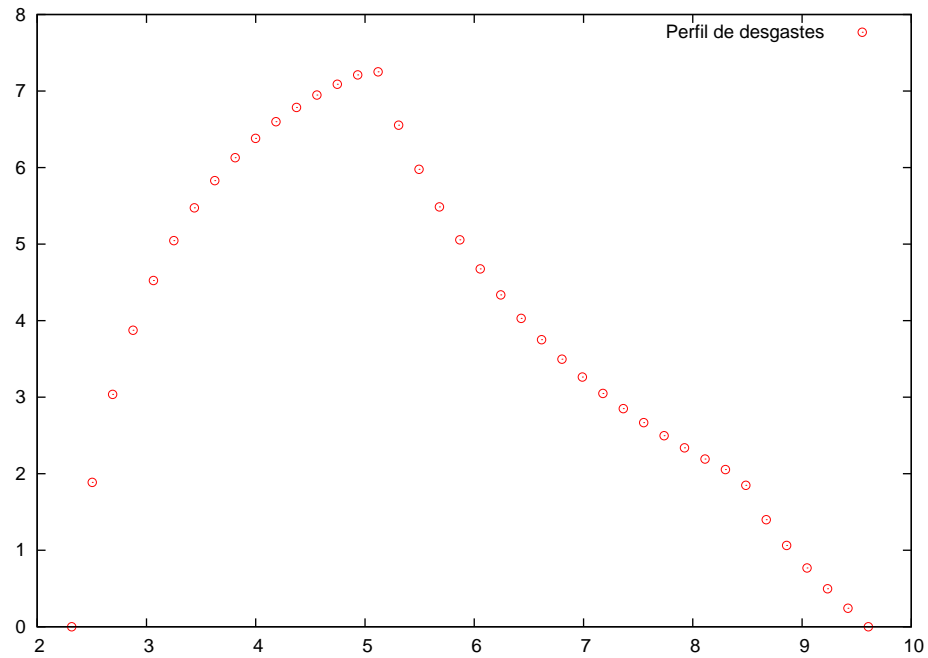


Figura 3.11: Desgaste de una herramienta con excentricidad no nula.

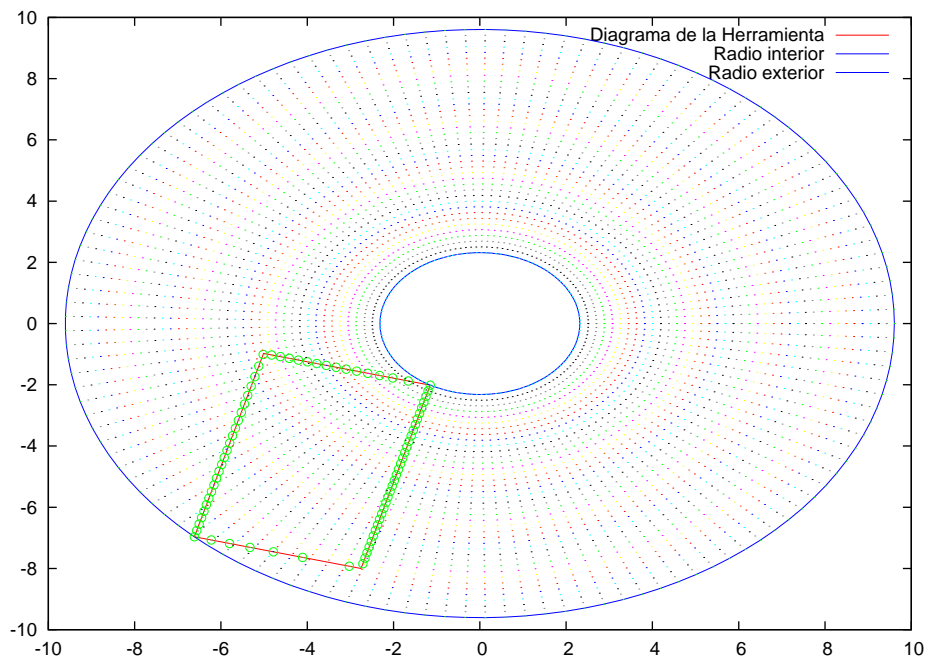


Figura 3.12: Configuración de una herramienta con excentricidad no nula.

Apéndice A

Recorridos de la herramienta

El objetivo de este apéndice es mostrar el funcionamiento del modelo de forma clara, para lo que se incluyen una serie de imágenes que resultan de diferentes configuraciones de variables claves en el modelo.

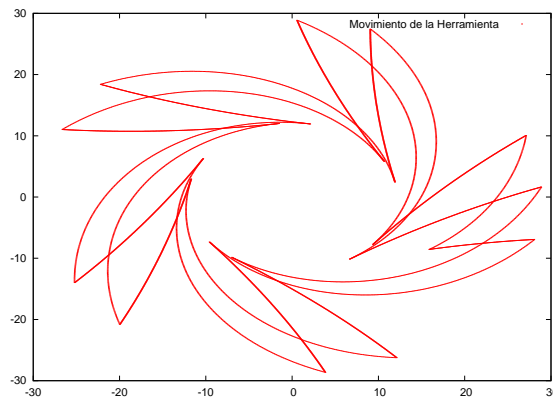


Figura A.1: Recorrido de un punto P sobre la herramienta, sin sincronización y con función de movimiento pendular φ_1 .

APÉNDICE A. RECORRIDOS DE LA HERRAMIENTA

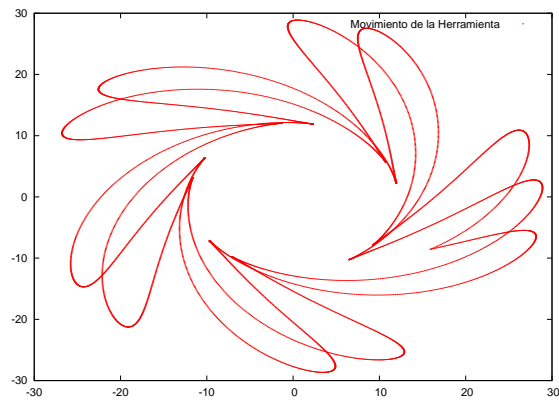


Figura A.2: Recorrido de un punto P sobre la herramienta, sin sincronización y con función de movimiento pendular φ_2 .

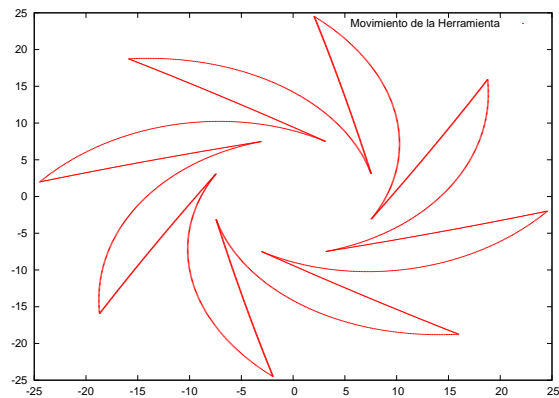


Figura A.3: Recorrido de un punto P sobre la herramienta, con sincronización y con función de movimiento pendular φ_1 .

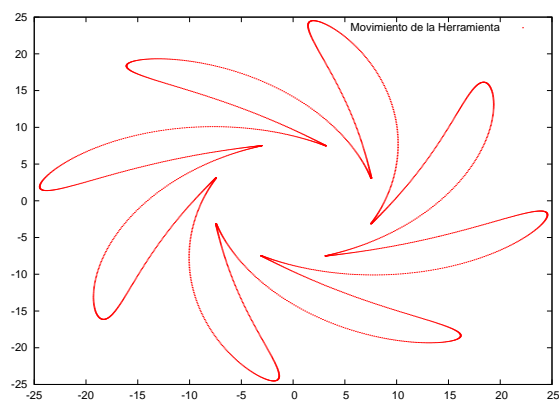


Figura A.4: Recorrido de un punto P sobre la herramienta, con sincronización y con función de movimiento pendular φ_2 .

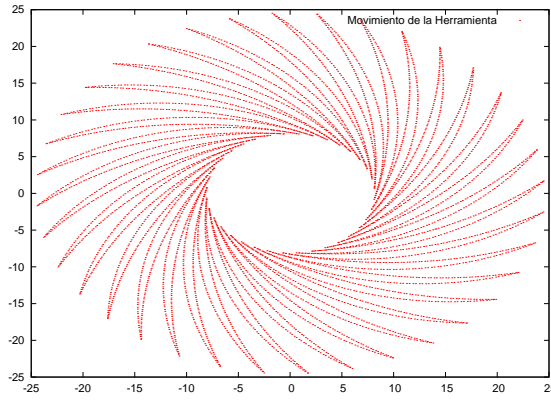


Figura A.5: Recorrido de un punto P sobre la herramienta, con sincronización, con función de movimiento pendular φ_1 y con velocidad promedio k grande.

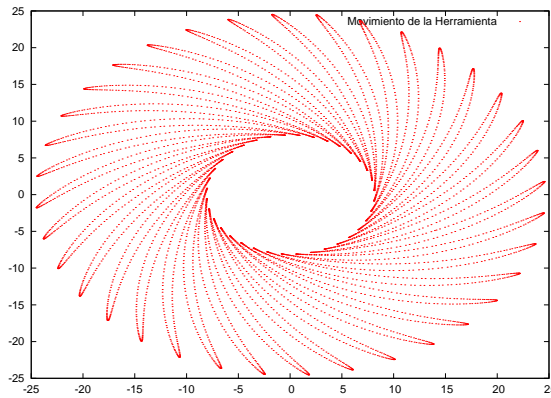


Figura A.6: Recorrido de un punto P sobre la herramienta, con sincronización, con función de movimiento pendular φ_2 y con velocidad promedio k grande.

Apéndice B

Códigos

B.1. Q.m

```
function val=Q(t,w_gvi, dh, dcy, dcx, ex, dcv, k, delta,nfuncion)
    rota_vidrio=exp(i*w_gvi*t);
    theta=atan(dcx/(dh+dcy));
    dp=sqrt((dh+dcy)^2+dcx^2);
    rota_herr=dp*exp(i*( w_gh(t,delta,k,nfuncion)+theta+ex+3*pi/2 ))
        +i*dcv;
    val=rota_vidrio.*rota_herr;
endfunction
```

B.2. derivadaQ.m

```
function val=derivadaQ(t,w_gvi, dh, dcy, dcx, ex, dcv)
    theta=atan(dcx./(dh+dcy));
    dp=sqrt((dh+dcy).^2+dcx.^2);
    val=abs(w_gvi)*
        abs(dp.*exp(i*(theta+ex+3*pi/2))+i*dcv);
endfunction
```

B.3. inter_rect_circ.m

```
function res=inter_rect_circ(qi,qj,r)
    v=chicharronera(abs(qi-qj)^2,
        2*(real(qi*conj(qj))-abs(qj)^2),abs(qj)^2-r^2);
    res=[];
    if (!iscomplex(v(1)))
        if ( (0 <= v(1)) && (v(1) <= 1) )
            res=[res,v(1)];
        endif
        if ( (0 <= v(2)) && (v(2) <= 1) )
            res=[res,v(2)];
        endif
    end
```

```
    endif  
  endif  
endfunction
```

B.4. chicharronera.m

```
function v=chicharronera(a,b,c)  
  if(a ==0)  
    v="no se puede, a = 0  ";  
  else  
    v(1)=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);  
    v(2)=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/(2*a);  
  endif  
endfunction
```

B.5. herramienta.m

```
function [radios,desgastes]=herramienta(h)  
# en esta parte se calculan las posiciones iniciales  
# de las esquinas de la subherramienta  
Q1=Q(0,h.w_gvi,h.dh,h.y(2),h.x(1),h.ex,h.dcv,1,1,0);  
Q2=Q(0,h.w_gvi,h.dh,h.y(1),h.x(1),h.ex,h.dcv,1,1,0);  
Q3=Q(0,h.w_gvi,h.dh,h.y(1),h.x(2),h.ex,h.dcv,1,1,0);  
Q4=Q(0,h.w_gvi,h.dh,h.y(2),h.x(2),h.ex,h.dcv,1,1,0);  
clearplot;  
# en esta parte se grafican la subherramienta  
plot([Q1;Q2;Q3;Q4;Q1],"Diagrama de la Herramienta;");  
# se calcula y grafica el anillo de contacto  
radios=[Q1,Q2,Q3,Q4];  
t=recta_perp(Q1,Q2-Q1)(1);  
if( (0< t) && (t < 1) )  
  radios=[radios,Q1+t*(Q2-Q1)];  
endif  
t=recta_perp(Q2,Q3-Q2)(1);  
if( (0< t) && (t < 1) )  
  radios=[radios,Q2+t*(Q3-Q2)];  
endif  
t=recta_perp(Q3,Q4-Q3)(1);  
if( (0< t) && (t < 1) )  
  radios=[radios,Q3+t*(Q4-Q3)];  
endif  
t=recta_perp(Q4,Q1-Q4)(1);  
if( (0< t) && (t < 1) )  
  radios=[radios,Q1+t*(Q2-Q1)];  
endif
```

```
if (! ishold())
    hold on;
endif
r1=min(abs(radios));
r2=max(abs(radios));
# t=0:0.05:2*pi;
t=linspace(0,2*pi,130);
plot(r1*exp(i*t),"3;Radio interior;");
plot(r2*exp(i*t),"3;Radio exterior;");
# hold off;

#se calculan puntos de contacto dentro los anillos
radios=linspace(r1,r2,40);
desgastes=zeros(size(radios));
indi=1;
for r_i=radios
# r_i=(r1+r2)/2;
    printf("Para el radio %f\n",r_i)
    v1=inter_rect_circ(Q2,Q1,r_i);
    v2=inter_rect_circ(Q3,Q2,r_i);
    v3=inter_rect_circ(Q4,Q3,r_i);
    v4=inter_rect_circ(Q1,Q4,r_i);
    v=[];
    if (! isempty(v1))
        v=[v,(Q2-Q1).*v1+Q1];
    endif
    if (! isempty(v2))
        v=[v,(Q3-Q2).*v2+Q2];
    endif
    if (! isempty(v3))
        v=[v,(Q4-Q3).*v3+Q3];
    endif
    if (! isempty(v4))
        v=[v,(Q1-Q4).*v4+Q4];
    endif
    printf("longitud de v %d \n",length(v));
    printf("puntos en v: ");
    disp(v);
    printf("modulos en v: ");
    disp(abs(v));
    if ( ! isempty(v))
        plot(v,"2*;;")
    endif
    plot(r_i*exp(i*t),".;");
    if (!mod(length(v),2) )
        [s_arg,argumentos]=sort(arg(v));
```

```
v=v(argumentos);
t_integracion=zeros(1,length(v)/2);
for j=1:(length(v)/2)
t_integracion(j)=abs(arg(v(2*j-1)/v(2*j)))/h.w_gvi
desgastes(indi)=desgastes(indi)+
    roemberg_particular(0,t_integracion(j),10,v(2*j),v(2*j-1),h,r_i);
endfor
endif
indi=indi+1;
endfor
hold off;
figure();
plot(radios,desgastes,"*;Perfil de desgastes;")
endfunction
```

B.6. recta_perp.m

```
function [v,b1]=recta_perp(a,b)
# plot(a+(0:0.01:10)*b,";Recta Original;");
b1=exp(i*(arg(b)+pi/2));
# plot((0:0.01:10)*b1,";recta perpendicular;");
v = [real(b),-real(b1);imag(b),imag(b1)] \ [-real(a);-imag(a)];
endfunction
```

B.7. w_ghT.m

```
function val=w_ghT(t,d,k,nfuncion)
t=t+d/k;
if (nfuncion == 0)
    val=zeros(size(t));
endif
if (nfuncion ==1)
    val= mod( 1+floor(k*t/(2*d)), 2 ).*(mod(k*t,2*d)-d)
        +mod(floor(k*t/(2*d)),2).*(d-mod(k*t,2*d));
endif
if (nfuncion ==2)
    val= d*cos(k*pi*t/(2*d)+pi);
endif
endfunction
```

B.8. funcionTrayectoria

```
function val=funcionTrayectoria(t,h,b0,b1,r)
gama=(r*exp(i*(arg(b0)-(h.w_gvi)*t))-i*h.dcv).*exp(-i*h.ex)+i*(h.dh);
val=derivadaQ(0,h.w_gvi, h.dh, imag(gama), real(gama), h.ex, h.dcv);
```

```
endfunction
```

B.9. roemberg_particular.m

```
function val=roemberg_particular(a,b,n,b0,b1,hr,r)
    f="funcionTrayectoria";
    h=b-a;
    R=zeros(2,n);
    R(1,1)=h*(feval(f,a,hr,b0,b1,r)+feval(f,b,hr,b0,b1,r))/2;
    # disp(R(1,1))
    for i=2:n
        k=1:(2^(i-2));
        R(2,1)=1/2*(R(1,1)+h*sum(feval(f,a+h*(k-0.5),hr,b0,b1,r)));
        for j=2:i
            R(2,j)=(4^(j-1)*R(2,j-1)-R(1,j-1))/(4^(j-1)-1);
        endfor
    # disp(R(2,1:i));
        h=h/2;
        R(1,1:i)=R(2,1:i);
    endfor
    val=R(2,n);
endfunction
```


Conclusiones

Este trabajo presenta una modelación matemática de un problema de pulido de superficies a través de un enfoque que da importancia a detalles concernientes a la descripción del movimiento de la herramienta. Es particularmente gratificante tener la oportunidad de utilizar varios cursos de la carrera de Matemáticas Aplicadas tales como: algebra lineal, variable compleja, análisis numérico, análisis matemático, teoría de la medida, etcétera, en la resolución del problema descrito y poder presentar resultados congruentes con los calculados y comprobados experimentalmente en el taller de óptica de la BUAP.

Se considera especialmente importante el hecho de que el modelo propuesto aún tiene posibilidades de ser extendido en sus resultados, esto debido entre otras cosas a que se desarrolla considerando una función arbitraria de movimiento pendular ω_{gh} , lo cual es un reflejo de la calidad del trabajo de modelado. Por otra parte, respecto a la implementación de los algoritmos para la aproximación de la integral de la ecuación de Preston, nos alejamos en cierta medida del esquema de Hall y Porsching [2] al determinar las trayectorias de contacto a lo largo de las cuales se integra, por lo que hay razones para pensar que en trabajos posteriores se pueden encontrar resultados incluso más interesantes al continuar con el esquema de trayectorias de contacto.

Por último cabe resaltar que en este trabajo se ha modelado el desgaste producido por cada subherramienta, sin importar su posición sobre el vidrio, para el caso donde no hay movimiento pendular del brazo de la herramienta. Aunque esto parece muy particular, sin embargo debe destacarse que con el nuevo modelo propuesto en esta tesis es posible modelar el desgaste de una herramienta rectangular rotada; ésto a su vez permitirá el modelaje de una herramienta en un movimiento pendular ya que en este caso la herramienta se traslada y rota simultáneamente. Por otro lado, el aparato matemático involucrado en el modelo tiene robustez suficiente y puede servir como plataforma para determinar la geometría de contacto, así como las funciones base y sus características en el caso general, en estudios posteriores. En comparación con el trabajo de Hall y Porsching [2] se puede esperar que un análisis mediante aproximación de funciones pueda proveer de cotas para la aproximación en función ya no de tiempos de estancia sino de las presiones ejercidas en cada subherramienta y de las dimensiones de las mismas.

Bibliografía

- [1] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1979.
- [2] C. A. Hall, T. A. Porsching. *Approximation Methods in CNC fabrication of Optical Surfaces, Part1:Finite Dimensional Material Removal Profile Spaces*, IMA Journal of Numerical Analysis, 67–84, 1995.
- [3] T. Korhonen and T. Lappalainen *Computer controlled figuring and testing*, SPIE Advanced Technology Optical Telescopes IV, 2(1):691–695, 1990.
- [4] A. Cordero-Dávila, L. Téllez-Arriaga, J. González-Gracia et al. *Calculating subtool pressures by using genetic algorithms*, Applied Optical.
- [5] F. W. Preston. *The theory and design of plate glass polishing machines*, J. Soc. Glass Tech, **11**, 214.
- [6] G. Grätzner. *Math into L^AT_EX*. Springer, Birkhäuser, 2000.
- [7] R. L. Graham, D. E. Knuth, E. O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley publishing co., 1995.
- [8] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, 1976.
- [9] R. L. Burden, F. J. Douglas, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial Iberoamerica, 1993
- [10] Irce Leal Cabrera, *Problema inverso en el pulido de superficies ópticas*, Tesis de maestría, 2005.
- [11] A. Cordero-Dávila, V. Cabrera-Peláez, J. Cuautle-Cortés, J. Gonzales-García, et al. *Experimental results and wear predictions of petal tools that freely rotate*, Appl. Opt. **44**, 1434-1441, 2005.
- [12] A. P. Bogdanov, *Optimizing the technological process of automated grinding and polishing of high-precision large optical elements with a small tool*, Opt-Mekh, 1985.
- [13] J. González-García, A. cordero-Dávila, et al, *Calculating petal tools using genetic algorithms*, Appl. Opt. **45**, 2006
- [14] A. Santiago-Alvarado, J. González-García, C. Castañeda-Roldan, A. Cordero-Dávila, et al, *Use of linear programming to calculate dwell times for the design of petal tools*, Appl. Opt., 2007.