



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

**CONEXIDAD DIFUSA Y
SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES
DIGITALES**

TESIS:

PARA OBTENER EL TÍTULO DE
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
APLICADAS**

PRESENTA:

ARISTEO GUTIÉRREZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M.C. ADOLFO MACEDA MÉNDEZ

HUAJUAPÁN DE LEÓN, OAXACA.
JULIO DE 2008

Con dedicatoria especial:
a mi querida madre
Paulina Hernández Gutiérrez;
jamás terminaré de agradecer a Dios
que me haya concedido ser tu hijo,
y a las que han sabido ser
mucho mas que sólo hermanas,
Beatriz, Leticia, Bibiana y Aurora;
porque ustedes han procurado
mi felicidad antes que la suya.
Todas ustedes me fortalecen
y me inspiran a ser mejor.

Prefacio

El uso de las imágenes digitales se ha extendido a un gran número de campos de la vida diaria, desde los avanzados análisis geográficos y satelitales, hasta el entretenimiento casero, el arte, la industria del diseño y los ambientes de desarrollo médico.

La popularidad y el uso masivo de dispositivos que permiten realizar la captura de imágenes a bajo costo, nos ofrece la posibilidad de acumular grandes volúmenes de información visual. En particular, el área médica tiene diferentes dispositivos para la captura de imágenes, las cuales corresponden a radiografías, tomografías computarizadas, resonancias magnéticas, ecografías, fotografías dentales, microscopías, etc. La gran cantidad de información visual generada con el uso de estos dispositivos hace que este material sea inutilizado si no se tiene un control riguroso sobre el contenido de cada imagen digital.

Los siguientes son ejemplos de problemas de análisis de imágenes:

Dado un texto, reconocer las palabras.

Dada una imagen aérea de un terreno, clasificar los distintos tipos de suelos (urbano, bosque, lagos, carreteras,...)

Dada una imagen de un conjunto de células, clasificarlas por tamaño, forma, etc.

Dada una imagen médica, detectar tumores, roturas de huesos, etc.

En todos estos ejemplos, el análisis se refiere a la detección de determinadas partes de la imagen (regiones u objetos). Para generar tal descripción es necesario segmentar adecuadamente la imagen e identificar la región deseada. En la presente tesis damos una solución a este problema mediante procedimientos de extracción de objetos en una imagen, utilizando una técnica conocida como segmentación por crecimiento de regiones, y apoyándonos fuertemente en el uso de la matemática difusa (teoría difusa), particularmente en las relaciones difusas y la conexidad difusa.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se introduce la noción de conjuntos difusos como consecuencia de la evolución del concepto de la incertidumbre, se muestra la utilidad que esta tiene en cuestiones de aplicación y finalmente se expone la necesidad de definir las regiones u objetos de una imagen en el campo difuso.

En el capítulo 2 se presentan algunos conceptos básicos sobre imágenes digitales, se da una breve noción de la topología digital mediante la definición de adyacencias y conexidades entre píxeles. Posteriormente se definen algunos conceptos sobre imágenes binarias y por último se exponen las técnicas de segmentación más importantes, comentando de manera más amplia la segmentación por crecimiento de regiones, método en el que se basan los algoritmos expuestos en la presente tesis.

En la primera parte del capítulo 3 se presentan algunos conceptos y operaciones básicas sobre conjuntos rígidos, después se introducen conceptos de conjuntos difusos y se dan algunos ejemplos concretos para tener una mejor comprensión de ellos, además se exponen algunos tipos diferentes de conjuntos difusos. Enseguida se generalizan las operaciones básicas sobre conjuntos rígidos, para realizar sobre conjuntos difusos, principalmente la unión, intersección y el complemento, y por último se introduce el concepto de relación difusa que es tan importante para la definición de un objeto difuso.

En el capítulo 4, que es de vital importancia para la presente tesis, se comentan algunas cuestiones de las imágenes digitales que motivan la definición de conexidad difusa, se muestran los conceptos de adyacencia y afinidad difusa de elementos del espacio. También se definen los escenarios de membresía y los espacios digitales difusos, y se introducen los conceptos de Segmentación y Clasificación sobre un escenario. Posteriormente se definen las componentes y los objetos difusos y finalmente se enuncian los resultados que nos ayudarán a tratar con los problemas de complejidad combinatoria motivadas por las definiciones anteriores.

En el capítulo 5 se presentan los algoritmos de extracción de objetos difusos $\kappa\theta_xFOE$ y κFOE , así como el algoritmo de etiquetado de objetos difusos $\kappa\theta_xFOL$. Antes de esto se exponen el método de programación dinámica y el algoritmo de Floyd-Warshall que está basado en esta técnica, puesto que los algoritmos de extracción y etiquetado se basan en estos dos últimos.

En el capítulo 6 se muestran las aplicaciones de la teoría y los algoritmos. En primer lugar se sugieren algunas formas apropiadas para la adyacencia difusa de spels α , así como de la afinidad difusa de spels κ , posteriormente se mencionan las ventajas que se obtienen al aplicar Segmentación y Clasificación sobre el escenario arrojado por los algoritmos anteriores, y por último se muestran una serie de imágenes, en su mayoría médicas, sobre las cuales se han aplicado los algoritmos.

Aprovecho este apartado para expresarle a mi director de tesis, M.C. Adolfo Maceda Méndez, mi agradecimiento por la dedicación y paciencia que tuvo conmigo en el desarrollo de este trabajo, y por las interesantes clases que me impartió a lo largo de la carrera. Mi agradecimiento también al M.C José Margarito Hernández Morales, por sus valiosas observaciones y por haberme ayudado a terminar el trabajo en el tiempo planeado, a la Dra. Virginia Berrón Lara, por sus valiosos comentarios y sugerencias que ayudaron a enriquecer este trabajo, así como por el interés mostrado en el mismo, a la M.C. Verónica Borja Macías, por el apoyo en la escritura y redacción de este trabajo, y también por las infinitas clases que me impartió, su amplio conocimiento me motiva a superarme día con día.

Índice general

Prefacio	III
1. Introducción.	1
1.1. Incertidumbre	1
1.2. Naturaleza de las imágenes digitales	6
2. Imágenes Digitales	9
2.1. Representación Digital de imágenes	9
2.2. Conexidad entre Píxeles	10
2.3. Imágenes Binarias	11
2.4. Segmentación de Imágenes Digitales	11
2.4.1. Segmentación por crecimiento de regiones.	12
3. Conjuntos Difusos	15
3.1. Conjuntos Rígidos	15
3.2. Conjuntos Difusos: tipos y conceptos básicos	17
3.3. Operaciones Básicas.	26
3.4. Relaciones Difusas.	27
4. Conexidad Difusa	33
4.1. Características de las imágenes	34
4.2. Spels, Adyacencia difusa y Espacio digital difuso.	34
4.3. Escenarios, Clasificación y Segmentación.	35
4.4. Afinidades de spels difusos.	36
4.5. Caminos, Redes difusas.	37
4.6. Conexidad Difusa y Relaciones Binarias.	38
4.7. Componentes y Objetos difusos.	40
4.8. Propiedades de los objetos difusos	41
5. Algoritmos de Segmentación	45
5.1. Programación Dinámica	45
5.2. Algoritmo de Floyd-Warshall	47
5.3. Extracción de Objetos Difusos (FOE).	51
5.4. Etiquetado de Objetos Difusos (FOL).	54

6. Aplicaciones	57
6.1. Selección de Adyacencias y Afinidades de spels difusos.	57
6.2. Segmentación y Clasificación	58
6.3. Resultados	58
6.3.1. Ejemplo1.- Múltiple Esclerosis	60
6.3.2. Ejemplo2.- Resonancia Magnética del cerebro	63
6.3.3. Ejemplo3.- Rayos x: Codo	66
6.3.4. Ejemplo4.- Cebra	69
A. Apartado de Códigos	73
Conclusiones	79
Bibliografía	81

Capítulo 1

Introducción.

Es bastante cierto que los miembros de la comunidad científica se esmeran día a día por excluir la incertidumbre en sus cálculos, sin embargo, esto no se ha podido evitar totalmente. De hecho, para poder lograr un conocimiento más preciso, generalmente se tienen que acotar las condiciones del problema, renunciando así al sueño de poder estudiar al problema en su totalidad.

En este capítulo se muestra un escenario sobre el cambio que ha tenido el concepto de la incertidumbre, así como la gran utilidad que ofrece en la descripción de modelos hechos por el hombre. Posteriormente se da una pequeña introducción sobre su representación matemática a través de conjuntos difusos y finalmente se expone la relación que existe entre los conjuntos difusos y la naturaleza de las imágenes digitales.

1.1. Incertidumbre

Entre varios cambios de paradigma en la ciencia y las matemáticas en este siglo, uno de ellos concierne al concepto de *incertidumbre*. En la ciencia, esto ha sido manifestado por una transición gradual del punto de vista tradicional, el cual insiste en que la incertidumbre es indeseable en la ciencia y por tanto debería ser evitado por todos los medios posibles, al punto de vista alternativo, el cual es tolerante a la incertidumbre e insiste en que la ciencia no lo puede evitar. De acuerdo al punto de vista tradicional, la ciencia debería esforzarse por la certidumbre en todas sus manifestaciones (precisión, especificidad, consistencia, etc.); por tanto, la incertidumbre (imprecisión, ambigüedad, inconsistencia, etc.) tiene un carácter no científico. De acuerdo al punto de vista alternativo (o moderno), la incertidumbre se considera esencial para la ciencia, puesto que no sólo es una plaga inevitable, sino por el contrario, tiene una gran utilidad.

El primer escenario de la transición del punto de vista tradicional al punto de vista moderno de la incertidumbre comienza a fines del siglo XIX, cuando los físicos empiezan a preocuparse por los procesos a nivel molecular. Aunque las leyes de la

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.

1.1. INCERTIDUMBRE

mecánica Newtoniana fueron relevantes para el estudio de estos procesos, su aplicación real al enorme número de entidades implicadas en un problema han resultado en demandas computacionales que van más allá de las capacidades tecnológicas existentes y, como lo podemos ver ahora, exceden incluso los límites. Esto es, estas leyes precisas no pueden ser aplicadas en este dominio, no sólo en la práctica (basados en la tecnología existente) sino tampoco en los principios.

La necesidad de un enfoque totalmente diferente para el estudio de estos procesos físicos a nivel molecular ha permitido el desarrollo de métodos estadísticos relevantes, los cuales pueden ser aplicables no sólo al estudio de procesos moleculares (mecánica estadística), sino también a otras áreas tales como la actuaría, el diseño de centrales telefónicas grandes y áreas relacionadas. En los métodos estadísticos, las manifestaciones específicas de entidades microscópicas (moléculas, celulares, etc.) son reemplazados por sus promedios estadísticos, los cuales están conectados con variables macroscópicas apropiadas. El papel que juega el cálculo en la mecánica Newtoniana, es reemplazado en la mecánica estadística por la *teoría de la probabilidad*, cuyo propósito es modelar la incertidumbre de un cierto tipo.

Mientras que los métodos analíticos basados en el cálculo son aplicables sólo a problemas que envuelven un número muy pequeño de variables que están relacionadas entre sí de una forma predecible, la aplicabilidad de los métodos estadísticos tienen características totalmente opuestas: ellos requieren un número muy grande de variables y un grado muy alto de aleatoriedad. Éstos dos tipos de métodos son complementarios. Cuando uno tiene éxito, el otro falla totalmente. Debido a este carácter complementario, estos tipos de métodos cubren, desafortunadamente, sólo problemas que están cercanos a estos dos extremos de complejidad y aleatoriedad. En su famoso artículo, Warren Weaver [10] se refiere a ellos como problemas de *simplicidad organizada* y *complejidad desorganizada*. Él argumenta que estos tipos de problemas representan una fracción muy pequeña de todos los problemas del sistema. La mayoría de los problemas están ubicadas entre estos dos extremos: dichos problemas envuelven sistemas no lineales con un número grande de componentes y una gran interacción entre ellas, los cuales generalmente, son no-determinísticos, pero no como un resultado de la aleatoriedad, que podría producir promedios estadísticos significativos. Weaver los llamó problemas de *complejidad organizada*; y son típicos en las ciencias de la vida, en las ciencias del conocimiento, en las ciencias sociales y en las ciencias ambientales, así como en los campos aplicados tales como la tecnología moderna o la medicina.

El desarrollo de la tecnología computacional en la Segunda Guerra Mundial hizo posible el tratamiento de problemas complejos, algunos de los cuales pertenecían al campo de los problemas de complejidad organizada. Inicialmente, la mayoría de los científicos creía que el nivel de complejidad que nosotros podemos manejar, es básicamente un problema del nivel de potencia computacional de nuestros dispositivos. Mas tarde, a principios de 1960, esta creencia fue reemplazada por una observación mucho más realista. Comenzamos a entender que hay límites definidos en el tratamiento de la complejidad, que no pueden ser superadas ya sea por nuestras

capacidades humanas o por la tecnología computacional. Uno de tales límites fué determinado por Hans Bremermann [3], mediante consideraciones simples de la teoría cuántica. El límite es expresado mediante la siguiente proposición: "Ningún sistema de procesamiento de datos, ya sea artificial o viviente, puede procesar más de 2×10^{47} bits por segundo por gramo de su masa". Procesar un cierto número de bits significa, en ésta afirmación, transmitir varios bits por uno o mas canales en el sistema de cómputo. Usando el límite de procesamiento de información obtenido por un gramo de masa y un segundo del tiempo de procesamiento, Bremermann calculó el número total de bits procesados por una computadora hipotética del tamaño de la Tierra en un periodo igual a la edad estimada de la Tierra. Esta computadora imaginaria no puede procesar más de 10^{93} bits. Este último número es generalmente conocido como el *límite de Bremermann* y los problemas que requieren procesar más de 10^{93} bits de información son llamados *problemas transcomputacionales*. Efectivamente, muchos problemas que tratan con sistemas, incluso de tamaños más moderados, exceden el límite en la demanda de procesamiento de su información. La naturaleza de estos problemas ha sido extensamente estudiada en un área referida como *teoría de la complejidad computacional*, la cual surgió en los 60 como una rama de la teoría general de algoritmos.

El reto principal en el tratamiento de los problemas de complejidad organizada se reduce fundamentalmente a una pregunta: ¿Cómo tratar con los sistemas y problemas asociados cuya complejidad va mas allá de nuestro límite de procesamiento de la información?, esto es, ¿Cómo podemos tratar con estos problemas si la potencia computacional no es suficiente?.

En general, tratamos con problemas en términos de sistemas que son construidos como modelos de algunos aspectos de la realidad o algunos objetos deseables hechos por el hombre. El propósito de construir modelos de cierto tipo, es entender algún fenómeno de la realidad, ya sea natural o hecho por el hombre, haciendo predicciones o reconstrucciones adecuadas, aprendiendo a controlar el fenómeno en alguna forma deseable, y utilizando todas estas capacidades para varios fines. En la construcción de un modelo, siempre intentamos maximizar su utilidad. Este objetivo está directamente conectado con la relación que existe entre tres características importantes de cada modelo del sistema: *complejidad, credibilidad e incertidumbre*. Esta relación no ha sido aún completamente entendida. Nosotros sólo sabemos que la incertidumbre juega un papel primordial en cualquier intento por maximizar la utilidad del modelo del sistema. Aunque generalmente (pero no siempre) es indeseable cuando se considera aisladamente, la incertidumbre adquiere una importancia enorme cuando se considera en conexión con otras características del modelo del sistema: en general, el hecho de permitir mayor incertidumbre tiende a reducir la complejidad y aumenta la credibilidad del modelo resultante. Nuestro reto en la modelación del sistema, es desarrollar métodos para los cuales un nivel óptimo de incertidumbre permitido pueda ser estimado para cada modelo del problema.

La incertidumbre es, por tanto, una comodidad importante en cuestión de modelamiento, y puede ser utilizada para mejorar otras características esenciales del siste-

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.

1.1. INCERTIDUMBRE

ma. Este hecho puede ser utilizado para construir modelos que sean maximalmente útiles con respecto al propósito para el cual fueron construidos. Un reconocimiento de este importante papel de la incertidumbre, hecho por algunos investigadores, el cual se hace explícito en la literatura de los años 60, da comienzo al segundo escenario de la transición del punto de vista tradicional al punto de vista moderno de la incertidumbre. Este escenario está caracterizado por el surgimiento de varias teorías nuevas de la incertidumbre, distintas de la teoría de la probabilidad. Estas teorías retan la conexión aparentemente única entre la incertidumbre y la teoría de la probabilidad, la cual había sido previamente aceptada por la comunidad científica. Estas teorías mostraron que la teoría de la probabilidad es capaz de representar sólo uno de los distintos tipos de incertidumbre.

Es generalmente aceptado que un punto importante en la evolución del concepto moderno de la incertidumbre fue la publicación de un artículo fundamental hecho por Lotfi A. Zadeh [11], incluso algunas ideas presentadas en el artículo fueron expuestas 30 años antes por el filósofo americano Max Black [2]. En su artículo, Zadeh introduce una teoría cuyos objetos -*conjuntos difusos*- son conjuntos con fronteras imprecisas. La membresía en un conjunto difuso no es una cuestión de afirmación o negación, mas bien, es un problema de *grado*.

La importancia del artículo de Zadeh fue que retó no sólo a la teoría de la probabilidad como único agente de la incertidumbre, sino también al aspecto fundamental sobre el cual la teoría de la probabilidad está basada: la lógica bivaluada de Aristóteles. Cuando A es un conjunto difuso y x es un objeto que cumple con el concepto que representa el conjunto, la proposición " x es un miembro de A ", no es necesariamente cierta o falsa, como es requerido por la lógica bivaluada, sin embargo, puede ser cierto en algún grado, el grado para el cual x es realmente un miembro de A . Es muy común, aunque no necesario, expresar los grados de membresía de los conjuntos difusos, así como los grados de verdad de la proposición asociada, por números en el intervalo cerrado $[0, 1]$. Los valores de los extremos en este intervalo, 0 y 1, representan respectivamente la negación y afirmación total de la membresía en un conjunto difuso dado, así como la falsedad y veracidad de las proposiciones asociadas.

La capacidad de los conjuntos difusos para expresar transiciones graduales de membresía tiene una amplia utilidad, ya que ésta nos provee no sólo una representación potente y significativa de la medida de la incertidumbre, sino también una representación significativa del concepto de ambigüedad expresado en lenguaje natural. Por ejemplo, en vez de describir el tiempo de hoy en términos del porcentaje exacto de cubierta de nubes, podríamos decir solamente que está soleado. Mientras que la última descripción es vaga y menos específica, generalmente es más usual. A fin de que un término tal como *soleado* logre la introducción deseada de ambigüedad, no podemos sin embargo, usarlo para indicar precisamente 0% de cubierta nublada. Su significado no es totalmente arbitrario, sin embargo; una cubierta nublada del 100% no es soleado, así como tampoco lo es una cubierta del 80%. Podemos aceptar ciertos estados intermedios, tales como 10% o 20% de cubierta nublada, como

soleado. Pero ¿donde trazamos la línea de separación?, si por ejemplo, cualquier cubierta nublada de 25 % o menos es considerado soleado, ¿esto significa que una cubierta nublada de 26 % no lo es?. Claramente esto es inaceptable, dado que 1 % de cubierta nublada difícilmente parece una característica distinguible entre soleado y no soleado. Podríamos por tanto, agregar un criterio de que cualquier monto de cubierta nublada 1 % mayor que una cubierta nublada ya considerada como soleada (esto es, 25 % o menos) sea también etiquetada como soleada. Podemos ver, sin embargo, que esta definición eventualmente nos permite aceptar todos los grados de cubierta nublada como soleado, sin importar, cuan oscuro parezca el cielo. A fin de resolver esta paradoja, el término *soleado* puede introducir ambigüedad permitiendo algún ordenamiento de la transición gradual de grados de cubierta nublada que son consideradas como soleadas y aquellos que no lo son. Este es de hecho, el concepto básico de los *conjuntos difusos*, un concepto que es tanto amplio como intuitivo y que forma, en esencia, una generalización de los conjuntos clásicos o *conjuntos rígidos*.

Un conjunto rígido es definido de tal forma que clasifica a los elementos del conjunto universo en cuestión en dos grupos: miembros (aquellos que ciertamente pertenecen al conjunto) y no miembros (aquellos que ciertamente no pertenecen). Existe una clara distinción entre los miembros del conjunto y los que no lo son. Sin embargo, muchos conceptos de clasificación que comúnmente empleamos y expresamos en lenguaje natural describen conjuntos que no exhiben esta característica. Algunos ejemplos son: el conjunto de las personas altas, el conjunto de los carros caros, el conjunto de las enfermedades altamente contagiosas, el conjunto de números mucho más grandes que uno, o los días soleados. Podemos percibir que estos conjuntos tienen fronteras imprecisas que facilitan transiciones graduales de membresía.

Un conjunto difuso puede ser definido matemáticamente asignando a cada posible individuo del conjunto universo en cuestión un valor que representa su grado de pertenencia al conjunto difuso. Este grado corresponde al grado para el cual dicho individuo es similar o compatible con el concepto representado por el conjunto difuso. Por tanto, los individuos pueden pertenecer al conjunto difuso en un grado mayor o menor de acuerdo al valor grande o pequeño de su membresía. Como ya lo hemos mencionado anteriormente, estos grados de membresía generalmente son representados por números reales que están dentro del intervalo cerrado unitario $[0, 1]$. Por tanto, un conjunto difuso representando nuestro concepto de día soleado puede asignar un grado de membresía de 1 a una cubierta nublada de 0 %, 0.8 a una cubierta nublada de 20 %, 0.4 a una cubierta nublada de 30 %, y 0 a una cubierta nublada de 75 %. Estos valores representan el grado en el que cada porcentaje de cubierta nublada aproxima nuestro concepto subjetivo de *día soleado*, y el conjunto por sí mismo, modela la flexibilidad semántica inherente en un término lingüístico común. Dado que la pertenencia y la ausencia total en el conjunto difuso pueden todavía ser indicados por los valores 1 y 0 respectivamente, podemos considerar el concepto de conjunto rígido como un caso particular del concepto mucho más general de conjunto difuso, para el cual únicamente estos dos grados de membresía son permitidos.

Las investigaciones en la teoría de los conjuntos difusos ha ido creciendo rápidamente desde la introducción de la teoría en la mitad de los años 60. El conjunto de conceptos y resultados pertenecientes a la teoría es ahora bastante impresionante. Las investigaciones sobre la amplia variedad de aplicaciones han sido también muy activas y han producido resultados que son incluso más impresionantes (para efectos de ilustración véase [6]).

1.2. Naturaleza de las imágenes digitales

Las imágenes son por naturaleza de carácter difuso debido a sus inexactitudes inherentes, por ejemplo, la mayoría de los objetos que se capturan en las imágenes son de tercera dimensión y por ello al capturarlos en una imagen bidimensional estamos perdiendo información. Por otro lado, como se comenta en el siguiente capítulo, una imagen digital es una discretización de una imagen monocroma, en este procedimiento se pierden muchos elementos. El grado de las inexactitudes depende de varios factores incluyendo limitaciones en espacio, tiempo y resoluciones paramétricas y otras limitaciones físicas del dispositivo. Las aproximaciones hechas para obtener una información más exacta de la extracción de los objetos de la imagen deberían tratar de utilizar el carácter difuso y definir los conjuntos difusos correspondientes tan precisos como sea posible. Anteriormente las investigaciones referentes a la segmentación de imágenes hacían muy poco uso de la relación que existe entre los elementos de la imagen a través de conexiones difusas. La mayoría trabajaba directamente sobre los valores de los elementos de la imagen sin tomar en cuenta la relación que existe entre éstas.

Si un objeto de interés tiene patrones de intensidad que lo diferencian fácilmente de los otros objetos de la imagen, casi siempre es posible segmentar el objeto en una imagen binaria. Sin embargo, en la gran mayoría de los casos, esto no siempre es posible. La noción de un objeto debería ser definida formalmente en el contexto difuso, esto con la finalidad de facilitar operaciones que puedan manejar inexactitudes de datos más allá de la mera visualización para la segmentación, manipulación y análisis de objetos.

Las nociones de objeto difuso y de conexidad difusa tienen implicaciones significativas en la segmentación de imágenes. Las principales dificultades encontradas en el diseño de algoritmos efectivos de segmentación se atribuyen generalmente a la ausencia de transiciones graduales, que permitan distinguir entre regiones que son del objeto de aquellos que no lo son. La flexibilidad producida por la conexidad difusa facilita estos requerimientos, mediante la construcción de “componentes conexos difusos”, una alternativa calculable para la noción de un objeto.

En este trabajo presentamos una teoría de objetos difusos para espacios digitales de dimensión n , basados en la noción de conexidad difusa sobre los elementos de la imagen. Aunque las definiciones presentadas dan lugar a problemas de una enorme complejidad combinatoria, los resultados teóricos nos permiten reducir esto

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.

1.2. NATURALEZA DE LAS IMÁGENES DIGITALES

drásticamente, lo que conduce a algoritmos prácticos para la extracción de objetos difusos. También presentamos algoritmos para extraer un objeto difuso particular y para identificar todos los objetos difusos presentes en la imagen en cuestión. Finalmente mostramos la utilidad de la teoría y los algoritmos en la segmentación de imágenes basados en algunos ejemplos prácticos, la mayoría extraídos de imágenes médicas.

Capítulo 2

Imágenes Digitales

En este capítulo describimos algunos aspectos básicos sobre las imágenes digitales así como de su representación computacional. Enseguida presentamos algunos conceptos básicos de topología digital, tales como adyacencia, conexidad y componentes conexas entre píxeles. También introducimos algunas nociones básicas sobre las imágenes binarias y por último hacemos una breve discusión sobre las técnicas de segmentación de imágenes, y sobre el método que se ha adoptado para el desarrollo de este trabajo.

2.1. Representación Digital de imágenes

El término *imagen monocroma* o simplemente *imagen* se refiere a una función bidimensional de intensidad de luz $f(x, y)$, donde x e y representan las coordenadas espaciales y el valor de f en un punto cualquiera (x, y) , es proporcional al brillo (o *nivel de gris*) de la imagen en ese punto.

Una *imagen digital* es una imagen $f(x, y)$ que se ha discretizado tanto en las coordenadas espaciales como en el brillo. Una imagen digital puede considerarse como una matriz cuyos índices de fila y columna identifican un punto de la imagen y el valor correspondiente de la matriz indica el nivel de gris en ese punto. Los elementos de una distribución digital de este tipo se denominan *elementos de la imagen*, o más comúnmente *píxeles*.

A la intensidad de una imagen monocromática f en las coordenadas (x, y) se le denominará *nivel de gris* (l) de la imagen en ese punto. El valor de l se encuentra dentro del rango:

$$0 \leq L_{\text{mín}} \leq l \leq L_{\text{máx}} < \infty$$

donde $L_{\text{mín}}$ es no negativo y $L_{\text{máx}}$ es finito. El intervalo $[L_{\text{mín}}, L_{\text{máx}}]$ se denomina *escala de grises*. En la práctica, así como en el presente trabajo, se toma el intervalo $[L_{\text{mín}}, L_{\text{máx}}] = [0, 255]$, donde el valor 0 representa el color negro y 255 representa el color blanco. Todos los valores intermedios son tonos de gris que van degradándose de forma continua entre el negro y el blanco.

2.2. Conexidad entre Píxeles

La conexidad entre píxeles es un concepto importante empleado para establecer los límites de los objetos y los componentes de áreas en una imagen. Para determinar si dos píxeles están conectados, debe determinarse si son adyacentes en algún sentido y si sus niveles de gris cumplen un criterio especificado de similitud.

Diremos que dos píxeles $p, q \in \mathbb{Z}^2$ son *8-adyacentes* si son distintos y cada coordenada de uno de ellos, difiere en a lo más uno, de la respectiva coordenada del otro, es decir, para $p = (x_1, x_2)$ y $p = (y_1, y_2)$ se tiene:

$$|x_i - y_i| = 0 \text{ ó } |x_i - y_i| = 1, \quad i = 1, 2.$$

Dados dos píxeles $p, q \in \mathbb{Z}^2$, diremos que p y q son *4-adyacentes* si son 8-adyacentes y difieren en a lo más una de sus coordenadas. Para $n = 4$ u 8 , un *n-vecino* del punto p , es un punto q que es n-adyacente a p .

Si $p \in \mathbb{Z}^2$ es un píxel, entonces la *vecindad* de p es el conjunto

$$N(p) = \{q \in \mathbb{Z}^2 | q \text{ es } 8\text{-adyacente con } p\} \cup \{p\}$$

Decimos que un conjunto S de píxeles es *m-adyacente* a un conjunto T de píxeles si algún punto en S es *m-adyacente* a algún punto de T . En particular, un punto p es *m-adyacente* a un conjunto de puntos S si p es *m-adyacente* a algún punto de S .

Los conceptos de conjunto m-conexo y de m-componente se pueden definir de la siguiente manera. Para cualquier conjunto de píxeles $S \subseteq \mathbb{Z}^2$, un *m-camino* en S es una sucesión $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$ de puntos en S tales que p_i es m-adyacente a p_{i+1} para $1 \leq i \leq n - 1$. Un camino $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$ es un m-camino de p_1 a p_n . Decimos que los puntos p_1 y p_n son unidos por el camino $\langle p_i | 1 \leq i \leq n \rangle$.

Decimos que dos píxeles p y q del conjunto S están en *relación de m-conexidad* R_m si, y sólo si p y q pueden ser unidos por un *m-camino* en S .

Es claro que:

1. R_m es una relación de equivalencia en S .
2. Un conjunto S es m-conexo si, y sólo si, cualesquiera dos píxeles de S están en relación R_m , es decir, pueden ser unidos mediante un camino en S .
3. Una m-componente de S es una clase de equivalencia respecto a R_m .

Si p y q son píxeles de un subconjunto S especificado de la imagen, decimos que p está *conectado* a q dentro de S si existe un camino desde p hasta q que consiste totalmente de píxeles de S . Para cualquier píxel p dentro de S , el conjunto de píxeles de S conectados a p se denomina *componente conexa* de S . Por tanto, cualquier par de píxeles de una misma componente conexa están conectados entre sí, y componentes conexas distintas son disjuntas.

2.3. Imágenes Binarias

Una *imagen digital binaria bidimensional* P es una tetrada $P = (S, m, n, B)$, donde B y S son subconjuntos de \mathbb{Z}^2 , $B \subseteq S$, S es finito y $(m, n) = (8, 4)$ ó $(4, 8)$. Se supone que el conjunto S contiene a todas las imágenes. Los puntos de B se llaman *puntos negros*, mientras que los puntos de $S \setminus B$ se llaman *puntos blancos* de la imagen, y constituyen el *fondo* de la misma. Cuando B es un conjunto finito la imagen P se denomina *finita*.

Diremos que dos puntos negros en una imagen digital binaria bidimensional $P = (S, m, n, B)$, son *adyacentes* si ellos son m-adyacentes. Diremos que dos puntos blancos o bien un punto blanco y uno negro son adyacentes si ellos son n-adyacentes. También llamaremos a una imagen digital binaria bidimensional (S, m, n, B) , una (m, n) *imagen digital*.

Un conjunto C de puntos negros (blancos) en una imagen digital (m, n) es *conexo* si es m-conexo (n-conexo).

En una imagen digital (m, n) , una *componente de un conjunto C de puntos negros* es una m-componente, mientras que una *componente de un conjunto de puntos blancos* es una n-componente de este conjunto.

2.4. Segmentación de Imágenes Digitales

Una de las principales etapas del análisis y reconocimiento de imágenes es la *segmentación*, la cual consiste en subdividir la imagen en sus partes constituyentes u objetos. El nivel al que se lleva a cabo esta subdivisión depende del problema a resolver. Por ejemplo, si tenemos una imagen satelital de un fragmento de una ciudad y deseamos identificar los vehículos en circulación, entonces lo primero que hay que hacer es identificar las carreteras y sobre éstas, hacer una segmentación para separar los vehículos del resto de la carretera. Como podemos ver, no es necesario hacer una segmentación mas detallada, y tampoco hay que ocuparse de las demás regiones de la imagen que quedan fuera de las carreteras.

Una buena segmentación puede conducir al éxito mientras que una segmentación errónea casi siempre garantiza el fracaso en el procesamiento y análisis de la imagen.

Para las imágenes digitales en escala de grises los algoritmos de segmentación se dividen de acuerdo a dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris, que son *discontinuidad* y *similitud*:

- La *discontinuidad* divide una imagen en base a los cambios bruscos de nivel de gris. Esta propiedad a su vez puede dividirse en:
 - Detección de puntos aislados.
 - Detección de líneas y bordes de una imagen.

- La segunda propiedad es la *similitud* que se basa en dividir una imagen de acuerdo a las similitudes de nivel de gris. Los métodos de segmentación de esta categoría se realizan mediante:
 - Umbralización.
 - Crecimiento de regiones.
 - División y fusión de regiones.

De acuerdo al problema que se desea resolver en esta tesis, la técnica de segmentación de interés es la de similitud, de donde se deriva la segmentación orientada a encontrar directamente las regiones.

La segmentación de imágenes no triviales es una de las tareas más difíciles en el procesamiento de imágenes [5], esto ha motivado el desarrollo de una amplia variedad de métodos de segmentación. La mayoría de ellos se basan en alguna propiedad de discontinuidad (métodos basados en contornos), o en alguna propiedad de similitud (métodos basados en regiones). Lo que varía en cada tipo de segmentación es aquello que se desea segmentar, para el primer caso, estando ya dentro de una región concreta, se desean segmentar objetos individuales, y para el segundo caso se desean segmentar zonas; así que usualmente el resultado del proceso de segmentación son los bordes de una región o todos los puntos que pertenecen a la región en sí misma.

La segmentación por contornos y la segmentación por regiones pueden considerarse como complementarias o duales una de la otra, en el sentido de que si se conoce completamente el contorno o frontera de un objeto se pueden determinar las propiedades de la región. De la misma forma, si se identifica completamente la región del objeto, pueden determinarse propiedades del contorno, aunque esto no significa que proporcionen resultados iguales. Cada técnica tiene sus ventajas y limitaciones, y están fuertemente ligadas a la aplicación en cuestión.

En el presente trabajo se adopta el método de segmentación mediante propiedades de similitud, en particular el método de segmentación por crecimiento de regiones.

2.4.1. Segmentación por crecimiento de regiones.

Sea R la representación de la región que contiene a la imagen completa. Puede verse a la segmentación como el proceso que divide R en n subregiones R_1, R_2, \dots, R_n , tales que:

- $\cup_{i=1}^n R_i = R$.
- R_i es una región conexa, para cada $i = 1, 2, \dots, n$
- $R_i \cap R_j = \emptyset$ para toda i y j con $i \neq j$.

CAPÍTULO 2. IMÁGENES DIGITALES

2.4. SEGMENTACIÓN DE IMÁGENES DIGITALES

El método de segmentación por crecimiento de regiones agrupa los píxeles o subregiones dentro de regiones más grandes. La sencillez de este método radica en la agregación de píxeles, que comienza con un conjunto de puntos “generadores” a partir de los cuales van creciendo las regiones al agregar a cada uno de estos puntos los píxeles próximos que tienen propiedades similares tales como el nivel de gris, la textura o información del color. La implementación más sencilla inicia eligiendo un punto denominado píxel semilla. Entonces, la región crece cuando se agregan los píxeles vecinos que satisfacen cierto criterio de homogeneidad. Esto es, el criterio de homogeneidad tiene la función de decidir si un píxel pertenece a la región en crecimiento o no.

El procedimiento de crecimiento de regiones presenta dos problemas inmediatos; el primero es la selección de los puntos semilla iniciales que representarán apropiadamente a las regiones de interés, el segundo es la selección de propiedades adecuadas para incluir puntos en varias regiones durante el proceso de crecimiento.

La selección del criterio de similitud depende no sólo del problema en consideración, sino también del tipo de datos de la imagen. Otro problema en el crecimiento de regiones es la formulación de una regla de parada. Básicamente, el crecimiento de una región debería terminar cuando no hay más píxeles que satisfagan el criterio de inclusión en esa región. A pesar de que este algoritmo es computacionalmente caro, presenta las siguientes ventajas:

- Permite utilizar varias propiedades de la imagen de manera directa y simultánea para localizar los límites entre regiones.
- El método es extremadamente insensible a la distorsión cuando los puntos iniciales son elegidos correctamente.
- No requiere conocimiento a priori de la imagen, por lo que es una opción muy prometedora para realizar la segmentación de escenas naturales donde no se dispone de un amplio conocimiento a priori.

Capítulo 3

Conjuntos Difusos

En este capítulo hacemos un breve repaso de los conceptos y operaciones básicas sobre conjuntos rígidos para posteriormente trasladarnos al contexto difuso, haciendo una generalización de los conceptos y operaciones sobre los conjuntos rígidos.

Presentamos algunos ejemplos a fin de ilustrar el concepto de conjunto difuso y comentamos los distintos tipos de conjuntos difusos que existen en la teoría. Mostramos las operaciones básicas que se pueden realizar entre conjuntos difusos y que utilizaremos posteriormente en la fundamentación de los algoritmos aquí presentados y por último hacemos una generalización de las relaciones rígidas con el fin de introducir el concepto de una relación difusa.

3.1. Conjuntos Rígidos

Para distinguir entre conjuntos difusos y conjuntos en el sentido normal, nos referiremos a los últimos como *conjuntos rígidos*. Este nombre es generalmente aceptado en la literatura.

Denotaremos por X al universo de discurso, o *conjunto universal*, este conjunto contiene todos los posibles elementos que conciernen en cada contexto particular o aplicación de los cuales los conjuntos son formados.

Existen tres métodos básicos mediante los cuales los conjuntos pueden ser definidos en un conjunto universal dado X :

1. Definición por extensión: Un conjunto es definido al nombrar todos sus miembros. Este método puede ser usado sólo para conjuntos finitos. El conjunto A , cuyos miembros son a_1, a_2, \dots, a_n , es generalmente denotado como $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
2. Definición por comprensión: Un conjunto es definido por una propiedad satisfecha por sus miembros. Una notación común expresando este método es $A = \{x|P(x)\}$, donde $P(x)$ designa una proposición de la forma " x tiene la propiedad P ". Esto es, A es definido por esta notación como el conjunto de

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.1. CONJUNTOS RÍGIDOS

todos los elementos de X para los cuales la proposición $P(x)$ es cierta. Se requiere que la propiedad P cumpla que para cualquier $x \in X$, la proposición $P(x)$ sea cierta o falsa.

3. Un conjunto es definido por una función, generalmente llamada *función característica*, que declara cuales de los elementos de X son miembros del conjunto y cuales no lo son. El conjunto A es definido por su función característica, \mathcal{X}_A , como sigue:

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \in A \\ 0, & \text{para } x \notin A \end{cases}$$

Esto es, la función característica mapea los elementos de X a los elementos del conjunto $\{0, 1\}$, lo cual es formalmente expresado como:

$$\mathcal{X}_A : X \longrightarrow \{0, 1\}.$$

Para cada $x \in X$, cuando $\mathcal{X}_A(x) = 1$, x es declarado miembro de A ; cuando $\mathcal{X}_A(x) = 0$, entonces x no es un miembro del conjunto A .

Un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos, es usualmente referido como una *familia de conjuntos* y puede ser definido en la forma $\{A_i | i \in I\}$, donde i es llamado *índice del conjunto* e I es llamado *conjunto de índices*. Dado que el índice i es usado para referenciar a los conjuntos A_i , la familia de conjuntos es también llamado *conjunto indexado*.

La familia de *todos los subconjuntos* de un conjunto dado A es llamado el *conjunto potencia* de A , y generalmente es denotado por $\mathcal{P}(A)$.

El número de miembros de un *conjunto finito* A es llamado *cardinalidad* de A y es denotado por $|A|$. Si A es finito, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

El *complemento relativo* de un conjunto A con respecto al conjunto B es el conjunto que contiene a todos los miembros de B que no son miembros de A . Esto puede ser escrito como:

$$B \setminus A = \{x | x \in B \text{ y } x \notin A\}.$$

Si B es el conjunto universal, se obtiene el *complemento* de A , y se denota por \bar{A} .

Las propiedades fundamentales de las operaciones entre conjuntos, tales como el complemento absoluto, la unión y la intersección están resumidas en la Tabla 3.1.

Cualesquiera dos conjuntos que no tienen miembros en común son llamados *disjuntos*. Estos es, dos conjuntos, A y B , son disjuntos, si satisfacen la ecuación:

$$A \cap B = \emptyset,$$

donde \emptyset denota al conjunto vacío.

Una familia de subconjuntos de A , disjuntos por pares y distintos del vacío es llamada una *partición* sobre A si la unión de estos conjuntos es igual al conjunto

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

Tabla 3.1: Propiedades fundamentales de las operaciones de los conjuntos rígidos.

Involución	$\bar{\bar{A}} = A$
Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociatividad	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributividad	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Absorción por X y \emptyset	$A \cup X = X$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Identidad	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap X = A$
Ley de la contradicción	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
Ley de la mitad excluida	$A \cup \bar{A} = X$
Leyes de Morgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

original A . Denotamos una partición de A por el símbolo $\pi(A)$. Formalmente la familia:

$$\pi(A) = \{A_i | i \in I, A_i \subseteq A, A_i \neq \emptyset\}$$

es una partición sobre A si y sólo si para cada par $i, j \in I$, con $i \neq j$,

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

y

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A.$$

Los miembros de una partición $\pi(A)$, los cuales son subconjuntos de A , generalmente son referidas como *bloques* de la partición. Cada miembro de A pertenece solamente a un bloque de $\pi(A)$.

3.2. Conjuntos Difusos: tipos y conceptos básicos

Como se ha definido en la sección previa, la función característica de un conjunto rígido asigna un valor de 1 o 0 a cada elemento del conjunto universal, distinguiendo a los elementos que pertenecen al conjunto en consideración de los que no pertenecen.

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

Esta función puede ser generalizada de tal forma que los valores asignados a cada uno de los elementos del conjunto universal estén en un rango específico y que indiquen el grado de membresía de estos elementos en el conjunto en cuestión. Valores grandes denotarán grados altos de membresía. Tal función es llamada *función de membresía* y el conjunto definido por ésta se conoce como *conjunto difuso*.

El rango de valores comúnmente usado para las funciones de membresía es el intervalo unitario $[0, 1]$. En este caso, cada función de membresía mapea los elementos de un *conjunto universal* dado X , el cual es *siempre un conjunto rígido*, al intervalo $[0, 1]$.

Existen dos notaciones que son comúnmente usadas en la literatura para denotar las funciones de membresía. En una de ellas, la función de membresía de un conjunto difuso A es denotado por μ_A ; esto es,

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

Por el otro lado, la función de membresía es denotada por A y tiene, de hecho, la misma forma que el conjunto:

$$A : X \rightarrow [0, 1].$$

De acuerdo a la primera notación, el símbolo (etiqueta, identificador, nombre) del conjunto difuso (A) es distinguible del símbolo de su función de membresía (μ_A). De acuerdo a la segunda notación, esta distinción no es hecha, pero no existe ambigüedad en el doble uso del mismo símbolo. Cada conjunto difuso está completa y únicamente determinado por una función de membresía particular; consecuentemente, los símbolos de la función de membresía pueden también ser usados como etiquetas para los conjuntos difusos asociados.

En adelante usaremos la primera notación, es decir, distinguiremos al conjunto A de su función de membresía μ_A .

Como hemos discutido anteriormente, los conjuntos difusos nos permiten representar conceptos vagos expresados en lenguaje natural. La representación depende no sólo del concepto, sino también del contexto en el cual es usado. Por ejemplo, aplicar el concepto de *temperatura alta* en un contexto para el tiempo y en otro contexto para un reactor nuclear debería necesariamente ser representado por conjuntos difusos totalmente diferentes. Podría también ser el caso, aunque en menor medida, si el concepto fuera aplicado al tiempo en diferentes estaciones, al menos en algunos climas.

Incluso en contextos similares, los conjuntos difusos representando el mismo concepto pueden variar considerablemente. En este caso, sin embargo, ellos pueden compartir rasgos característicos. Como un ejemplo, consideremos cuatro conjuntos difusos cuyas funciones de membresía son mostradas en la Figura 3.2. Cada uno de estos conjuntos expresa, en una forma particular, el concepto general de una clase de números reales que son cercanos a 2. A pesar de sus diferencias, los cuatro conjuntos difusos son similares en el sentido de que comparten las siguientes propiedades:

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS
3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

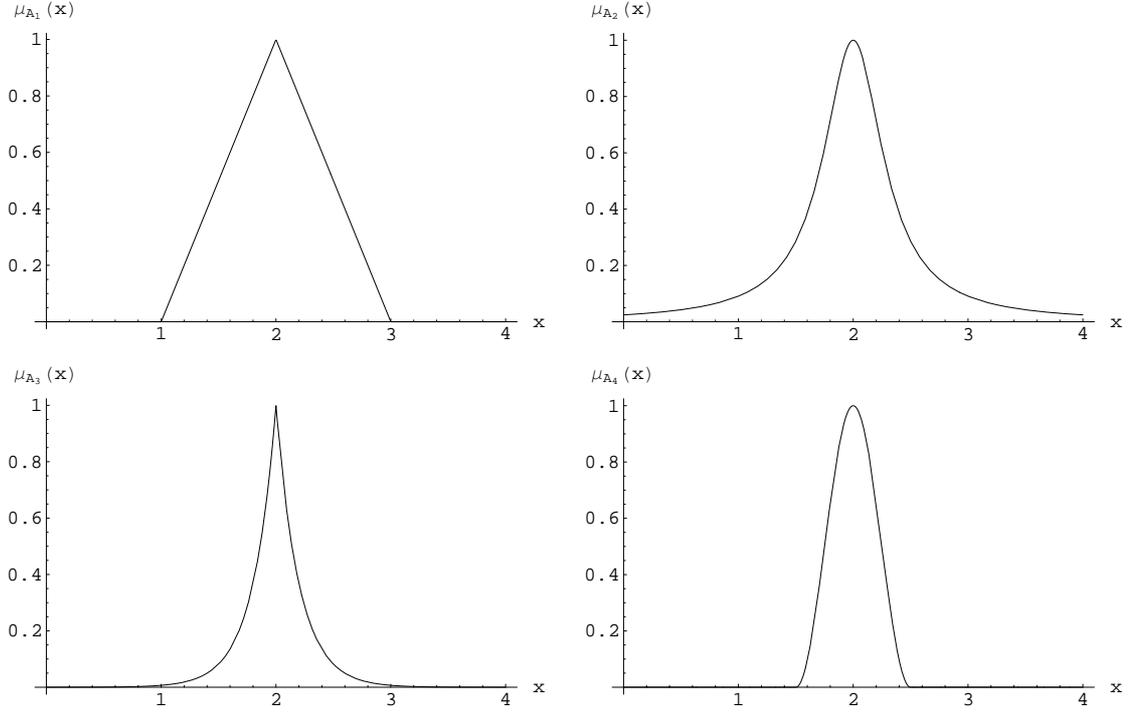


Figura 3.2: Ejemplos de conjuntos difusos

- (i) $\mu_{A_i}(2) = 1$ y $\mu_{A_i}(x) < 1$ para todo $x \neq 2$;
- (ii) μ_{A_i} es simétrico con respecto a $x = 2$, esto es $\mu_{A_i}(2+x) = \mu_{A_i}(2-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\mu_{A_i}(x)$ decrece monótonamente de 1 a 0 al incrementarse la diferencia $|2-x|$.

Estas propiedades son necesarias para la representación adecuada del concepto dado. Cualquier conjunto difuso adicional que intente representar el mismo concepto debe poseer las mismas propiedades.

Las cuatro funciones de membresía en la Figura 3.2 son también similares en el sentido de que los números fuera del intervalo $[1, 3]$ son virtualmente excluidos del conjunto difuso asociado, dado que sus grados de membresía son iguales a cero o insignificantes. A pesar de la similitud en sus gráficas, las definiciones de éstas funciones tienen formas muy distintas. Si una forma es adecuada o no sólo puede ser determinado en el contexto de una aplicación particular. Sin embargo, existen aplicaciones que no son muy sensibles a las variaciones en la forma. En tales casos, es conveniente usar una forma simple, tal como la forma triangular de μ_{A_1} .

Cada miembro en la Figura 3.2 es parte de una familia parametrizada de funciones. Las siguientes son fórmulas generales que describen las cuatro familias de funciones de membresía, donde r denota el número real cuyo valor de membresía será uno ($r = 2$ para todas las funciones en la Figura 3.2), y p_i ($1 \leq i \leq 4$) es un

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

parámetro que determina la rapidez de decrecimiento de la función de membresía conforme aumenta el valor de la diferencia $|r - x|$:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} p_1(x - r) + 1 & \text{cuando } x \in [r - \frac{1}{p_1}, r] \\ p_1(r - x) + 1 & \text{cuando } x \in [r, r + \frac{1}{p_1}] \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \frac{1}{1+p_2(x-r)^2}$$

$$\mu_{A_3}(x) = e^{-|p_3(x-r)|}$$

$$\mu_{A_4}(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos(p_4\pi(x-r))}{2} & \text{cuando } x \in [r - \frac{1}{p_4}, r + \frac{1}{p_4}] \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Conforme p_i aumenta para cada $1 \leq i \leq 4$, la gráfica de μ_{A_i} comienza a hacerse estrecha. Las funciones en la Figura 3.2 ejemplifican estas clases de funciones para $p_1 = 1, p_2 = 10, p_3 = 5, p_4 = 2$ y $r = 2$.

Los conjuntos difusos en la Figura 3.2 son definidos en el conjunto de los números reales. Consideremos ahora, un ejemplo simple: tres conjuntos difusos definidos en un conjunto universal finito que consiste de siete niveles de educación:

- 0 -Sin educación
- 1 -Primaria
- 2 -Secundaria
- 3 -Bachillerato
- 4 -Licenciatura
- 5 -Maestría
- 6 -Doctorado

Las funciones de membresía de los tres conjuntos difusos, los cuales intentan capturar los conceptos de personas poco educadas, altamente educadas y muy altamente educadas son definidos en la Figura 3.3 . Así, por ejemplo, una persona que ha estudiado una Licenciatura pero no un grado más alto, es visto, de acuerdo a estas definiciones, como altamente educado con un grado de 0.8 y muy altamente educado con un grado de 0.5.

Varios conjuntos difusos representando conceptos lingüísticos tales como lento, medio, alto, son generalmente empleados para definir estados de una variable. Tales variables son llamadas generalmente *variables difusas*.

El significado de las variables difusas es que ellos facilitan transiciones graduales entre estados y, consecuentemente, poseen una capacidad natural para expresar y

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS
3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

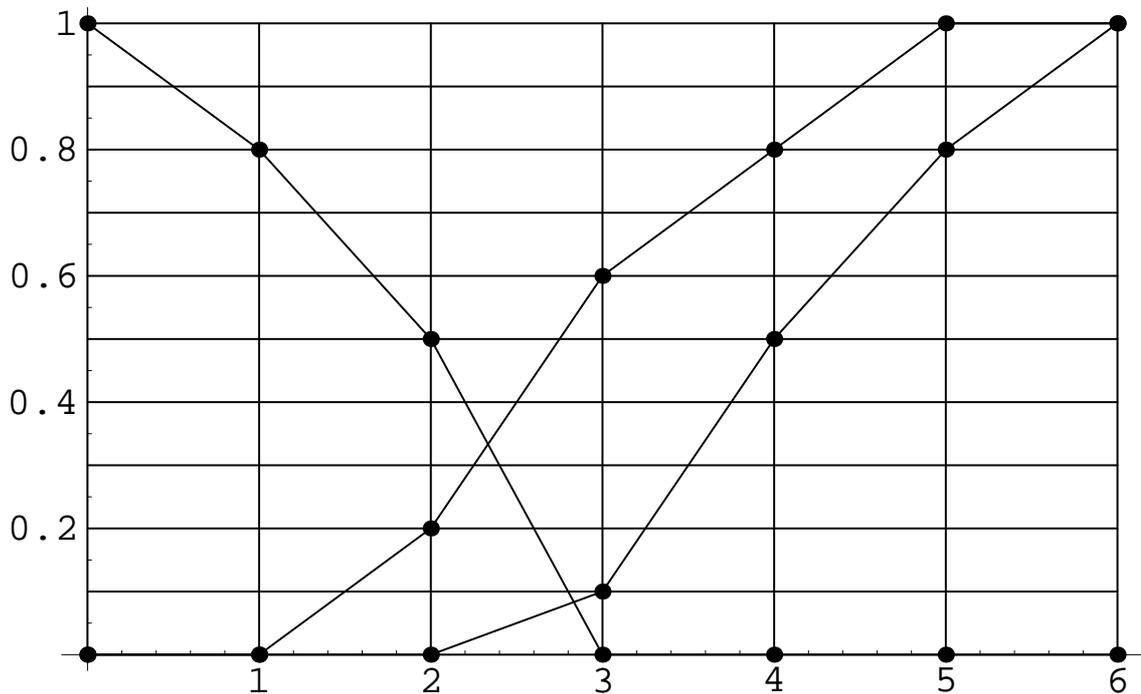


Figura 3.3: Ejemplos de conjuntos difusos representando niveles de educación.

tratar con observaciones y medidas de incertidumbre. Las variables tradicionales, a los cuales podemos referirnos como *variables rígidas*, no tienen esta capacidad. Aunque la definición de estados mediante conjuntos rígidos es matemáticamente correcto, no es realista por el hecho de los inevitables errores de medición. Una medida que cae en una vecindad cerrada definida precisamente en el borde entre estados de una variable rígida es tomado como un soporte evidencial por sólo uno de estos estados, a pesar de la inevitable incertidumbre envuelta en esta decisión. La incertidumbre alcanza su máximo en cada borde, donde cualquier medida debe ser considerada como una evidencia igual para los dos estados sobre cada lado del borde. Sin embargo, cuando tratamos con variables rígidas, la incertidumbre es ignorada incluso en este caso extremo; la medida es considerada como evidencia para uno de los estados, aquel que incluye el punto frontera en virtud de una definición matemática arbitraria.

Dado que las variables difusas capturan la medida de la incertidumbre como parte de los datos experimentales, ellos están más apegadas a la realidad que las variables rígidas. Es una paradoja interesante que los datos basados en variables difusas nos proveen, de hecho, una evidencia más exacta acerca del fenómeno real que los datos basados en variables rígidas.

Aunque las matemáticas basadas en conjuntos difusos tienen una potencia expresiva mucho mayor que las matemáticas clásicas basadas en conjuntos rígidos, su utilidad depende fuertemente de nuestra capacidad de construir funciones de mem-

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

bresía apropiadas para los diferentes conceptos dados en diferentes contextos. Esta capacidad, que era más bien débil en los primeros escenarios de la teoría de los conjuntos difusos, está ahora bien desarrollada por muchas áreas de aplicación. Sin embargo, el problema de construir funciones de membresía significativas es una tarea difícil, y muchos trabajos de investigación adicionales se tendrán que hacer para conseguir una satisfacción total.

Grosso modo, hemos introducido sólo un tipo de conjuntos difusos. Dado un conjunto universal X , cualquier conjunto difuso arbitrario de este tipo (digamos, el conjunto A) es definido por una función de la forma

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1].$$

Los conjuntos difusos de este tipo son por mucho los más comunes en la literatura, así como en las distintas aplicaciones exitosas de la teoría de los conjuntos difusos. Sin embargo, varios tipos de conjuntos difusos más generales han sido también propuestos en la literatura. A los conjuntos difusos que hasta ahora hemos estado trabajando los llamaremos *conjuntos difusos ordinarios* para distinguirlos de conjuntos difusos de varios tipos generalizados.

La razón principal para generalizar los conjuntos difusos ordinarios es que sus funciones de membresía generalmente son muy precisas. Ellos requieren que a cada elemento del conjunto universal le sea asignado un número real particular. Sin embargo, en muchos conceptos y contextos en los cuales ellos son aplicados, podemos identificar funciones de membresía apropiadas sólo aproximadamente. Por ejemplo, tal vez sólo podamos identificar cotas inferiores y superiores significativas de los grados de membresía para cada elemento del conjunto universal. En tales casos, podemos tomar una de dos posibles aproximaciones. Podemos eliminar la identificación de la incertidumbre eligiendo valores razonables entre las cotas inferior y superior (es decir, el valor promedio), o podemos aceptar la incertidumbre e incluirla en la definición de la función de membresía. Una función de membresía basada en la última aproximación asigna a cada elemento del conjunto universal un intervalo cerrado de números reales entre las cotas inferior y superior. Los conjuntos difusos definidos por funciones de membresía de este tipo son llamados *conjuntos difusos valuados en un intervalo*. Estos conjuntos son definidos formalmente por funciones de la forma

$$A : X \rightarrow \varepsilon([0, 1]),$$

donde $\varepsilon([0, 1])$ denota la familia de todos los intervalos cerrados de números reales en $[0, 1]$; claramente,

$$\varepsilon([0, 1]) \subset \mathcal{P}([0, 1]).$$

Un ejemplo de una función de membresía de este tipo es dado en la Figura 3.4. Para cada x , $\mu_A(x)$ es representado por el segmento comprendido entre las dos curvas, el cual expresa las cotas inferior y superior identificadas. Así, $\mu_A(a) = [\alpha_1, \alpha_2]$ para el ejemplo dado en la Figura 3.4.

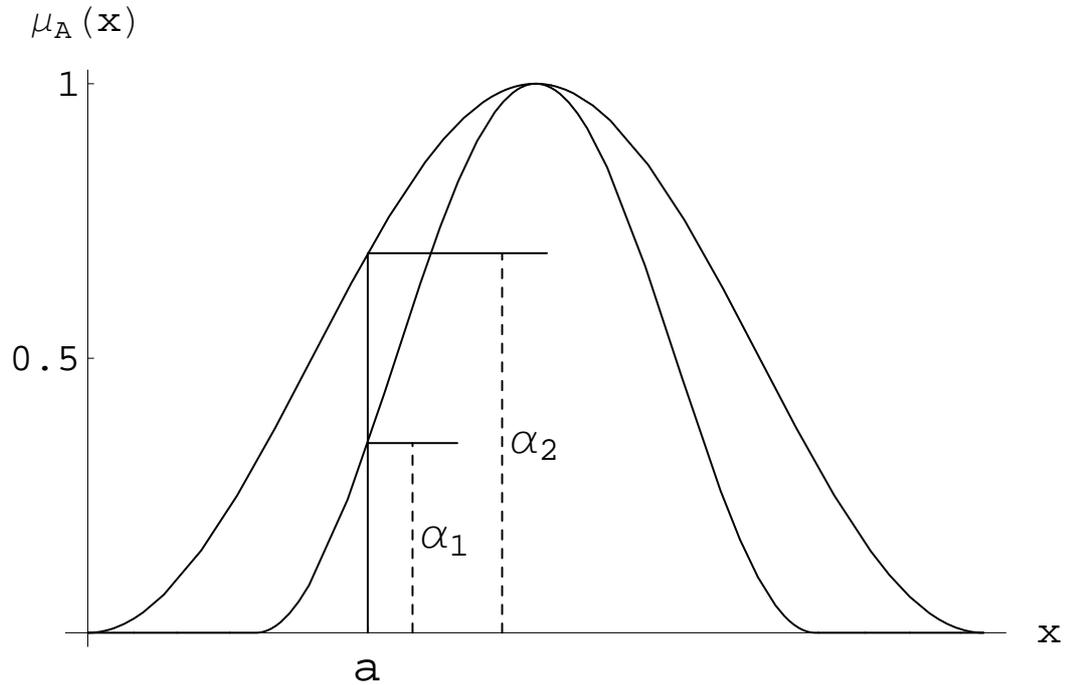


Figura 3.4: Ejemplo de un conjunto difuso valuado en un intervalo ($\mu_A(a) = [\alpha_1, \alpha_2]$)

Las funciones de membresía de los conjuntos difusos valuados en un intervalo no son tan específicas como los conjuntos difusos ordinarios, pero esta ausencia de especificidad los hace más realistas en algunas aplicaciones. La ventaja de estos conjuntos es que ellos permiten expresar nuestra incertidumbre en la identificación de una función de membresía particular, haciendo los resultados del procesamiento menos específicos pero más creíbles.

La desventaja principal de los conjuntos difusos valuados en un intervalo es que este procesamiento comparado con los conjuntos difusos ordinarios, es computacionalmente más costoso. Dado que muchas de las aplicaciones actuales de la teoría de conjuntos difusos no parecen ser sensibles a pequeños cambios en relevantes funciones de membresía, esta desventaja de los conjuntos difusos valuados en un intervalo usualmente supera sus ventajas.

Los conjuntos difusos valuados en un intervalo pueden todavía ser más generalizados permitiendo que sus intervalos sean conjuntos difusos. Cada intervalo se convierte ahora en un conjunto difuso ordinario definido en el conjunto universal $[0, 1]$. Dado que los grados de membresía asignados a los elementos del conjunto universal por estos conjuntos difusos generalizados son conjuntos difusos ordinarios, estos conjuntos son referidos como *conjuntos difusos de tipo 2*. Sus funciones de membresía tienen la siguiente forma

$$\mu_A : X \rightarrow \mathcal{F}([0, 1]),$$

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

donde $\mathcal{F}([0, 1])$ denota el conjunto de todos los conjuntos difusos ordinarios que pueden ser definidos en el conjunto universal $[0, 1]$; $\mathcal{F}([0, 1])$ es también llamado un *conjunto difuso potencia* de $[0, 1]$.

Los conjuntos difusos del tipo 2 poseen una gran potencia expresiva, y por tanto, son conceptualmente más agradables. Sin embargo, las demandas computacionales para tratar con ellos son incluso mayores a las requeridas para tratar con los conjuntos difusos valuados en un intervalo. Esta parece ser la razón principal del por qué ellos nunca han sido utilizados en alguna aplicación.

A continuación, introducimos algunos conceptos y terminología básica de conjuntos difusos. Para ilustrar los conceptos, consideremos tres conjuntos difusos que representen los conceptos de una persona joven, una persona madura y una persona vieja. Una expresión razonable de estos conceptos mediante funciones de membresía trapezoidales μ_{A_1} , μ_{A_2} , y μ_{A_3} es mostrado en la Figura 3.5. Éstas funciones son definidas sobre el intervalo $[0, 80]$ tal como sigue:

$$\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 20 \\ \frac{(35-x)}{15} & \text{si } 20 < x < 35 \\ 0 & \text{si } x \geq 35 \end{cases}$$

$$\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 20 \text{ o } \geq 60 \\ \frac{(x-20)}{15} & \text{si } 20 < x < 35 \\ \frac{(60-x)}{15} & \text{si } 45 < x < 60 \\ 1 & \text{si } 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

$$\mu_{A_3}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 45 \\ \frac{(x-45)}{15} & \text{si } 45 < x < 60 \\ 0 & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

Una posible aproximación discreta, D_2 , de la función A_2 , es también mostrada en la Figura 3.5; su definición explícita está dada en la Tabla 3.6. Tales aproximaciones son importantes dado que son típicas en la representación computacional de los conjuntos difusos.

Uno de los conceptos más importantes de los conjuntos difusos es el concepto de un α -corte y su variante, un α -corte estricto. Dado un conjunto difuso A definido sobre X y cualquier número $\alpha \in [0, 1]$, los α -cortes, A^α , y los α -cortes estrictos, $A^{\alpha+}$, son los conjuntos rígidos

$$A^\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$A^{\alpha+} = \{x | \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Esto es, el α -corte (o el α -corte estricto) de un conjunto difuso A es el conjunto rígido A^α (o el conjunto rígido $A^{\alpha+}$) que contiene todos los elementos del conjunto

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS
3.2. CONJUNTOS DIFUSOS: TIPOS Y CONCEPTOS BÁSICOS

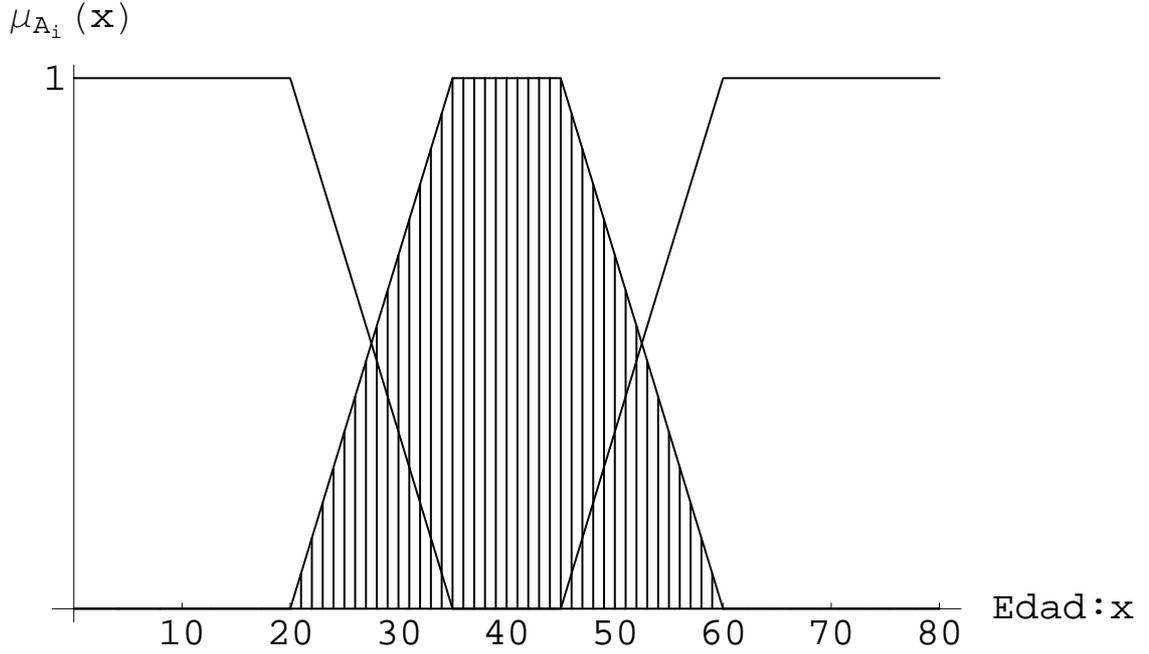


Figura 3.5: Funciones de membresía que representan el concepto de una persona joven, madura y vieja. Mostrando un aproximación discreta D_2 de μ_{A_2} definida en la Tabla 3.6.

universal X cuyos grados de membresía en A son mayores o iguales a (o únicamente mayores que) el valor especificado de α .

El conjunto de todos los niveles $\alpha \in [0, 1]$ que representan distintos α -cortes de un conjunto difuso dado A es llamado un *conjunto de nivel* de A . Formalmente,

$$\Lambda(A) = \{\alpha \mid \mu_A(x) = \alpha \text{ para alguna } x \in X\},$$

donde Λ denota el conjunto de nivel del conjunto difuso A definido sobre X . Por ejemplo, tenemos que;

$$\Lambda(A_1) = \Lambda(A_2) = \Lambda(A_3) = [0, 1], \text{ y}$$

$$\Lambda(D_2) = \{0, 0.13, 0.27, 0.4, 0.53, 0.67, 0.8, 0.93, 1\}.$$

Una propiedad importante de los α -cortes y los α -cortes estrictos, que se sigue inmediatamente de sus definiciones, es que el ordenamiento total de los valores de α en $[0, 1]$ es inversamente preservado por la inclusión de los α -cortes correspondientes, así como de los α -cortes estrictos. Esto es, para cualquier conjunto difuso A y cualesquiera pares $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, tales que $\alpha_1 < \alpha_2$, tenemos que

$$A^{\alpha_2} \subseteq A^{\alpha_1} \text{ y } A^{\alpha_2+} \subseteq A^{\alpha_1+}$$

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS
3.3. OPERACIONES BÁSICAS.

Tabla 3.6: Aproximación discreta de la función de membresía μ_{A_2} .

x	$D_2(x)$
$x \notin \{22, 24, \dots, 58\}$	0.00
$x \in \{22, 58\}$	0.13
$x \in \{24, 56\}$	0.27
$x \in \{26, 54\}$	0.40
$x \in \{28, 52\}$	0.53
$x \in \{30, 50\}$	0.67
$x \in \{32, 48\}$	0.80
$x \in \{34, 46\}$	0.93
$x \in \{36, 38, \dots, 44\}$	1.00

Esta propiedad puede también ser expresada por las ecuaciones

$$A^{\alpha_1} \cap A^{\alpha_2} = A^{\alpha_2}, \quad A^{\alpha_1} \cup A^{\alpha_2} = A^{\alpha_1},$$

y

$$A^{\alpha_1+} \cap A^{\alpha_2+} = A^{\alpha_2+}, \quad A^{\alpha_1+} \cup A^{\alpha_2+} = A^{\alpha_1+}.$$

Una consecuencia obvia de esta propiedad es que todos los α -cortes y todos los α -cortes estrictos de cualquier conjunto difuso forman dos familias distintas de *conjuntos rígidos anidados*.

El *soporte* de un conjunto difuso A en un conjunto universal X es el conjunto rígido que contiene todos los elementos de X que tienen grados de membresía distintos de cero en A . Claramente, el soporte de A es exactamente el mismo que el α -corte estricto de A para $\alpha = 0$. Las notaciones comúnmente utilizadas para denotar el soporte de A son $S(A)$ y $\text{supp}(A)$.

La *altura*, $h(A)$, de un conjunto difuso A es el mayor grado de membresía obtenido por algún elemento en ese conjunto. Formalmente,

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x).$$

Un conjunto difuso A es llamado *normal* cuando $h(A) = 1$; es llamado *subnormal* cuando $h(A) < 1$. La altura puede también ser vista como el supremo de los α para los cuales $A^\alpha \neq \emptyset$.

3.3. Operaciones Básicas.

Las tres operaciones básicas sobre los conjuntos rígidos -el complemento, la intersección y la unión- pueden ser generalizadas para conjuntos difusos en varias formas. Sin embargo, existe una particular generalización que tiene un significado especial

en la teoría de conjuntos difusos, y que usualmente se conoce como *operaciones estándar de los conjuntos difusos*.

El *complemento estándar*, \bar{A} , de un conjunto difuso A con respecto al conjunto universal X está definido para todo $x \in X$ mediante la ecuación

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Los elementos de X para los cuales $\mu_A(x) = \mu_{\bar{A}}(x)$ son llamados *puntos de equilibrio* de A . Para el complemento estándar, claramente, el grado de membresía de los puntos de equilibrio es 0.5.

Dados dos conjuntos difusos, A y B , la *intersección estándar*, $A \cap B$, y la *unión estándar*, $A \cup B$, son definidos para todo $x \in X$ por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\mu_{A \cap B}(x) &= \text{mín}[\mu_A(x), \mu_B(x)], \\ \mu_{A \cup B}(x) &= \text{máx}[\mu_A(x), \mu_B(x)],\end{aligned}$$

donde mín y máx denotan los operadores mínimo y máximo, respectivamente. Dada la asociatividad de los operadores mín y máx, estas definiciones pueden ser extendidas a cualquier número finito de conjuntos difusos.

Aplicando estas operaciones estándar a los conjuntos difusos de la Figura 3.5, podemos observar, por ejemplo, que

$$A_2 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_3.$$

La construcción de $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3$ se muestra en la Figura 3.7. Otros ejemplos basados en los mismos conjuntos son mostrados en la Figura 3.8, donde $B = A_1 \cap A_2$ y $C = A_2 \cap A_3$. Observe que tanto B como C son subnormales, a pesar de que A_1, A_2 y A_3 son normales.

Con la definición de las operaciones estándar sobre conjuntos difusos se satisfacen todas las propiedades de la Tabla 3.1, excepto la ley de contradicción y la ley del tercero excluido.

Dados dos conjuntos difusos $A, B \in \mathcal{F}(X)$, decimos que A es un subconjunto de B y escribimos $A \subseteq B$ si y sólo si

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

para todo $x \in X$. Es fácil ver que, bajo las operaciones estándar de conjuntos difusos, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ si y sólo si $A \cap B = A$ y $A \cup B = B$, para cualesquiera $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

3.4. Relaciones Difusas.

Una *relación rígida* representa la presencia o ausencia de asociaciones, interacciones o interconexiones entre los elementos de dos o más conjuntos. Este concepto puede ser generalizado para introducir diferentes grados o fuerzas de relación o interacción entre los elementos. Los grados de relación pueden ser representados por

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS
3.4. RELACIONES DIFUSAS.

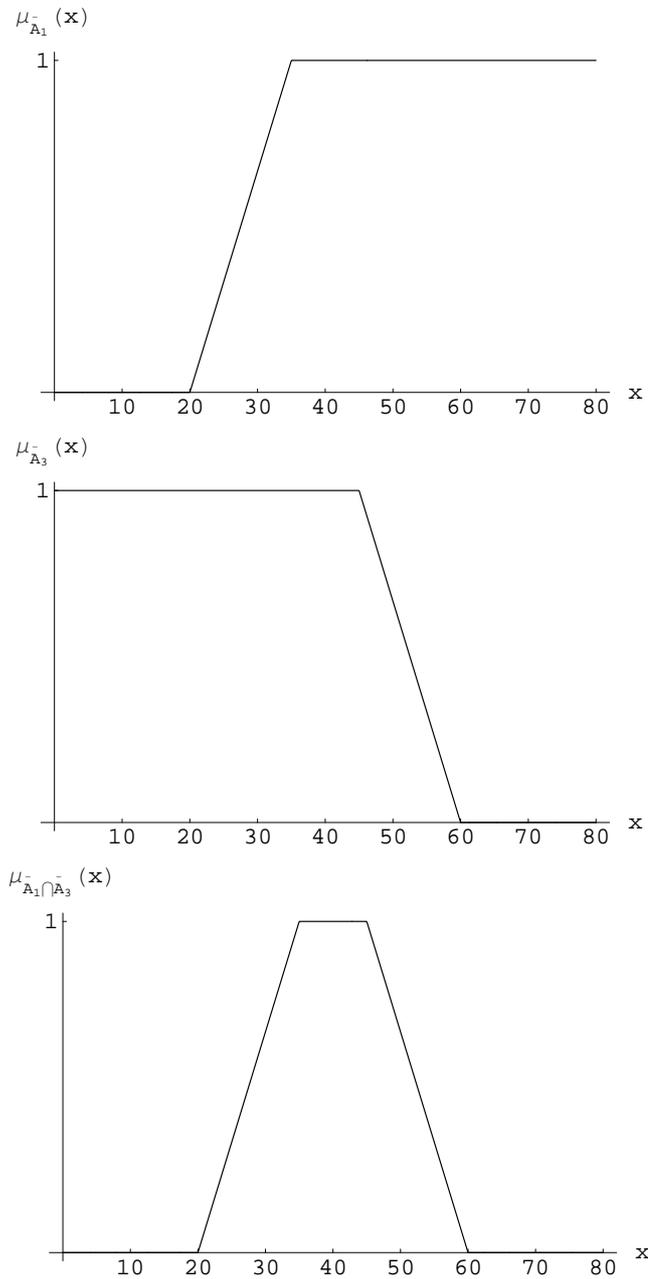


Figura 3.7: Ilustración de las operaciones estándar sobre conjuntos difusos ($\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}$ son dados en la Figura 3.5).

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.4. RELACIONES DIFUSAS.

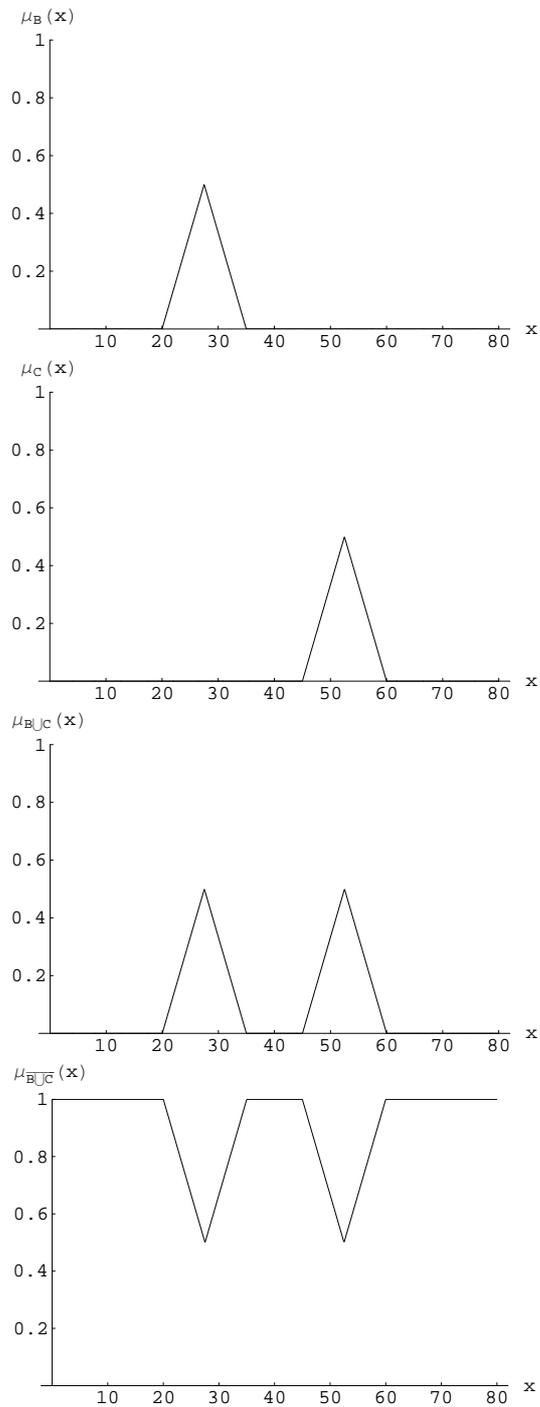


Figura 3.8: Ilustración de las operaciones estándar sobre conjuntos difusos $B = A_1 \cap A_2$ y $C = A_2 \cap A_3$ ($\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \mu_{A_3}$ son dados en la Figura 3.5).

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS

3.4. RELACIONES DIFUSAS.

grados de membresía en una *relación difusa* en la misma forma en que la membresía es representada en conjuntos difusos. De hecho, así como los conjuntos rígidos pueden ser vistos como casos restringidos del concepto más general de conjuntos difusos, la relación rígida puede ser considerada como una restricción de la relación difusa.

Una relación R sobre los conjuntos rígidos X_1, X_2, \dots, X_n es un subconjunto del producto cartesiano $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, donde $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ representa el conjunto universal. Dado que una relación es por sí misma un conjunto, los conceptos básicos tales como contención, unión, intersección y complemento pueden ser aplicados sin modificación para las relaciones.

Cada relación rígida R puede ser definida por una función característica que asigna un valor de 1 a cada tupla del conjunto universal que pertenece a la relación y 0 a cada tupla que no pertenezca a la relación. Formalmente se tiene que

$$\mu_R(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si y sólo si } \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle \in R \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

La membresía de una tupla en una relación significa que los elementos de la tupla están relacionados o asociados entre cada uno de ellos. Por ejemplo, supongamos que R representa la relación de casados entre el conjunto de todos los hombres y el conjunto de todas las mujeres. De todos los posibles pares de hombres y mujeres, sólo aquellos que forman un matrimonio les será asignado un valor de 1 indicando que ellos pertenecen a esta relación. Una relación entre dos conjuntos es llamada *binaria*. En general, una relación definida sobre n conjuntos es llamada *n-aria* o *n-dimensional*. Para el presente trabajo haremos uso solamente de las relaciones binarias.

Tal como la función característica de un conjunto rígido puede ser generalizada para introducir grados de membresía en el conjunto, la función característica de una relación rígida puede ser generalizada para permitir que las tuplas tengan grados de membresía en la relación. Por tanto, una *relación difusa* es un conjunto difuso definido sobre el producto cartesiano de los conjuntos rígidos X_1, X_2, \dots, X_n , donde las tuplas $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ pueden tener diferentes grados de membresía en la relación. El grado de membresía indica la fuerza de la relación que existe entre los elementos de la tupla. Es posible definir una relación (rígida o difusa) binaria entre los elementos de un mismo conjunto X . Las propiedades de una relación rígida tales como: *reflexividad*, *simetría* y *transitividad* pueden ser extendidas para relaciones difusas en términos de las funciones de membresía, de la siguiente forma:

Sea ρ una relación difusa en X . Diremos que ρ es

Reflexiva si para todo $(x, x) \in X \times X$, $\mu_\rho(x, x) = 1$,

Simétrica si para todo $(x, y) \in X \times X$, $\mu_\rho(x, y) = \mu_\rho(y, x)$ y

Transitiva si para todo $(x, y), (y, z), (x, z) \in X \times X$,

$$\mu_\rho(x, z) = \max_y [\min(\mu_\rho(x, y), \mu_\rho(y, z))]$$

CAPÍTULO 3. CONJUNTOS DIFUSOS
3.4. RELACIONES DIFUSAS.

Una relación binaria rígida R sobre el conjunto X que es reflexiva, simétrica y transitiva es llamada una *relación de equivalencia*. Una relación binaria difusa que es reflexiva, simétrica y transitiva, es conocida como *relación de equivalencia difusa* o *relación de similitud* en X .

Mientras que una relación de equivalencia claramente agrupa los elementos que son equivalentes bajo la relación rígida en clases disjuntas, la interpretación de una relación de similitud puede ser dada en dos formas diferentes. Primero, puede ser considerada efectivamente para agrupar a los elementos en conjuntos rígidos cuyos miembros son “similares” para algún grado específico. Obviamente, cuando este grado es igual a 1, el agrupamiento es una clase de equivalencia. Alternativamente, se pueden considerar grados de similitud que los elementos de X tienen con algún elemento específico $x \in X$. Por tanto, para cada $x \in X$, una *clase de similitud* puede ser definida como un conjunto difuso en el cual el grado de membresía de un elemento particular representa la similitud de dicho elemento con el elemento x .

Proposición 3.4.1. *Si R es una relación de similitud sobre el conjunto X , entonces cada α -corte R^α es una relación de equivalencia rígida.*

Demostración. Sea $x \in X$, dado que R es de similitud, se cumple que $\mu_R(x, x) = 1 \geq \alpha$, de donde se tiene que $(x, x) \in R^\alpha$.

Supongamos que $(x, y) \in R^\alpha$, entonces $\mu_R(x, y) \geq \alpha$, pero como $\mu_R(y, x) = \mu_R(x, y)$, se debe cumplir que $\mu_R(y, x) \geq \alpha$, de donde se concluye que $(y, x) \in R^\alpha$.

Supongamos que $(u, v), (v, w) \in R^\alpha$, entonces se tiene que $\mu_R(u, v) \geq \alpha$ y $\mu_R(v, w) \geq \alpha$, dado que R es reflexiva, $\mu_R(u, w) = \max_y[\min(\mu_R(u, y), \mu_R(y, w))]$, pero $\max_y[\min(\mu_R(u, y), \mu_R(y, w))] \geq \min(\mu_R(u, v), \mu_R(v, w)) = \alpha$, por tanto $\mu_R(u, w) \geq \alpha$, lo que implica que $(u, w) \in R^\alpha$. ■

Efectivamente, como lo hemos probado, podemos usar cualquier relación de similitud R y, al tomar un α -corte R^α para algún valor de $\alpha \in (0, 1]$, se creará una relación de equivalencia rígida que represente la presencia de similitud entre los elementos para el grado α . Cada una de estas relaciones de equivalencia forma una partición de X . Si denotamos por $\pi(R^\alpha)$ a la partición correspondiente a la relación de equivalencia R^α , claramente, dos elementos x y y pertenecen al mismo bloque de esta partición si, y sólo si, $R(x, y) \geq \alpha$. Cada relación de similitud está asociada con el conjunto

$$\Pi(R) = \{\pi(R^\alpha) | \alpha \in (0, 1]\}$$

de particiones de X .

Capítulo 4

Conexidad Difusa

Dada una imagen, deseamos dividirla en regiones, de tal forma que los elementos de cada region posean características que las distingan de las otras. Una de tales características es la fuerza de conexidad entre los elementos de la imagen. Estas regiones se deben definir de tal manera que la fuerza de conexión entre dos elementos de una misma región sea mayor a la fuerza de conexión entre cualquier elemento de dicha región y otro elemento de una región distinta. Por tanto, cualquier algoritmo de segmentación que se proponga debe cumplir con esta característica.

En este capítulo presentamos definiciones y propiedades importantes que nos ayudarán a definir propiamente las regiones de una imagen, a través de la relación de conexidad difusa. La tarea principal referente a la extracción de las regiones se centrará en encontrar la fuerza de conexión entre cualesquiera dos elementos de la imagen. Esto motiva el desarrollo de un algoritmo que en principio parece ser muy costoso. Sin embargo, los resultados presentados al final de esta sección junto con el método de programación dinámica que se expone en el siguiente capítulo, nos ayudarán a reducir el tiempo de ejecución de dicho algoritmo.

Empezamos por definir las relaciones difusas de adyacencia y afinidad entre los elementos del espacio (spels). Posteriormente, se introducen los conceptos de caminos y redes difusas cuya finalidad es asignar una fuerza de conexidad a cada camino que conecta cualesquiera dos pares de elementos del espacio. En base a los conceptos anteriores se definen las conexidades difusas, que no son otra cosa que relaciones de similitud, y que por medio de los α -cortes, definen clases rígidas de equivalencia. La idea del principio de conexidad difusa es asignar a cada par de elementos del espacio una fuerza de conexidad que describa precisamente el grado de adyacencia y de afinidad entre estos.

Las componentes conexas difusas, que corresponden a conjuntos difusos, se definen a partir de las clases rígidas de equivalencia formadas por los α -cortes, que son definidas por la relación de conexidad difusa. Finalmente se introduce el concepto de objeto difuso que no es otra cosa que una componente difusa definida por una clase de equivalencia particular. También aquí se presentan los resultados que nos ayudarán a reducir la complejidad combinatoria que resulta del procedimiento para

calcular la fuerza de conexidad entre dos elementos del espacio, lo cual se traducirá en algoritmos prácticos para la extracción de objetos difusos.

4.1. Características de las imágenes

Existen al parecer dos características importantes que necesitan ser consideradas en la descripción de los objetos en las imágenes. Primero, que los objetos tienen un grado de composición. Segundo, los elementos de la imagen que constituyen un objeto comparten ciertas propiedades. Ambos, grado de composición y la similitud son propiedades difusas. Nuestro objetivo es capturar estas propiedades en la noción de un “objeto difuso”.

Independientemente de cualquier imagen, los píxeles (elementos de la imagen) comparten una relación de adyacencia difusa, esto es, entre más cercanos estén los puntos, más adyacentes son entre sí. Nuestro objetivo es capturar el fenómeno global de “similitud” en una relación difusa entre puntos reja, llamada “conexidad”. Hacemos esto, primero, a través de una relación local llamada “afinidad”.

La afinidad toma en cuenta el grado de adyacencia de los puntos reja así como la similitud de sus valores de intensidad. Entre más cercanos sean los puntos y entre más similares sean sus intensidades, entonces la afinidad entre ellos será mayor. Para ver como la afinidad es usada para asignar una “fuerza de conexidad” para cualquier par de puntos reja (c, d) , considere todos los posibles caminos de puntos reja que conectan c y d . Piense en cada uno de tales caminos como una sucesión de eslabones entre puntos reja sucesivos en el camino. Cada eslabón tiene una “fuerza”, la cual es simplemente la afinidad entre los dos puntos reja correspondientes. La fuerza de un camino es simplemente la fuerza del eslabón más débil. Finalmente, la “fuerza de conexidad” entre c y d es la fuerza del más fuerte de todos los caminos.

La fuerza de conexidad entre todos los posibles pares de puntos reja debe ser tomado en cuenta en la definición de un objeto difuso.

4.2. Spels, Adyacencia difusa y Espacio digital difuso.

Supóngase que \mathbb{R}^n es subdividido en hipercubos por n familias de hiperplanos paralelos, mutuamente ortogonales. Asumiremos, sin pérdida de generalidad para nuestro propósito, que los hiperplanos en cada familia están espaciados uniformemente en una unidad de tal forma que los hipercubos formados sean unitarios, y elegiremos las coordenadas de tal forma que el centro de cada hipercubo tenga coordenadas enteras. Los hipercubos serán llamados *spels* (elementos del espacio). Cuando $n = 2$, los spels son llamados *píxeles*, y cuando $n = 3$ éstos son llamados *vóxeles*. Las coordenadas del centro de un spel son n -tuplas de enteros, definiendo un punto en \mathbb{Z}^n . Para cualquier spel c y para $1 \leq j \leq n$, denotaremos por c_j la

j -ésima coordenada del centro de c . Pensaremos en \mathbb{Z}^n como el conjunto de todos los spels en \mathbb{R}^n con la interpretación anterior de spels y usaremos los conceptos de spels y puntos en \mathbb{Z}^n indistintamente.

Una relación difusa α en \mathbb{Z}^n se dice que es una *adyacencia difusa de spels* si ésta es reflexiva y simétrica. Es deseable que además $\mu_\alpha(c, d)$ sea una función no creciente de la distancia $\|c - d\|$ entre c y d , donde $\|\cdot\|$ representa cualquier norma L_2 en \mathbb{R}^n . Un ejemplo de una adyacencia difusa de spels es la relación difusa ω definida por:

$$\mu_\omega(c, d) = \begin{cases} \frac{1}{1+k_1(\sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i-d_i)^2})} & \text{si } \sum_{i=1}^n |c_i - d_i| \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde k_1 es una constante no negativa.

Llamaremos al par (\mathbb{Z}^n, α) , donde α es una adyacencia difusa de spels, un *espacio digital difuso*.

4.3. Escenarios, Clasificación y Segmentación.

Un *escenario* sobre un espacio digital (\mathbb{Z}^n, α) es un par $\zeta = (C, f)$ donde $C = \{c \mid -b_j \leq c_j \leq b_j \text{ para algún } b \in \mathbb{Z}_+^n\}$, \mathbb{Z}_+^n denota el conjunto de las n -tuplas de enteros positivos y f es una función cuyo dominio es C , llamado *dominio del escenario* y cuyo rango es un conjunto de números. Cualquier escenario ζ sobre (\mathbb{Z}^n, α) en el que el rango de f es un subconjunto de $[0, 1]$ es llamado un *escenario de membresía* sobre (\mathbb{Z}^n, α) . Decimos que ζ es un *escenario binario* sobre (\mathbb{Z}^n, α) si ζ es un escenario de membresía sobre \mathbb{Z}^n en el que el rango de f es $\{0, 1\}$. El escenario binario ζ es no vacío si existe $c \in C$ tal que $f(c) \neq 0$.

El conjunto de todos los spels $c \in C$, cuyas coordenadas c_i, c_j están fijas, junto con la restricción de f a ese conjunto, será llamado una $c_i c_j$ -banda de ζ .

Los escenarios contienen información acerca de los objetos que forman parte de la imagen. Los valores de un spel en un escenario de membresía constituyen la membresía del spel en un objeto particular de interés. Los valores de un spel en un escenario no representan directamente su grado de membresía en los objetos. Un escenario de membresía ideal debería contener sólo al objeto de interés con los valores de los spels indicando tan cercanamente como sea posible el grado de membresía de los spels en el objeto. Cualquier proceso que convierte un escenario en un escenario de membresía se llama *n-clasificación*; cualquier proceso que convierte un escenario sobre (\mathbb{Z}^n, α) a un escenario binario sobre (\mathbb{Z}^n, α) es llamado *n-segmentación*.

El propósito de la n -segmentación es identificar al objeto de interés con un subconjunto rígido del dominio del escenario. El propósito de la n -clasificación es identificar al objeto de interés con un subconjunto difuso del dominio del escenario. En adelante asumiremos que nos son dados escenarios de membresía sobre (\mathbb{Z}^n, α) .

4.4. Afinidades de spels difusos.

Sea $\zeta = (C, f)$ un escenario de membresía sobre (\mathbb{Z}^n, α) . Si κ es cualquier relación difusa en C , que es reflexiva y simétrica, entonces decimos que κ es una *afinidad de elementos difusos del espacio* en ζ .

Por ejemplo, sea $\zeta = (C, f)$ un escenario de membresía sobre (\mathbb{Z}^n, ω) , donde ω es la relación difusa cuya función de membresía es:

$$\mu_\omega(c, d) = \begin{cases} \frac{1}{1+k_1(\sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i-d_i)^2})} & \text{si } \sum_{i=1}^n |c_i - d_i| \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.4.1)$$

donde k_1 es una constante no negativa. Para todo $(c, d) \in C \times C$, definimos

$$\mu_\rho(c, d) = \frac{\mu_\omega(c, d)}{1 + k_2|f(c) - f(d)|} \quad (4.4.2)$$

donde k_2 es una constante no negativa. Esto proporciona una afinidad de spels ρ en ζ .

A modo de ilustración consideremos la figura (4.1):

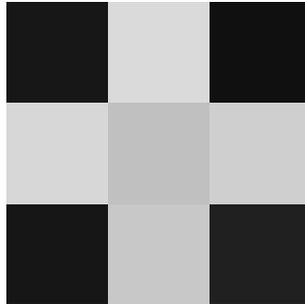


Figura 4.1: Figura de ejemplo.

cuyo escenario de membresía esta dado por:

$((-1,-1),0.0901)$	$((-1,0),0.8549)$	$((-1,1),0.0627)$
$((0,-1),0.8431)$	$((0,0),0.7529)$	$((0,1),0.8117)$
$((1,-1),0.0862)$	$((1,0),0.7843)$	$((1,1),0.1254)$

y procedemos a calcular $\mu_\rho(c, d)$ para cada c, d que están en el escenario, tomando $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$.

CAPÍTULO 4. CONEXIDAD DIFUSA
4.5. CAMINOS, REDES DIFUSAS.

	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)	(1,-1)	(1,0)	(1,1)
(-1,-1)	1	0.0026	0	0.0026	0	0	0	0	0
(-1,0)	0.0026	1	0.0025	0	0.0185	0	0	0	0
(-1,1)	0	0.0025	1	0	0	0.0026	0	0	0
(0,-1)	0.0026	0	0	1	0.0208	0	0.0026	0	0
(0,0)	0	0.0185	0	0.0208	1	0.0313	0	0.0556	0
(0,1)	0	0	0.0026	0	0.0313	1	0	0	0.0028
(1,-1)	0	0	0	0.0026	0	0	1	0.0028	0
(1,0)	0	0	0	0	0.0556	0	0.0028	1	0.0030
(1,1)	0	0	0	0	0	0.0028	0	0.0030	1

Dado que $\mu_\rho(c, d)$ es simétrica, la matriz anterior es simétrica, y dado que $\mu_\rho(c, d)$ es reflexiva los elementos de la diagonal son 1. Claramente, entre más cercanos estén c y d en cuanto a localización y valores de membresía en ζ , será mayor su afinidad. Nótese que no hay requerimientos de “localización” para esta relación. De hecho, la relación difusa es invariante con respecto a la ubicación de c y d en C .

4.5. Caminos, Redes difusas.

Sea $\zeta = (C, f)$ un escenario de membresía sobre un espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) y sea κ una afinidad de spels difusos en ζ . Un *camino* no vacío p_{cd} en ζ de un spel c a un spel d , con $c, d \in C$ es una sucesión $\langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)} \rangle$ de spels, todos en C , tal que $c^{(1)} = c$ y $c^{(m)} = d$. Los elementos consecutivos en la sucesión no son necesariamente distintos. Un *camino vacío* en ζ de c a d , denotado por $\langle \rangle$, es una secuencia que no tiene elementos.

El conjunto de todos los caminos en ζ que van de c a d se denota por P_{cd} . Usamos P_ζ para denotar el conjunto de todos los caminos en ζ , definido como

$$P_\zeta = \bigcup_{(c,d) \in C \times C} P_{cd}.$$

La κ -red difusa \mathcal{N} de ζ es un subconjunto difuso de P_ζ , tal que para todo $p = \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)} \rangle \in P_\zeta$

$$\mu_{\mathcal{N}}(p) = \min[\mu_\kappa(c^{(1)}, c^{(2)}), \mu_\kappa(c^{(2)}, c^{(3)}), \dots, \mu_\kappa(c^{(m-1)}, c^{(m)})] \quad \text{y} \quad (4.5.1)$$

$$\mu_{\mathcal{N}}(\langle \rangle) = 0. \quad (4.5.2)$$

El concepto de κ -red difusa captura la idea de asignar una “fuerza” a cada camino que conecta cualesquiera pares de spels en ζ . Se define una operación binaria *junto* a en P_ζ , denotado por “+” como sigue. Para cualesquiera dos caminos no vacíos:

CAPÍTULO 4. CONEXIDAD DIFUSA

4.6. CONEXIDAD DIFUSA Y RELACIONES BINARIAS.

$p_{cd} = \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)} \rangle \in P_\zeta$ y $p_{de} = \langle d^{(1)}, d^{(2)}, \dots, d^{(l)} \rangle \in P_\zeta$ se tiene que

$$\begin{aligned} p_{cd} + p_{de} &= \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)}, d^{(2)}, d^{(3)}, \dots, d^{(l)} \rangle \\ p_{cd} + \langle \rangle &= p_{cd} \\ \langle \rangle + p_{de} &= p_{de} \quad \text{y} \\ \langle \rangle + \langle \rangle &= \langle \rangle. \end{aligned}$$

Notar que $p_{de} + p_{cd}$ no está definida si $e \neq c$.

Proposición 4.5.1. *Para cualquier escenario de membresía $\zeta = (C, f)$, sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) y para cualesquiera spels $c, e \in C$,*

$$P_{ce} = \{p_{cd} + p_{de} \mid d \in C, p_{cd} \in P_{cd}, p_{de} \in P_{de}\}. \quad (4.5.3)$$

Demostración. Evidentemente, si $p \in P_{cd}$ y $p' \in P_{de}$ para cualesquiera $d \in C$, entonces $p + p' \in P_{ce}$.

Recíprocamente, sea $p_{ce} = \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)} \rangle \in P_{ce}$. Si $m > 2$, entonces existe j , $1 < j < m$, tal que $c^{(j)} \in C$. $p_{cc^{(j)}} = \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(j)} \rangle \in P_{cc^{(j)}}$, $p_{c^{(j)}e} = \langle c^{(j)}, c^{(j+1)}, \dots, c^{(m)} \rangle \in P_{c^{(j)}e}$ y $p_{ce} = p_{cc^{(j)}} + p_{c^{(j)}e}$. Si $m = 2$, entonces $p_{ce} = \langle c, e \rangle + \langle \rangle$, y si p_{ce} es el camino vacío, entonces $p_{ce} = \langle \rangle + \langle \rangle$. En todos los casos, p_{ce} es un elemento del conjunto del lado derecho de la ecuación (4.5.3). ■

4.6. Conexidad Difusa y Relaciones Binarias.

Sea $\zeta = (C, f)$ un escenario de membresía sobre (\mathbb{Z}^n, α) , sea κ una afinidad de spels difusos en ζ y \mathcal{N} la κ -red difusa de ζ . Una κ -conexidad difusa en ζ , denotada por K , es una relación difusa en C , definida como sigue. Para todo $c, d \in C$ se define

$$\mu_K(c, d) = \max_{p \in P_{cd}} [\mu_{\mathcal{N}}(p)]. \quad (4.6.1)$$

La idea intuitiva subrayando el principio de conexidad difusa, es asignar a cada par de spels (c, d) en C una “fuerza de conexidad” entre ellos. Hay numerosos caminos posibles entre c y d (expresado por el conjunto P_{cd}). A lo largo de cada camino p , hay una “conexión más débil” (en el sentido de la afinidad más pequeña entre spels a lo largo de p) que determina la fuerza de conexidad a lo largo de p . La fuerza real de conexidad de c a d es el máximo de las fuerzas de todos los caminos. Notemos que en la definición de “fuerza”, α , ζ y κ juegan roles importantes. El siguiente resultado es vital para el desarrollo de la noción de objetos difusos.

Proposición 4.6.1. *Para cualquier afinidad de spels difusos κ en cualquier escenario de membresía $\zeta = (C, f)$ sobre cualquier espacio digital (\mathbb{Z}^n, α) , una κ -conexidad difusa K en ζ es una relación de similitud en \mathcal{C} .*

Demostración. Sea \mathcal{N} una κ -red difusa de ζ . Puesto que para todo camino $p = \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)} \rangle \in P_\zeta$ se cumple que

$$\mu_{\mathcal{N}}(p) = \min[\mu_{\kappa}(c^{(1)}, c^{(2)}), \mu_{\kappa}(c^{(2)}, c^{(3)}), \dots, \mu_{\kappa}(c^{(m-1)}, c^{(m)})] \leq 1 = \mu_{\kappa}(c, c)$$

entonces

$$\mu_K(c, c) = \max_{p \in P_{cc}} [\mu_{\mathcal{N}}(p)] = \mu_{\kappa}(c, c) = 1.$$

Para c y d en C , observemos que hay una correspondencia uno a uno entre P_{cd} y P_{dc} como sigue: si $p_{cd} = \langle c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(m)} \rangle \in P_{cd}$, entonces el elemento correspondiente de P_{dc} es $p_{dc} = \langle c^{(m)}, c^{(m-1)}, \dots, c^{(1)} \rangle$. Claramente $\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}) = \mu_{\mathcal{N}}(p_{dc})$, por tanto

$$\mu_K(c, d) = \max_{p_{cd} \in P_{cd}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd})] = \max_{p_{dc} \in P_{dc}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{dc})] = \mu_K(d, c)$$

estableciendo la simetría de K .

Para cualesquiera $c, e \in C$ se cumple que

$$\begin{aligned} \mu_K(c, e) &= \max_{p_{ce} \in P_{ce}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{ce})] \quad (\text{por la ecuación (4.6.1)}) \\ &= \max_{d \in C, p_{cd} \in P_{cd}, p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd} + p_{de})] \quad (\text{por la ecuación (4.5.3)}) \\ &= \max_{d \in C, p_{cd} \in P_{cd}, p_{de} \in P_{de}} [\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]] \\ &= \max_{d \in C, p_{cd} \in P_{cd}} [\max_{p_{de} \in P_{de}} [\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]]]. \end{aligned}$$

Dado $p_{cd} \in P_{cd}$ se tienen dos casos.

- (i) $\mu_{\mathcal{N}}(p_{de}) \leq \mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}) \forall p_{de} \in P_{de}$, lo que implica que $\max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})] \leq \mu_{\mathcal{N}}(p_{cd})$, luego se tiene que $\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \mu_{\mathcal{N}}(p_{de})] = \mu_{\mathcal{N}}(p_{de}) \forall p_{de} \in P_{de}$ y por tanto $\max_{p_{de} \in P_{de}} [\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]] = \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})] = \min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]]$.
- (ii) Existe al menos un $p'_{de} \in P_{de}$ tal que $\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}) < \mu_{\mathcal{N}}(p'_{de})$, se sigue entonces que $\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}) < \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]$, dado que $\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \mu_{\mathcal{N}}(p_{de})] \leq \mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}) \forall p_{de} \in P_{de}$, entonces $\max_{p_{de} \in P_{de}} [\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]] = \mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}) = \min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]]$.

De los casos anteriores y siguiendo con la cadena de igualdades se tiene que:

$$\begin{aligned} \mu_K(c, e) &= \max_{d \in C, p_{cd} \in P_{cd}} [\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]]] \\ &= \max_{d \in C} [\max_{p_{cd} \in P_{cd}} [\min[\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd}), \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]]]] \\ &= \max_{d \in C} [\min[\max_{p_{cd} \in P_{cd}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{cd})], \max_{p_{de} \in P_{de}} [\mu_{\mathcal{N}}(p_{de})]]] \\ &= \max_{d \in C} [\min[\mu_K(c, d), \mu_K(d, e)]] \end{aligned}$$

de donde resulta que K es transitiva. ■

La razón de utilizar la composición max-min en la definición de κ viene naturalmente de la analogía física de las conexiones y fuerzas de los caminos descritos al final de la sección 4.1.

Para definir la noción de una componente conexas difusa, necesitaremos la siguiente relación binaria K_θ basada en la relación difusa K . Usamos θ para denotar cualquier subconjunto del intervalo $[0, 1]$ y para $0 \leq x \leq 1$ se define $\theta_x = [x, 1]$. Sea $\zeta = (C, f)$ un escenario de membresía sobre un espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , y sea κ una afinidad de spels difusos en ζ . Para todo $c, d \in C$ y para cualquier $\theta \subset [0, 1]$ se define una relación binaria rígida K_θ en C como:

$$\mu_{K_\theta}(c, d) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu_K(c, d) \in \theta \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.6.2)$$

Proposición 4.6.2. *Para cualquier escenario de membresía $\zeta = (C, f)$, sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , para cualquier $x \in [0, 1]$ y para cualquier κ -conexidad difusa K en ζ , K_{θ_x} es una relación de equivalencia en C .*

Demostración. Como $\mu_K(c, c) = 1 \forall c \in C$ y $1 \in [x, 1] \forall x \in [0, 1]$, entonces $\mu_{K_{\theta_x}}(c, c) = 1 \forall c \in C$ y por tanto K_{θ_x} es reflexivo. Dado que $\mu_K(c, d) = \mu_K(d, c) \forall c, d \in C$, se tiene que $\mu_{K_{\theta_x}}(c, d) = \mu_{K_{\theta_x}}(d, c) = 1$ (cuando $\mu_K(c, d) \in \theta_x$) ó $\mu_{K_{\theta_x}}(c, d) = \mu_{K_{\theta_x}}(d, c) = 0$ (cuando $\mu_K(c, d) \notin \theta_x$). Por tanto K_{θ_x} es simétrico. Dada la transitividad de K , se cumple que para todo $(c, d), (d, e), (c, e)$ en $C \times C$

$$\mu_K(c, e) = \max_{d \in C} [\min[\mu_K(c, d), \mu_K(d, e)]]. \quad (4.6.3)$$

Supóngase que $\mu_{K_{\theta_x}}(c, g) = 1 = \mu_{K_{\theta_x}}(g, e)$ para algunos $c, g, e \in C$, entonces por la ecuación (4.6.3):

$$\mu_K(c, e) \geq \min[\mu_K(c, g), \mu_K(g, e)]. \quad (4.6.4)$$

Dado que $\mu_K(c, g) \geq x$ y $\mu_K(g, e) \geq x$, entonces de la ecuación (4.6.4) se sigue que $\mu_K(c, e) \geq x$ y por tanto $\mu_{K_{\theta_x}}(c, e) = 1$, estableciendo así la transitividad de K_{θ_x} . ■

Este es un resultado que ya habíamos mencionado anteriormente en la sección 3.4, puesto que las clases de equivalencia definidas por K_{θ_x} corresponden a los α -cortes definidos por la relación de conexidad difusa K , para ello basta tomar $\alpha = x$.

4.7. Componentes y Objetos difusos.

Sea $\zeta = (C, f)$ un escenario de membresía sobre un espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , sea κ una afinidad difusa de spels en ζ , $x \in [0, 1]$ y O_{θ_x} una clase de equivalencia de

la relación rígida K_{θ_x} en C . Una κ -componente difusa ζ_{θ_x} de C de fuerza θ_x es un subconjunto difuso de C definido por la función de membresía:

$$\mu_{\zeta_{\theta_x}}(c) = \begin{cases} f(c), & \text{si } c \in O_{\theta_x} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usamos la notación $[o]_{\theta_x}$ para denotar la clase de equivalencia de K_{θ_x} que contiene o para alguna $o \in C$. La κ -componente difusa de C de fuerza θ_x que contiene o , denotado por $\zeta_{\theta_x}(o)$ es un subconjunto difuso de C cuya función de membresía es:

$$\mu_{\zeta_{\theta_x}(o)}(c) = \begin{cases} f(c), & \text{si } c \in [o]_{\theta_x} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.7.1)$$

Un $\kappa\theta_x$ -objeto difuso de ζ es una κ -componente difusa de C de fuerza θ_x . Para cualquier spel $o \in C$, un $\kappa\theta_x$ -objeto difuso de ζ que contiene o es una κ -componente difusa de C de fuerza θ_x que contiene o . Dados ζ, κ, α y $x \in [0, 1]$ y cualquier spel $o \in C$, referiremos al proceso de encontrar los $\kappa\theta_x$ -objetos difusos que contienen o como *extracción de objetos n-difusos*. Referiremos al proceso de encontrar todos los $\kappa\theta_x$ -objetos difusos de ζ , dados κ, α y $x \in [0, 1]$ como *etiquetado de objetos n-difusos*. En la práctica, podemos hacer extracciones de objetos n-difusos y etiquetarlos directamente sobre los escenarios (ignorando el requerimiento teórico de que el rango de valores de los spels sea $[0,1]$ para un escenario de membresía y tratando el escenario dado, por sí mismo, como un escenario de membresía). Por tanto, este proceso puede también ser considerado como solución al problema de n-clasificación.

La idea de especificar un spel o en C para la extracción de objetos n-difusos viene de la consideración práctica de indicar un objeto en particular en ζ que el usuario esté interesado en detectar. Cuando el número de objetos a ser detectados es grande (tales como en el caso de lesiones de esclerosis múltiple del cerebro), puede no resultar práctico especificar un spel para cada objeto. En este caso, debemos aplicar el etiquetado de objetos n-difusos. La asignación de los valores $f(c)$ a los spels c de un $\kappa\theta_x$ -objeto difuso de ζ requiere alguna explicación. Recordemos que comenzamos con la asunción de que ζ era un escenario de membresía, en donde la densidad del escenario permite identificar los objetos en él.

Si ζ es un escenario (más que un escenario de membresía), entonces el valor de la densidad del escenario puede no identificar directamente los objetos en él y por tanto no es apropiado asignar $f(c)$ como un valor de membresía del spel. Ambos, extracción y etiquetado de objetos n-difusos son procesos computacionalmente costosos, incluso para el caso $n = 2$. Cualquier método para estos procesos que proceden directamente de la definición serían computacionalmente imprácticos. Sin embargo, hay ciertas propiedades de los $\kappa\theta_x$ -objetos difusos que permiten simplificar esta tarea.

4.8. Propiedades de los objetos difusos

Una propiedad análoga a la de componentes conexas rígidas se sigue para las κ -componentes difusas directamente de la proposición 4.6.2.

CAPÍTULO 4. CONEXIDAD DIFUSA
4.8. PROPIEDADES DE LOS OBJETOS DIFUSOS

Proposición 4.8.1. *Para cualquier escenario de membresía $\zeta = (C, f)$, sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , para cualquier afinidad de spels κ en ζ y para cualquier $x \in [0, 1]$, el conjunto $\{\zeta_{\theta_x}^{(1)}, \zeta_{\theta_x}^{(2)}, \dots, \zeta_{\theta_x}^{(l)}\}$ de todos los distintos κ_{θ_x} -objetos de ζ satisface lo siguiente:*

- (i) Para $1 \leq i, j \leq l$ con $i \neq j$ se tiene $\zeta_{\theta_x}^{(i)} \cap \zeta_{\theta_x}^{(j)} = \emptyset$ y
- (ii) $\bigcup_{1 \leq i \leq l} \zeta_{\theta_x}^{(i)} = \zeta$.

Demostración. (i) Sean O_{θ_x} y O'_{θ_x} dos clases distintas definidas por la relación de equivalencia K_{θ_x} y sean $\zeta_{\theta_x}^{(i)}$ y $\zeta_{\theta_x}^{(j)}$ con $1 \leq i \neq j \leq l$ definidas sobre cada una de estas clases, respectivamente. Si existe $c \in \zeta_{\theta_x}^{(i)} \cap \zeta_{\theta_x}^{(j)}$ entonces se cumple que $\mu_{\zeta_{\theta_x}^{(i)}}(c) \neq 0$, y $\mu_{\zeta_{\theta_x}^{(j)}}(c) \neq 0$, lo que implica que $c \in O_{\theta_x}$ y $c \in O'_{\theta_x}$, de aquí que $c \in O_{\theta_x} \cap O'_{\theta_x}$, lo cual es una contradicción, por tanto $\zeta_{\theta_x}^{(i)} \cap \zeta_{\theta_x}^{(j)} = \emptyset$.

- (ii) Notemos que para cada clase de equivalencia O_{θ_x} definida en ζ existe $k \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\zeta_{\theta_x}^{(k)}$ es una κ -componente difusa definida sobre O_{θ_x} . Sea $c \in \zeta$ entonces se tiene que $\mu_{\zeta}(c) = f(c)$, además $c \in [c]_{\theta_x}$ y por tanto debe existir $k \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\zeta_{\theta_x}^{(k)}$ es una κ -componente difusa definida sobre $[c]_{\theta_x}$, así se tiene que $\mu_{\zeta_{\theta_x}^{(k)}}(c) = f(c)$. Observemos que $\mu_{\zeta_{\theta_x}^{(k)}}(c) = \max[\mu_{\zeta_{\theta_x}^{(1)}}(c), \mu_{\zeta_{\theta_x}^{(2)}}(c), \dots, \mu_{\zeta_{\theta_x}^{(l)}}(c)]$. Puesto que $\mu_{\zeta_{\theta_x}^{(i)}}(c) = 0 \forall i \neq k$ con $i \in \{1, \dots, l\}$, entonces $\mu_{\zeta}(c) = \mu_{\bigcup_{i=1}^l \zeta_{\theta_x}^{(i)}}(c) \forall c \in C$. ■

El siguiente lema trata sobre uno de los resultados principales que tienen consecuencias computacionales significativas para la extracción de objetos n-difusos.

Lema 4.8.2. *Sea $\zeta = (C, f)$ cualquier escenario de membresía sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , sea κ cualquier afinidad de spels difusos en ζ , sea $x \in [0, 1]$ y sea $o \in C$. Se define un subconjunto especial $\Omega_{\theta_x}(o)$ de C como: $\Omega_{\theta_x}(o) = \{c \in C \mid \mu_{\kappa}(o, c) \in \theta_x\}$. Entonces*

$$\Omega_{\theta_x}(o) = [o]_{\theta_x}. \tag{4.8.1}$$

Demostración. Para cualquier spel $c \in [o]_{\theta_x}$, por la ecuación (4.6.2) $\mu_{\kappa_{\theta_x}}(c, o) = 1$, lo que implica que $\mu_{\kappa}(c, o) \in \theta_x$. De aquí que por la ecuación (4.8.1) $c \in \Omega_{\theta_x}(o)$, así $[o]_{\theta_x} \subset \Omega_{\theta_x}(o)$. Para cualquier spel $c \in \Omega_{\theta_x}(o)$, se tiene que $\mu_{\kappa}(o, c) \in \theta_x$ y por la ecuación (4.6.2) $\mu_{\kappa_{\theta_x}}(o, c) = 1$, así por la proposición (4.6.2), se tiene que $c \in [o]_{\theta_x}$ y por tanto $\Omega_{\theta_x}(o) \subset [o]_{\theta_x}$. ■

El siguiente teorema proporciona un método práctico para la extracción de objetos n-difusos.

Teorema 4.8.3. *Para cualquier escenario de membresía $\zeta = (C, f)$ sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , para cualquier afinidad de spels difusos κ en ζ , para cualquier $x \in [0, 1]$ y $o \in C$, el κ_{θ_x} -objeto difuso $\zeta_{\theta_x}(o)$ conteniendo o , está dado por la función de membresía:*

$$\mu_{\zeta_{\theta_x}(o)}(c) = \begin{cases} f(c), & \text{si } c \in \Omega_{\theta_x}(o) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Demostración. El resultado se sigue del Lema 4.8.2 y de la ecuación (4.7.1). ■

Este resultado es bastante notable, sobre todo al considerar las restricciones mínimas que son puestas sobre las formas funcionales de μ_α y μ_κ . El teorema indica que para encontrar los κ_{θ_x} -objetos difusos conteniendo o , no es necesario calcular $\mu_\kappa(c, d)$ para cada posible par (c, d) de spels en C . Es suficiente calcular $\mu_\kappa(o, c)$ para cada spel $c \in C$. Esto es una reducción considerable en complejidad combinatoria. A pesar de esta simplificación, se necesita todavía determinar todos los posibles caminos de o a cada $c \in C$, y para cada camino evaluar las expresiones (4.5.1) y (4.5.2). El siguiente resultado sugiere una solución para el problema del etiquetado de objetos n-difusos, dado que un método para la extracción de objetos n-difusos está disponible.

Corolario 4.8.4. *Sean $\zeta = (C, f)$ cualquier escenario de membresía sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , κ cualquier afinidad de spels difusos en ζ , $x \in [0, 1]$, $\{\zeta_{\theta_x}^{(1)}, \zeta_{\theta_x}^{(2)}, \dots, \zeta_{\theta_x}^{(l)}\}$ el conjunto de todos los distintos κ_{θ_x} -objetos de ζ y $o^{(1)}, o^{(2)}, \dots, o^{(l)}$ spels que están contenidos en $\zeta_{\theta_x}^{(1)}, \zeta_{\theta_x}^{(2)}, \dots, \zeta_{\theta_x}^{(l)}$ respectivamente. Entonces:*

- (i) Para $1 \leq i, j \leq l$ con $i \neq j$, $\Omega_{\theta_x}(o^{(i)}) \cap \Omega_{\theta_x}(o^{(j)}) = \emptyset$ y
- (ii) $\bigcup_{1 \leq i \leq l} \Omega_{\theta_x}(o^{(i)}) = C$.

Demostración. El resultado se sigue de la Proposición 4.8.1 y del Teorema 4.8.3. ■

Proposición 4.8.5. *Para cualquier escenario de membresía $\zeta = (C, f)$ sobre cualquier espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , para cualquier afinidad de spels difusos κ en ζ , para cualquier spel $o \in C$, y para cualesquiera $t, y \in [0, 1]$, $\zeta_{\theta_y}(o) \subset \zeta_{\theta_t}(o)$ si $t \leq y$.*

Demostración. Para cualquier spel $c \in [o]_{\theta_y}$, $\mu_\kappa(o, c) \in \theta_y$, lo que implica que $\mu_\kappa(o, c) \in \theta_t$ dado que $\theta_y \subset \theta_t$. De aquí que $\mu_{\kappa_{\theta_t}}(o, c) = 1$, y como κ_{θ_t} es una relación de equivalencia, $c \in [o]_{\theta_t}$. Por tanto, siempre que $c \in [o]_{\theta_y}$, se cumplirá que $\mu_{\zeta_{\theta_y}(o)}(c) = \mu_{\zeta_{\theta_t}(o)}(c)$. Para $c \in C - [o]_{\theta_y}$, $\mu_{\zeta_{\theta_y}(o)}(c) = 0$ por la ecuación (4.7.1). Por tanto $\zeta_{\theta_y}(o) \subset \zeta_{\theta_t}(o)$. ■

Capítulo 5

Algoritmos de Segmentación

Los algoritmos presentados en este capítulo están basados en el método de programación dinámica. Por esta razón es que la primera parte de este capítulo está dedicado a este tema, en ella se explican los pasos a seguir para el diseño de un algoritmo de programación dinámica y también se indica en que casos es adecuado aplicar dicho método.

Posteriormente procedemos a explicar el algoritmo de Floyd-Warshall que está basado en el método de programación dinámica, luego planteamos un problema para inducir la relación que existe entre el proceso de extracción de objetos difusos y el problema que resuelve el algoritmo de Floyd-Warshall.

Finalmente presentamos los algoritmos $\kappa\theta_xFOE$ y κFOE que sirven para la extracción de objetos difusos a partir de un spel especificado por el usuario y el algoritmo $\kappa\theta_xFOL$ que sirve para el etiquetado de objetos difusos. Se presenta una prueba de la salida correcta de cada algoritmo, así como de su terminación.

5.1. Programación Dinámica

Existen una serie de problemas cuyas soluciones pueden ser expresadas recursivamente, y por tanto la manera más natural de resolverlos es mediante un algoritmo recursivo. Sin embargo, el tiempo de ejecución de una solución recursiva, normalmente es de orden exponencial y por tanto impracticable. *Programación dinámica* es un método que reduce el tiempo de ejecución de un algoritmo mediante la utilización de subproblemas superpuestos y subestructuras óptimas.

Decimos que un problema exhibe *subestructura óptima* si una solución óptima del problema contiene soluciones óptimas de sus subproblemas. En programación dinámica se construye una solución óptima del problema a partir de soluciones óptimas de subproblemas. Decimos que un problema tiene *subproblemas superpuestos* si un mismo subproblema es usado varias veces para resolver diferentes problemas mayores.

El método de programación dinámica se aplica generalmente a problemas de

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.1. PROGRAMACIÓN DINÁMICA

optimización. En este tipo de problemas puede haber muchas soluciones posibles. Cada solución tiene un valor y lo que se desea es encontrar una solución con el valor óptimo (máximo o mínimo). Cabe notar que puede haber muchas soluciones óptimas posibles que ofrezcan el valor óptimo.

La solución de problemas mediante el método de programación dinámica se basa en el llamado principio de optimalidad de Bellman:

“Cualquier subsecuencia de decisiones de una secuencia óptima de decisiones que resuelve un problema también debe ser óptima respecto al subproblema que resuelve”.

El método de programación dinámica resuelve problemas combinando las soluciones de subproblemas. Los algoritmos de divide y vencerás particionan el problema en subproblemas independientes, resuelven los subproblemas recursivamente y luego combinan sus soluciones para resolver el problema original. Por el contrario, programación dinámica se aplica cuando los subproblemas no son independientes, esto es, cuando los subproblemas comparten subproblemas de subproblemas. Un algoritmo de programación dinámica resuelve cada subproblema sólo una vez y luego almacena la respuesta en una tabla, evitando por tanto el trabajo de recalcular la respuesta cada vez que el subproblema es encontrado.

Supongamos que un problema se resuelve tras tomar una secuencia d_1, d_2, \dots, d_n de decisiones. Si hay d opciones posibles para cada una de las decisiones, una técnica de fuerza bruta exploraría un total de d^n secuencias posibles de decisiones (explosión combinatoria). El método de programación dinámica evita explorar todas las secuencias posibles por medio de la resolución de subproblemas de tamaño creciente y almacenamiento en una tabla de soluciones óptimas de esos subproblemas para facilitar la solución de los problemas mas grandes.

A grandes rasgos, el diseño de un algoritmo de programación dinámica consta de los siguientes pasos:

1. Plantear la solución del problema como una sucesión de decisiones y verificar que ésta cumple el principio de optimalidad.
2. Definir recursivamente el valor de una solución óptima.
3. Calcular el valor de la solución óptima mediante una tabla en donde se almacenan soluciones a problemas parciales para reutilizar los cálculos.
4. Construir la solución óptima haciendo uso de la información contenida en la tabla anterior.

Debemos observar que aunque este principio parece evidente no siempre es aplicable y por tanto es necesario verificar que se cumple para el problema en cuestión. Un ejemplo claro para el que no se verifica este principio aparece al tratar de encontrar el camino de costo máximo entre dos vértices de un grafo ponderado. Para que un problema pueda ser abordado por esta técnica se deben cumplir dos condiciones:

- La solución del problema se debe alcanzar a través de una secuencia de decisiones, una en cada etapa.
- Dicha secuencia de decisiones debe cumplir el principio de optimalidad.

El método de programación dinámica toma normalmente uno de los dos siguientes enfoques:

Top-down: El problema se divide en subproblemas, y estos subproblemas se resuelven recordando las soluciones en caso de que sean necesarias nuevamente.

Bottom-up: Todos los subproblemas que puedan ser necesarios se resuelven de antemano y después son usados para resolver las soluciones a problemas mayores. Este enfoque es ligeramente mejor en consumo de espacio y llamadas a funciones, pero a veces resulta poco intuitivo encontrar todos los subproblemas necesarios para resolver un problema dado.

5.2. Algoritmo de Floyd-Warshall

Floyd-Warshall es un algoritmo de programación dinámica que resuelve el problema de encontrar los caminos más cortos entre cualesquiera dos vértices de un grafo dirigido con costos.

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con costos, cuya función de costo $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ mapea a las aristas en valores reales. Para nuestra conveniencia, asumiremos que los vértices del grafo están numerados desde 1 hasta n , donde $n = |V|$. Denotaremos por W a la matriz de costos de las aristas del grafo. Esto es, $W = (w_{ij})$, donde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \text{el costo de la arista } (i, j) & \text{si } i \neq j \text{ e } (i, j) \in E \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ e } (i, j) \notin E \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Dados dos vértices $u, v \in V$ deseamos encontrar un camino corto (con mínimo peso) de u a v . El costo de un camino $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ es la suma de los costos de las aristas que lo constituyen.

$$w(p) = \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i).$$

Definimos el *costo de un camino corto* de u a v como

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \text{mín}\{w(p) : p = u \rightsquigarrow v\} & \text{si existe un camino } p \text{ de } u \text{ a } v, \\ \infty & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

donde la expresión $u \rightsquigarrow v$ denota un camino que va del vértice u al vértice v .

Un *camino corto* del vértice u al vértice v es entonces definido como algún camino p con costo $w(p) = \delta(u, v)$.

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.2. ALGORITMO DE FLOYD-WARSHALL

Lema 5.2.1. *Dado un grafo dirigido con costos, $G = (V, E)$ con función de costo $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, sea $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ un camino corto del vértice v_1 al vértice v_k y, para i y j tales que $1 \leq i \leq j \leq k$, sea $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \dots, v_j \rangle$ un subcamino de p que va del vértice v_i al vértice v_j . Entonces, p_{ij} es un camino corto que va de v_i a v_j .*

Demostración. Si descomponemos el camino p en $p_{1i} = v_1 \rightsquigarrow v_i$, $p_{ij} = v_i \rightsquigarrow v_j$ y $p_{jk} = v_j \rightsquigarrow v_k$, entonces tenemos que $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$. Asumamos que existe un camino p'_{ij} que va de v_i a v_j con costo $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$. Entonces, $p = p_{1i} + p'_{ij} + p_{jk}$ es un camino que va de v_1 a v_k cuyo costo $w(p_{1i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk})$ es menor que $w(p)$, lo que contradice la asunción de que p es un camino corto que va de v_1 a v_k . ■

Los algoritmos desarrollados para la solución del problema de los caminos más cortos se basan en su mayoría en la propiedad de que un camino corto entre dos vértices contiene a su vez otros caminos cortos.

Para el problema de los caminos más cortos entre cualesquiera dos vértices de un grafo $G = (V, E)$ se utilizará el resultado del Lemma 5.2.1. Supondremos que el grafo G es representado por una matriz de adyacencia $W = (w_{ij})$. Consideremos un camino corto p de i a j , y supongamos que p contiene a lo más m aristas. Si $i = j$, entonces p tiene costo 0 y ninguna arista. Si los vértices i y j son distintos, entonces descomponemos el camino p en $p' = i \rightsquigarrow k$ y la arista (k, j) , donde p' contiene a lo más $m - 1$ aristas. Por el Lemma 5.2.1, p' es un camino corto de i a k y por tanto $\delta(i, j) = \delta(i, k) + w_{kj}$.

El algoritmo de Floyd-Warshall considera los vértices “intermedios” de un camino corto, donde un vértice *intermedio* de un camino simple $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle$ es cualquier vértice de p distinto de v_1 y v_l , esto es, cualquier vértice en el conjunto $\{v_2, v_3, \dots, v_{l-1}\}$.

El algoritmo de Floyd-Warshall se basa en la siguiente observación. Bajo la suposición de que los vértices de G son $V = \{1, 2, \dots, n\}$, consideremos un subconjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ de vértices para alguna k . Para cualquier par de vértices $i, j \in V$, consideremos todos los caminos que van de i a j cuyos vértices intermedios están en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$, y sea p un camino con costo mínimo entre ellos (el camino p es simple). El algoritmo de Floyd-Warshall explota la relación que existe entre el camino p y los caminos cortos que van de i a j con todos los vértices intermedios en el conjunto $\{1, 2, \dots, k - 1\}$. La relación depende del hecho de que k sea o no un vértice intermedio del camino p .

- Si k no es un vértice intermedio del camino p , entonces todos los vértices intermedios del camino p están en el conjunto $\{1, 2, \dots, k - 1\}$. Por tanto, un camino corto del vértice i al vértice j con todos los vértices intermedios en el conjunto $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ es también un camino corto de i a j con todos los vértices intermedios en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$.
- Si k es un vértice intermedio del camino p , entonces podemos partir p en dos subcaminos p_1 y p_2 , donde p_1 es un camino que va de i a k y p_2 es un camino

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.2. ALGORITMO DE FLOYD-WARSHALL

que va de k a j . Por el Lemma 5.2.1, p_1 es también un camino corto que va de i a k con todos los vértices intermedios en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$. Dado que k no es un vértice intermedio del camino p_1 , vemos que de hecho p_1 es un camino corto que va de i a k con todos los vértices intermedios en el conjunto $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Similarmente, p_2 es un camino corto que va del vértice k al vértice j con todos los vértices intermedios en el conjunto $\{1, 2, \dots, k-1\}$.

Basado en las observaciones anteriores, definimos una solución recursiva de la estimación de los caminos más cortos. Denotemos como $d_{ij}^{(k)}$ el costo de un camino corto que va del vértice i al vértice j cuyos vértices intermedios están en el conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$. Cuando $k = 0$, un camino que va del vértice i al vértice j no tiene vértices intermedios. Por tanto, dicho camino tiene a lo más una arista, así $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$. En base a lo que se ha comentado anteriormente podemos dar una definición recursiva de la solución.

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Dado que para cualquier camino, todos los vértices intermedios están en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$, la matriz $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ da la respuesta final: $d_{ij}^{(n)} = \delta(i, j)$ para todo $i, j \in V$.

Basado en la recurrencia (5.2.2), el siguiente procedimiento ascendente puede ser usado para calcular los valores $d_{ij}^{(k)}$ en orden de valores crecientes de k . La entrada es una matriz W de tamaño $n \times n$ definido en la ecuación (5.2.1). El procedimiento retorna la matriz $D^{(n)}$ de los costos de los caminos más cortos entre cualesquiera dos vértices del grafo.

Algoritmo 1 FLOYD-WARSHALL

Entrada: Matriz de adyacencia W .

Salida: Matriz de costo mínimo $D^{(n)}$.

```
1:  $n \leftarrow \dim[W]$ .
2:  $D^{(0)} \leftarrow W$ .
3: para  $k \leftarrow 1$  hasta  $n$  hacer
4:   para  $i \leftarrow 1$  hasta  $n$  hacer
5:     para  $j \leftarrow 1$  hasta  $n$  hacer
6:        $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ .
7:     fin para
8:   fin para
9: fin para
10: retornar  $D^{(n)}$ 
```

Consideremos ahora un conjunto de ciudades que están interconectadas por medio de puentes, dichos puentes pueden soportar un peso máximo. Supongamos que un conjunto de turistas desea ir de una ciudad a otra y se dispone solamente de

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN
5.2. ALGORITMO DE FLOYD-WARSHALL

un camión de transporte para hacerlo, lo que se desea es maximizar el número de personas que deben ir en el camión sin violar el peso máximo que pueden soportar los puentes de la ruta a seguir. En base a lo anterior es obvio que el costo de una ruta en particular se puede definir como el mínimo de los pesos soportados por cada uno de los puentes en la ruta. Por tanto, lo que se desea es hallar el máximo costo entre todas las rutas posibles entre dos ciudades.

Formalmente se tiene lo siguiente. Sea $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_l \rangle$ un camino que va de v_0 a v_l , entonces definimos el costo del camino p como el mínimo de los costos de las aristas que lo constituyen, es decir,

$$w(p) = \min_{1 \leq i \leq l} \{w(v_{i-1}, v_i)\}.$$

Definimos el costo de un camino óptimo que va del vértice u al vértice v como

$$\delta(u, v) = \begin{cases} \max\{w(p) : p = u \rightsquigarrow v\} & \text{si existe un camino de } u \text{ a } v, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Siguiendo un razonamiento análogo al presentado para llegar a la relación de recurrencia (5.2.2) se puede ahora definir la siguiente recurrencia:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{si } k = 0, \\ \max(d_{ij}^{(k-1)}, \min(d_{ik}^{(k-1)}, d_{kj}^{(k-1)})) & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Veamos ahora la relación que existe entre este problema y el problema que nos ocupa en la presente tesis.

Nuestro problema fundamental consiste en la extracción de objetos difusos, que no son otra cosa que componentes conexas difusas. Sin embargo, como podemos notarlo en la ecuación (4.7.1) la definición de una componente conexa difusa se basa en la definición de la relación binaria K_θ , la cual a su vez se basa en los valores de la relación difusa K , como podemos corroborarlo en la ecuación (4.6.2). Por esta razón es que el problema de extracción de objetos difusos se reduce a calcular los valores de $\mu_K(c, d)$, para cualesquiera dos spels $c, d \in C$.

Dados un escenario de membresía $\zeta = (C, f)$ sobre un espacio digital difuso (\mathbb{Z}^n, α) , una afinidad de spels difusos κ , la κ -red difusa \mathcal{N} , y la relación de conexidad difusa K , de la ecuación (4.6.1) podemos ver que si c y d son dos spels en C , entonces se define:

$$\mu_K(c, d) = \max_{p \in P_{cd}} [\mu_{\mathcal{N}}(p)].$$

donde para $p = \langle c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(m)} \rangle$, con $c^{(i)}$ en C , se tiene que:

$$\mu_{\mathcal{N}}(p) = \min[\mu_\kappa(c^{(0)}, c^{(1)}), \mu_\kappa(c^{(1)}, c^{(2)}), \dots, \mu_\kappa(c^{(m-1)}, c^{(m)})]$$

Si consideramos a los elementos del espacio (spels) como vértices de un grafo $G = (V, E)$ y definimos el costo de las aristas como la afinidad que existe entre ellas,

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.3. EXTRACCIÓN DE OBJETOS DIFUSOS (FOE).

es decir, dados $c, d \in C$ se define el costo $w(c, d)$ de la arista (c, d) como:

$$w(c, d) = \mu_\kappa(c, d).$$

Entonces podemos observar que G es un grafo cuyos vértices están todos conectados entre sí puesto que la afinidad puede ser calculada entre cualesquiera dos elementos del espacio, y además el rango de valores para los costos de las aristas varía entre 0 y 1. Por la forma que tiene la κ -red difusa \mathcal{N} , si $p = \langle c^{(0)}, c^{(1)}, \dots, c^{(m)} \rangle$ es un camino que va del spel $c^{(0)}$ al spel $c^{(m)}$, entonces se define el costo $w(p)$ del camino p como $w(p) = \mu_{\mathcal{N}}(p)$, es decir:

$$w(p) = \min_{1 \leq i \leq m} (\mu_\kappa(c^{(i-1)}, c^{(i)})).$$

Luego, la fuerza de conexión real (costo óptimo) entre dos spels c y d en C se define como:

$$\delta(c, d) = \mu_K(c, d).$$

Dado que las definiciones de la función de costos y del costo de un camino óptimo entre dos spels coinciden con las definiciones del problema planteado anteriormente, se puede aplicar entonces la recurrencia (5.2.3) para hallar los valores de $\mu_K(c, d)$ entre cualesquiera dos spels $c, d \in C$.

5.3. Extracción de Objetos Difusos (FOE).

Presentamos dos algoritmos para la extracción de objetos n-difusos, ambos basados en el método de programación dinámica. En el primer algoritmo, llamado $\kappa\theta_xFOE$ el valor de θ_x es especificado de antemano y el algoritmo hace uso esencial de esta predeterminación. En el segundo algoritmo, llamado κFOE no asumimos que θ_x es conocido de antemano. El algoritmo $\kappa\theta_xFOE$ termina más rápido que κFOE por dos razones:

Primero, cuando θ_x es conocido de antemano, no se necesita encontrar el mejor camino p_{oc} de o (el spel contenido en el $\kappa\theta_x$ -objeto difuso de ζ a ser extraído) a $c \in C$ tal que $\mu_K(o, c) = \mu_{\mathcal{N}}(p_{oc})$. Mas bien, es suficiente encontrar un camino p'_{oc} tal que $\mu_{\mathcal{N}}(p'_{oc}) \geq x$. Cuando el primer p'_{oc} satisfaciendo esta condición es encontrado, la búsqueda para el mejor camino de o a c puede ser entonces detenida. Segundo, ciertos cálculos pueden ser evitados para aquellos spels $d \in C$ para los cuales $\mu_K(o, d) < x$.

Aunque κFOE termina lentamente, tiene la ventaja práctica de que x puede ser especificada interactivamente después de que el algoritmo termina y por tanto hace posible elegir la fuerza de conexidad apropiada para definir el $\kappa\theta_x$ -objeto difuso apropiadamente. El algoritmo esencialmente arroja un escenario expresando la fuerza de conexidad entre o y todos los spels $c \in C$. Llamaremos este escenario el K_o -escenario ζ_o de ζ , definido por $\zeta_o = (C_o, f_o)$ donde $C_o = C$ y para todo $c \in C_o$, $f_o(c) = \mu_K(o, c)$. Aplicando umbral a este escenario para varios valores de x , podemos examinar los distintos $\kappa\theta_x$ -objetos que resultan. Este escenario tiene propiedades

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.3. EXTRACCIÓN DE OBJETOS DIFUSOS (FOE).

interesantes que son relevantes para n-clasificación y n-segmentación, entre otras cosas. Para terminar esta discusión deseamos enfatizar que, siempre que $f_o(c) \geq x$ y $f_o(d) \geq x$ para cualquier spel $c, d \in C$, la transitividad de K garantiza que $\mu_K(c, d) \geq x$.

Como un compromiso entre la velocidad y la utilidad práctica, es mejor correr el algoritmo $\kappa\theta_x FOE$ para $x > 0$, sin embargo, el valor elegido de x debe ser lo suficientemente pequeño, de tal forma que sea menor a la fuerza de conexidad que nosotros esperamos entre los elementos del objeto de interés. Esto asegurará que el algoritmo termine sustancialmente más rápido que κFOE , y por la Proposición 4.8.5 la conveniencia de decidir y elegir el valor de y después de la terminación del algoritmo es retenida.

Habíamos comentado que los algoritmos de segmentación presentados en esta tesis se basaban en la técnica de segmentación por crecimiento de regiones. Basta observar que el elemento que nos sirve de semilla en este caso corresponde al spel especificado o . En el paso 2 se van agregando aquellos spels que son afines a o y posteriormente en el paso 9 se agregan los spels restantes que son afines a los elementos ya agregados. Recordemos que la relación de afinidad toma en consideración el grado de adyacencia, así como los valores de membresía de cada spel en el escenario ζ .

El escenario arrojado por el algoritmo puede servir ya sea para hacer segmentación mediante un proceso de umbralado, o bien, clasificación, para identificar al objeto con un subconjunto difuso del escenario de membresía ζ .

Algoritmo 2 $\kappa\theta_x FOE$

Entrada: ζ, o, κ y θ_x .

Salida: $\zeta_{\theta_x}(o)$.

- 1: Fijar todos los elementos de ζ_o a 0, excepto o , el cual es fijado a 1;
 - 2: Insertar todos los spels $c \in C_o$ tales que $\mu_\kappa(o, c) > 0$ en Q ;
 - 3: **mientras** Q no esté vacío **hacer**
 - 4: Remove un spel c de Q ;
 - 5: **si** $f(c) < x$, **entonces**
 - 6: Hallar $f_{max} = \max_{d \in C_o} [\min(f_o(d), \mu_\kappa(c, d))]$;
 - 7: **si** $f_{max} > f_o(c)$ y $f_{max} \geq x$, **entonces**
 - 8: Fijar $f_o(c) = f_{max}$;
 - 9: Insertar todos los spels e tales que $\mu_\kappa(c, e) > 0$ en Q ;
 - 10: **fin si**
 - 11: **fin si**
 - 12: **fin mientras**
 - 13: Crear y sacar $\zeta_{\theta_x}(o)$ asignando a aquellos spels $c \in C_o$, para los cuales $f_o(c) \neq 0$, el valor de $f(c)$ y al resto el valor 0.
-

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.3. EXTRACCIÓN DE OBJETOS DIFUSOS (FOE).

Algoritmo 3 κFOE

Entrada: ζ, o, κ .

Salida: El K_o -escenario $\zeta_o = (C_o, f_o)$ de ζ .

- 1: Fijar todos los elementos de ζ_o a 0, excepto o , el cual es fijado a 1;
- 2: Insertar todos los spels $c \in C_o$ tales que $\mu_\kappa(o, c) > 0$ en Q ;
- 3: **mientras** Q no esté vacío **hacer**
- 4: Remove un spel c de Q ;
- 5: Hallar $f_{max} = \max_{d \in C_o} [\min(f_o(d), \mu_\kappa(c, d))]$;
- 6: **si** $f_{max} > f_o(c)$ **entonces**
- 7: Hacer $f_o(c) = f_{max}$;
- 8: Insertar todos los elementos e tales que $\mu_\kappa(c, e) > 0$ to Q ;
- 9: **fin si**
- 10: **fin mientras**

Para generar el $\kappa\theta_x$ -objeto difuso que contiene al píxel o , se debe aplicar el paso 13 del algoritmo $\kappa\theta_x FOE$ sobre el K_o -escenario ζ_o , con la única modificación de que la expresión $f_o(c) \neq 0$ se sustituye por $f_o(c) \geq x$. Ambos algoritmos son iterativos y ellos trabajan como sigue. Dentro del ciclo iterativo, un spel c de ζ_o es examinado para ver si los caminos de o hacia cada uno de los spels d pueden ser extendidos hasta c de una forma provechosa. El spel d que realmente intervendrá depende de α . Si se toma la adyacencia de spels difusos α como alguna de las relaciones de adyacencia rígidas comúnmente usadas, entonces los spels que intervienen son justamente los vecinos inmediatos (4-adyacentes). El arreglo ζ_o , que eventualmente contiene el K_o -escenario, contiene la fuerza de conexidad $\mu_\kappa(o, d)$ para los elementos individuales d de ζ_o . Para determinar la extensión provechosa de los caminos hasta c , se hace una prueba min-max en el paso 6 y si se encuentra un camino más fuerte (en el paso 7) la fuerza más alta se asigna a c (en el paso 8).

Proposición 5.3.1. *Los algoritmos $\kappa\theta_x FOE$ y κFOE terminan. Cuando lo hacen, ellos arrojan respectivamente el $\kappa\theta_x$ -objeto conteniendo o y el K_o -escenario de ζ .*

Bosquejo de la prueba: Que el algoritmo de programación dinámica estándar termina y produce la salida correcta es un resultado establecido [4]. Nuestras modificaciones son esencialmente en los pasos 2 y 9 en el algoritmo κFOE y en los pasos 2, 5 y 9 en el algoritmo $\kappa\theta_x FOE$

Afirmamos que los pasos 2 y 9 no afectan la terminación de κFOE y que ellos no hacen la salida de κFOE diferente de la salida del algoritmo estándar. Para probar la afirmación, supongamos que un spel e tal que $\mu_\kappa(c, e) = 0$ es puesta en Q en los pasos 2 o 9. Cuando se remueva e en el paso 4, f_{max} será 0 en el paso 6 y por tanto, los pasos 8 y 9 no serán ejecutados.

Para probar que el algoritmo $\kappa\theta_x FOE$ es correcto, primero observamos que el valor asignado a cada spel en ζ_o nunca decrece con el crecimiento del número de iteraciones del ciclo hacer-mientras. Afirmamos que las salidas de $\kappa\theta_x FOE$ con y

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.4. ETIQUETADO DE OBJETOS DIFUSOS (FOL).

sin el paso 5 son idénticos. Para probar esta afirmación, sea c el primer spel para el cual $f_o(c) = x' \geq x$ en el paso 5 (al menos uno de tales spels debe existir dado que $f_o(o) = 1$). Supóngase que ignoramos el paso 5, llevando a cabo el paso 6 en adelante, y digamos que $f_o(c)$ es actualizado en el paso 8 a x'' (si esto no pasa no hay nada que probar). Obviamente $x'' > x'$. Sea e un spel para el cual $\mu_\kappa(c, e) > 0$ es puesto en Q en el paso 9 (si no existe tal spel, no hay nada que probar). Cuando éste spel es removido de Q en el paso 4, hay dos casos a ser considerados para e en el paso 5:

$f_o(e) \geq x$. Obviamente, el cambio en el valor de e de x' a x'' no consigue que $f_o(e) \geq x$.

$f_o(e) < x$. Es fácil checar que el valor de e no cambiará de $f_o(e) < x$ a $f_o(e) \geq x$ por el sólo cambio del valor de e de x' a x'' .

Por tanto, la salida en el paso 13 será idéntico con o sin el paso 5. ■

Dado que encontramos que el algoritmo κFOE es mucho más práctico y más útil, aunque menos eficiente que el algoritmo $\kappa\theta_x FOE$, el resto de nuestra discusión en esta sección se referirá a κFOE . Sin embargo, muchos de estos comentarios se aplicarán a $\kappa\theta_x FOE$ también.

El costo computacional de κFOE es determinado principalmente por α y κ . Obviamente, entre más grande sea la “vecindad” de α (i.e. el número de spels d para los cuales $\mu_\alpha(c, d) > 0$), más caros serán los pasos 6 y 9.

Dado que para algunos spels c , $\mu_\kappa(c, d)$ es evaluado más de una vez, es aconsejable almacenar estos valores cuando ellos son calculados por primera vez si un espacio de almacenamiento adecuado está disponible. (Note que es suficiente almacenar $\mu_\kappa(c, d)$ ó $\mu_\kappa(d, c)$ dado que κ es simétrico). Es posible que en el paso 9, un spel e que va a ser colocado en Q esté ya en Q . En algunos casos, puede resultar más barato buscar e en Q que el costo incurrido en los cálculos subsecuentes repetidos para múltiples copias de e que son otra vez necesitadas. En los algoritmos que se presentan, no hemos incorporado alguna de estas optimizaciones computacionales.

5.4. Etiquetado de Objetos Difusos (FOL).

Los algoritmos presentados anteriormente ofrecen una solución para el problema de extracción de objetos n-difusos. El algoritmo que ahora se describe llamado $\kappa\theta_x FOL$ usa el algoritmo $\kappa\theta_x FOE$ para resolver el problema de etiquetado de objetos n-difusos.

Proposición 5.4.1. *El algoritmo $\kappa\theta_x FOL$ termina. Cuando lo hace, saca una copia de cada $\kappa\theta_x$ -objeto de ζ .*

CAPÍTULO 5. ALGORITMOS DE SEGMENTACIÓN

5.4. ETIQUETADO DE OBJETOS DIFUSOS (FOL).

Algoritmo 4 $\kappa\theta_x FOL$.

Entrada: ζ, κ y θ_x .

Salida: El conjunto de todos los $\kappa\theta_x$ -objetos de ζ .

- 1: Poner una copia de cada spel C en C' ;
 - 2: Remover un spel o de C' ;
 - 3: **mientras** Q no esté vacío **hacer**
 - 4: remover un spel c de Q ;
 - 5: hallar $f_{max} = \max_{d \in C_o} [\min(f_o(d), \mu_\kappa(c, d))]$;
 - 6: **si** $f_{max} > f_o(c)$ **entonces**
 - 7: hacer $f_o(c) = f_{max}$;
 - 8: colocar todos los elementos e tales que $\mu_\kappa(c, e) > 0$ to Q ;
 - 9: **fin si**
 - 10: **fin mientras**
-

Demostración. El resultado se sigue directamente de la Proposición 5.3.1 y el Corolario 4.8.4. ■

El algoritmo anterior es más directo. Esencialmente encuentra todas las clases de equivalencia en C de la relación binaria K_{θ_x} definida en la ecuación (4.6.2).

Deseamos resaltar que en muchas situaciones, el número de spels en el conjunto $\Omega_{\theta_x}(o)$ (definido en la ecuación (4.8.1)) para $x > 0$ puede ser sólo 1; esto es, el conjunto contiene solamente a o . Por ejemplo, si ζ representa el escenario de membresía de los huesos de una articulación, hay muchos spels en ζ que no contienen algún hueso. Para cada spel o , $\Omega_{\theta_x}(o)$ será un conjunto de un sólo elemento (esto es porque la κ -conexidad difusa K es reflexiva). El problema de encontrar todos los huesos de la articulación, cada uno expresado como un $\kappa\theta_x$ -objeto difuso, es sin embargo, ciertamente legítimo. El algoritmo $\kappa\theta_x FOL$ es fácilmente modificable para que omita las componentes singulares tales que solamente las componentes reales de los huesos sean extraídas.

Capítulo 6

Aplicaciones

En esta sección, mostraremos el uso de la teoría y de los algoritmos presentados en las secciones previas en la segmentación y clasificación de imágenes basados en varios ejemplos extraídos de imágenes médicas. Primero, hacemos una breve discusión sobre la elección de las adyacencias y afinidades de spels difusos.

6.1. Selección de Adyacencias y Afinidades de spels difusos.

Generalmente es recomendable elegir α como una relación de adyacencia rígida, 4-adyacencia para $n = 2$. Esto es, para todo $c, d \in C$:

$$\mu_\alpha(c, d) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - d_i)^2} \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La forma general de μ_κ puede ser escrita como sigue. Para todo $c, d \in C$,

$$\mu_\kappa(c, d) = h(\mu_\alpha(c, d), f(c), f(d), c, d)$$

donde h es una función con valores escalares con rango $[0, 1]$. La dependencia de h sobre la localización de spels indica que puede ser variante. La función $\mu_\kappa(c, d)$ que se presenta a continuación es independiente de c y d . Para todo $c, d \in C$, se define

$$\begin{aligned} \mu_\kappa(c, d) &= \mu_\alpha(c, d)[w_1 h_1(f(c), f(d)) + w_2 h_2(f(c), f(d))] \quad \text{si } c \neq d, \\ \mu_\kappa(c, c) &= 1. \end{aligned}$$

donde w_1 y w_2 son parámetros libres satisfaciendo

$$w_1 + w_2 = 1.$$

La forma funcional para h_1 y h_2 son elegidas de uno de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
 g_1(f(c), f(d)) &= e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{\frac{1}{2}(f(c)+f(d))-m_1}{s_1} \right]^2}, \\
 g_2(f(c), f(d)) &= e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{|f(c)-f(d)|-m_2}{s_2} \right]^2}, \\
 g_3(f(c), f(d)) &= 1 - g_1(f(c), f(d)), \\
 g_4(f(c), f(d)) &= 1 - g_2(f(c), f(d)).
 \end{aligned}$$

En estas expresiones, m_1 , m_2 y s_1 , s_2 representan la media y la desviación estándar de los valores de los spels y sus diferencias (magnitud del gradiente) en el escenario de membresía para los spels que están en el objeto de interés.

6.2. Segmentación y Clasificación

Para hacer segmentación, podemos simplemente umbralizar el escenario K_o para una fuerza apropiada de conexidad, es decir, proponer una fuerza de conexión x y asignar a todos los spels c para los cuales $f_o(c) \geq x$ el valor de 1 y al resto el valor 0. Notemos que éste es un umbralado sobre las relaciones que existen entre los spels y sobre el grado de pertenencia para el objeto en cuestión y es completamente diferente del umbralado sobre el escenario original.

Dado que las imágenes son por naturaleza difusas, es más apropiado, y generalmente más exacto, hacer n-clasificación en vez de n-segmentación. Una posible aproximación a n-clasificación es expresar el κ_{θ_x} -objeto extraído del escenario dado (estrictamente hablando, una versión escalada de éste para convertirlo en un escenario de membresía) como un escenario de membresía. Otra alternativa que puede arrojar buenos resultados es usar el K_o -escenario $\zeta_o = (C_o, f_o)$ con las siguientes modificaciones como salida del escenario de membresía: fijar los valores de aquellos spels c para los cuales $f_o(c) < x$ a 0 y los valores de los spels restantes a $f_o(c)$.

Esto parece más adecuado, puesto que $f_o(c)$ es un mejor indicador del objeto que los valores de los spels $f(c)$ en el escenario original.

6.3. Resultados

En adelante, para todos los resultados presentados en esta sección, α es una relación de adyacencia difusa cuya función de membresía tiene la siguiente forma:

$$\mu_\alpha(c, d) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i - d_i)^2}} & \text{si } \sum_{i=1}^n |c_i - d_i| \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y κ es una relación de afinidad difusa que posee la función de membresía:

$$\mu_{\kappa}(c, d) = \frac{\mu_{\alpha}(c, d)}{1 + |f(c) - f(d)|}$$

La computadora que se utilizó para el desarrollo de la tesis, principalmente en la implementación de los algoritmos, tiene las siguientes características: Modelo LANIX TITAN 4000, Tarjeta madre LITTLE VALLEY, Procesador CELERON 215 1.33 GH, Disco duro 80 GB, Módulo de memoria de 1GB DDR2 667 MH.

Los algoritmos fueron implementados en MATLAB y C++. La razón de utilizar MATLAB es porque tiene comandos predefinidos para obtener la matriz en escala de grises asociada a la imagen, sin embargo, esta escala varía en el rango $[0, 255]$, por ello es que proyectamos estos valores al intervalo $[0, 1]$, para que sea propiamente un escenario de membresía. El proceso de proyección es sencillo, puesto que sólo se dividen los valores de la matriz por 255 que es el máximo valor que se puede tener. En adelante se trabaja con los nuevos valores de esta matriz, que en esencia constituyen el escenario de membresía.

Para cada una de las imágenes presentadas, el primer conjunto corresponde a las imágenes que se obtiene por un procedimiento de n-segmentación, es decir, imágenes binarias que resultan de aplicar un procedimiento de umbralado sobre el escenario arrojado por el algoritmo, mas detalladamente, dado un valor del umbral x , a aquellos spels c en C_o que cumplen que $f_o(c) \geq x$ se les asigna el valor 1 y al resto el valor 0. El segundo conjunto de imágenes corresponde a las imágenes que se obtienen por un procedimiento de n-clasificación donde los valores del umbral que se utilizaron son los mismos que se ocuparon para n-segmentación, la diferencia del proceso de umbralado en este caso es que a aquellos spels c en C_o que cumplen que $f_o(c) \geq x$ se les asigna el valor de $f(c)$ y al resto el valor 0. Los valores del umbral se tomaron en base a los valores observados del escenario $\zeta_o = (C_o, f_o)$ arrojado por el algoritmo κFOE .

La primera imagen de cada conjunto corresponde a la imagen original y en seguida se muestran las imágenes obtenidas después de haberles aplicado un proceso de n-segmentación o n-clasificación, según sea el caso.

Al final de cada conjunto de imágenes se tiene una imagen con un objeto muy pequeño, esta última imagen nos da una idea de la ubicación del spel o seleccionado para la aplicación del algoritmo κFOE .

6.3.1. Ejemplo1.- Múltiple Esclerosis

Uno de los problemas que se tratan en el área médica es la detección de tejidos dañados y lesiones de esclerosis múltiples en el cerebro, por ello es tan importante la tarea de la identificación de objetos que conforman la imagen original del cerebro. A continuación presentamos la imagen de un cerebro vista desde la parte superior, que se obtuvo de la siguiente dirección en Internet: <http://www.med.harvard.edu/AANLIB/cases/case38/mr1/013.html> el día 11 de Junio del 2008. El tamaño de la imagen es de 233x172 píxeles. Aquí podemos apreciar como el algoritmo arroja muy buenos resultados, tanto en segmentación como en clasificación, de hecho, las regiones finales se parecen bastante para un valor del umbral $x=0.479$. Para darse una idea del spel que se especificó en un principio basta observar las imágenes en los que el valor del umbral es $x=0.50$. Después de la imagen original, el conjunto de imágenes segmentadas no se alcanza a distinguir perfectamente, esto se debe a que la fuerza de conexión entre el spel especificado y los spels restantes es mayor que el valor especificado del umbral, conforme vamos aumentando el valor del umbral, podemos ver que las regiones oscuras van aumentando, hasta que finalmente se observa un fondo oscuro y a partir de éste, el objeto se va definiendo cada vez más. El tiempo de ejecución del algoritmo para esta imagen fué de 22 minutos.

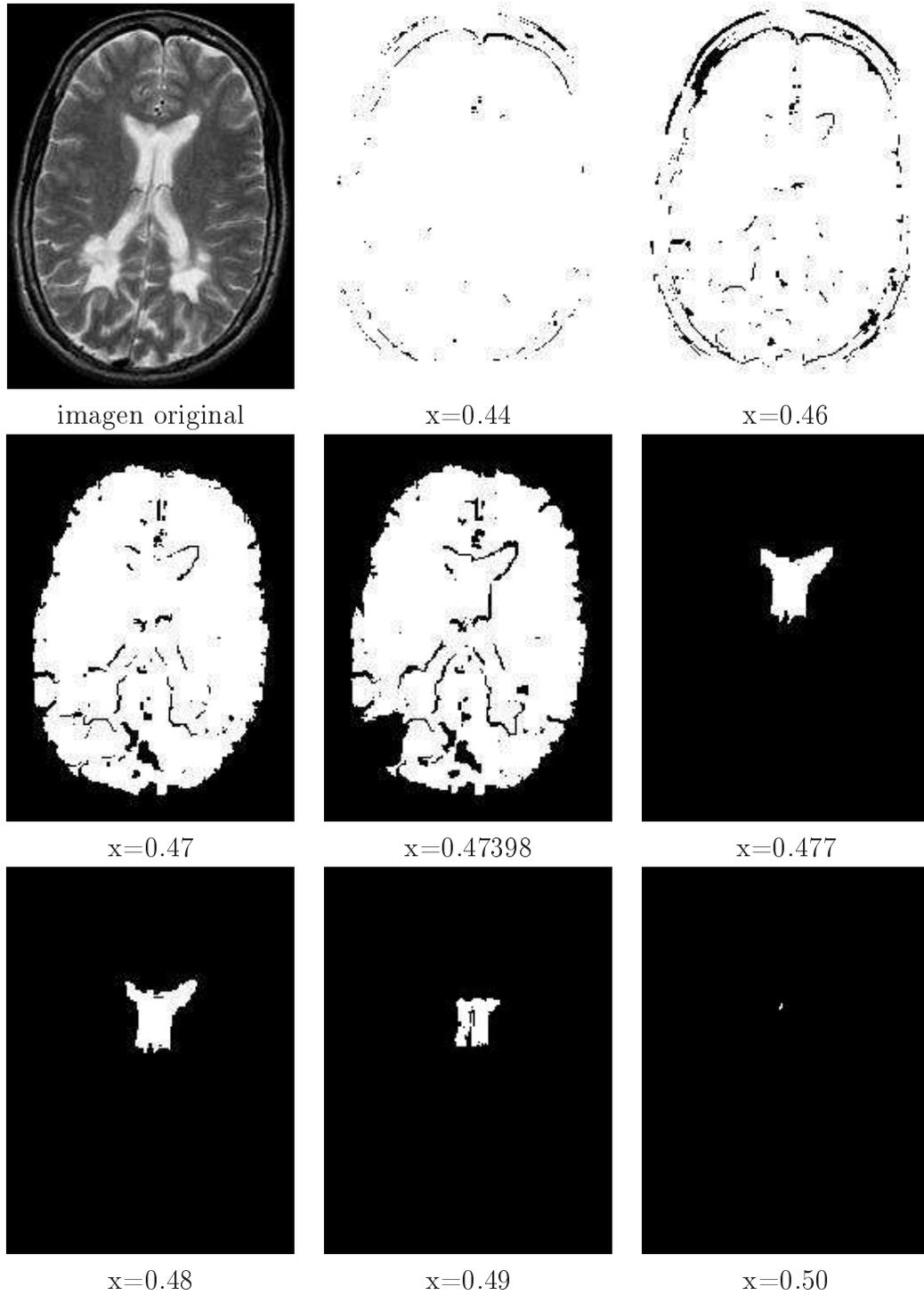


Figura 6.1: Segmentación: Múltiple Esclerósisis

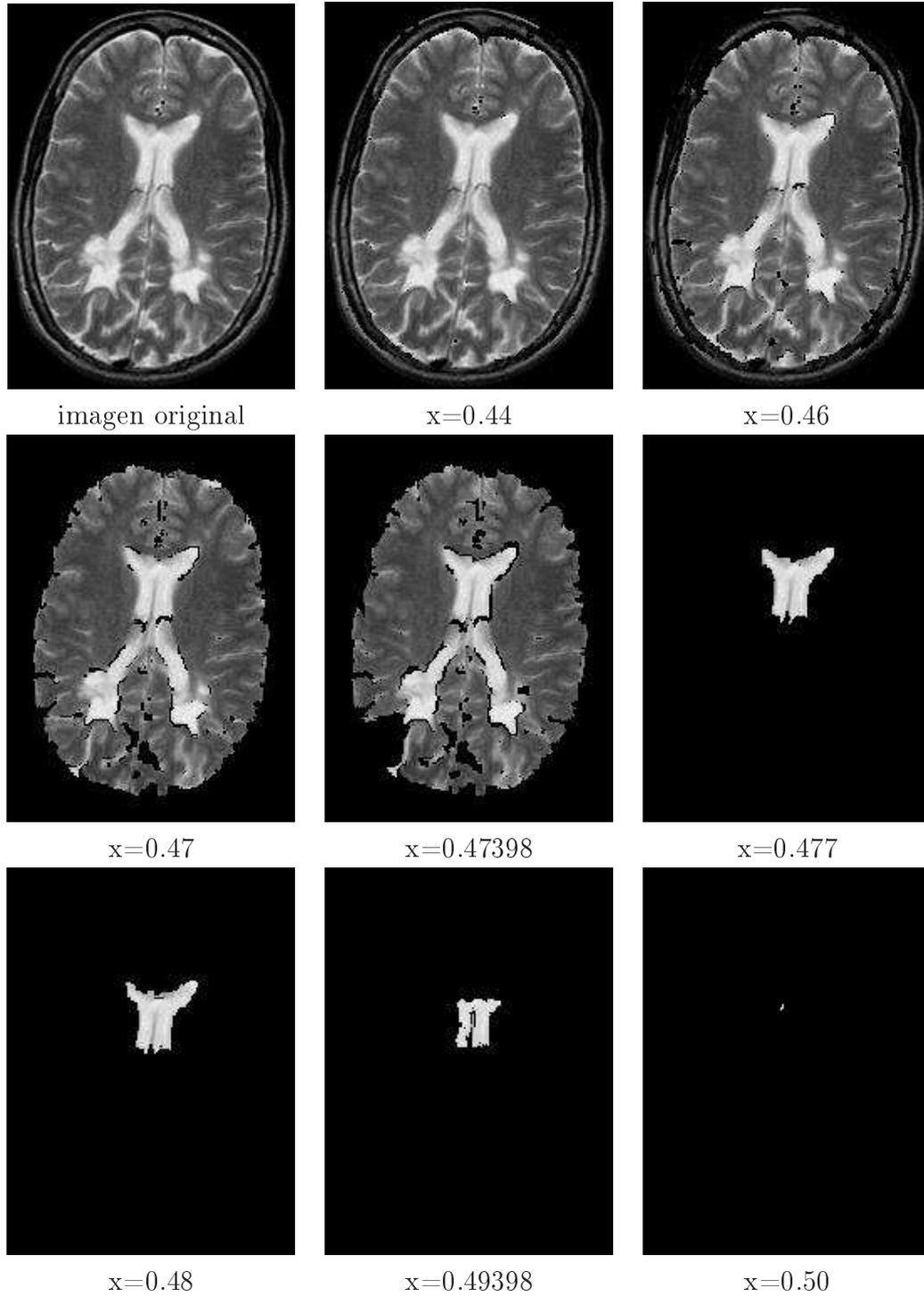


Figura 6.2: Clasificación: Múltiple Esclerosis

6.3.2. Ejemplo2.- Resonancia Magnética del cerebro

La imagen siguiente que presentamos se descargó de la siguiente dirección: <http://www.med.harvard.edu/AANLIB/cases/case5/mr2/020.html> el día 11 de Junio del 2008. El tamaño de la imagen es de 227x172 píxeles. Al igual que en el conjunto de imágenes presentadas anteriormente podemos apreciar que las imágenes segmentadas no se aprecian con detalle, mientras que las imágenes clasificadas parecen permanecer iguales, sin embargo, sabemos que cambian precisamente porque las imágenes segmentadas están cambiando conforme incrementamos el valor del umbral, y ambos objetos se están definiendo a partir de un mismo valor del umbral x . Entre más blanco se vea la imagen segmentada, nos damos cuenta de que la fuerza de conexidad entre el spel especificado y los spels restantes es mucho mayor que el umbral que estamos proponiendo. Como podemos apreciar, para valores de $x=0.468$ y $x=0.469$ se tienen objetos que están mejor definidos, si se desea extraer una región con mayor definición entonces hay que probar con valores que varíen entre los presentados anteriormente. EL objeto que resulta al final (cuando $x=0.469$) ilustra bien la forma en que trabaja el algoritmo, puesto que a simple vista parece que los elementos que se encuentra al centro de la imagen están fuertemente conectados con el spel especificado, formando una especie de corona, sin embargo conforme vamos aumentando el valor del umbral observamos que en realidad la fuerza de conexión entre ellas es débil. El tiempo de ejecución del algoritmo para esta imagen fue de 23 minutos.

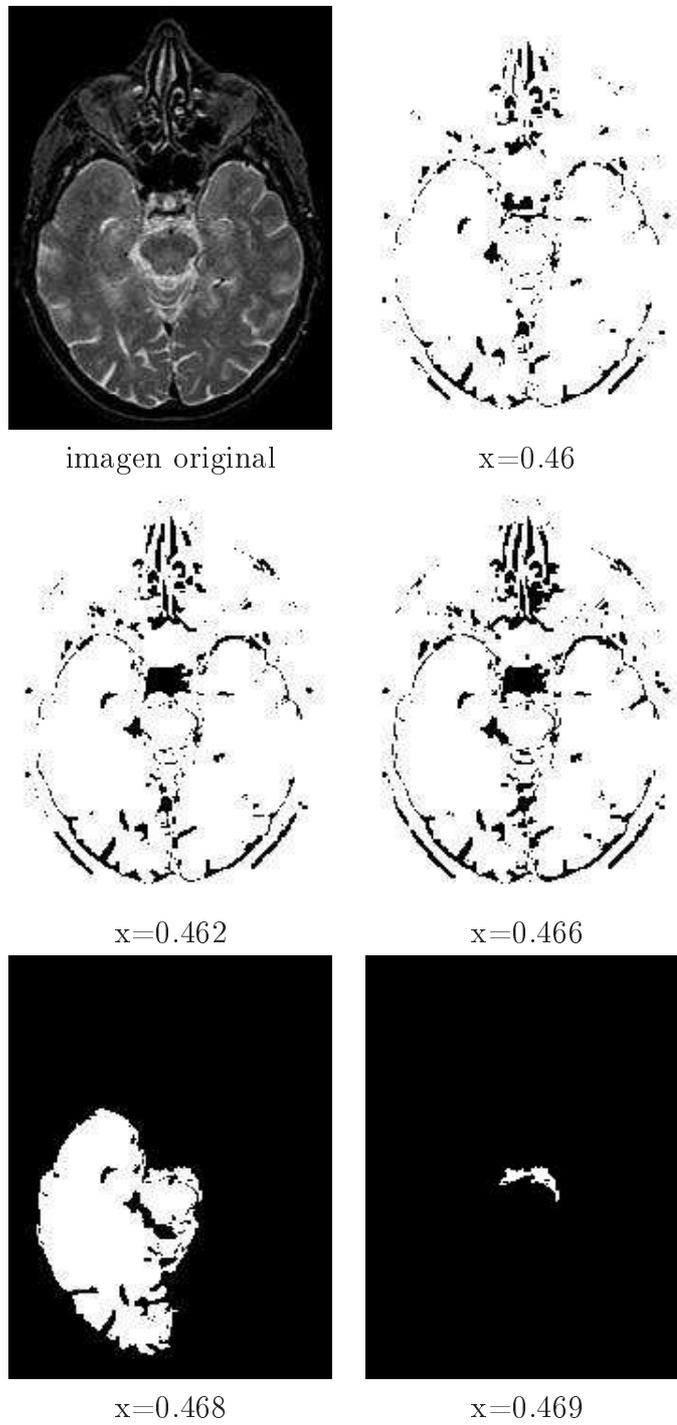


Figura 6.3: Segmentación: Cerebro

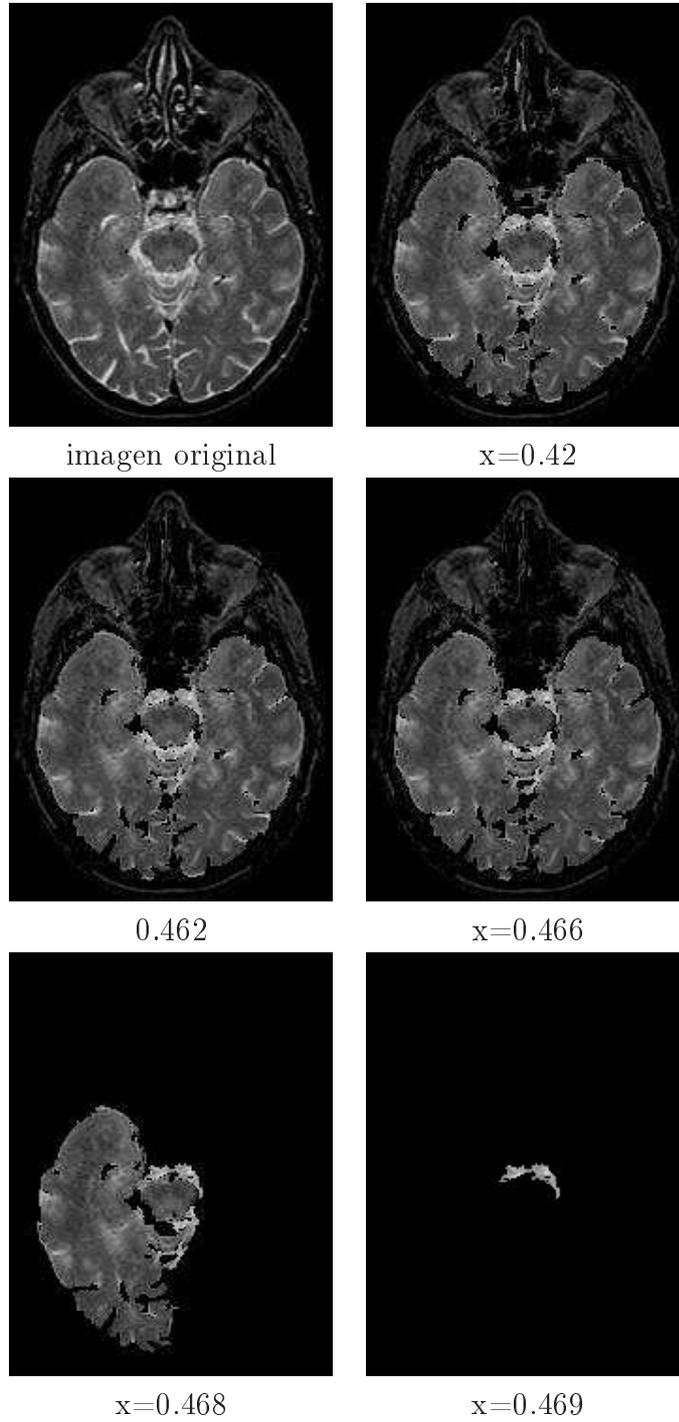


Figura 6.4: Clasificación: Cerebro

6.3.3. Ejemplo3.- Rayos x: Codo

La imagen que presentamos a continuación fue obtenida de la siguiente dirección: <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/4685/Images/rx.htm> el día 11 de Junio del 2008. Esta imagen se obtuvo mediante la técnica de rayos X. El tamaño de la imagen es de 441x324 píxeles. Lo que podemos observar en las imágenes tanto segmentadas como clasificadas es que no existe una buena definición de los objetos, esto se debe principalmente a que los valores de los spels en el escenario correspondiente a la imagen original varían de forma muy drástica, es decir se mezclan valores pequeños con valores grandes. Esto origina que a pesar de que los spels sean lo suficientemente cercanos, sus valores de membresía los separan considerablemente, y no existe uniformidad en los valores de spels consecutivos. El tiempo de ejecución del algoritmo para esta imagen fué de 2 horas 44 minutos.

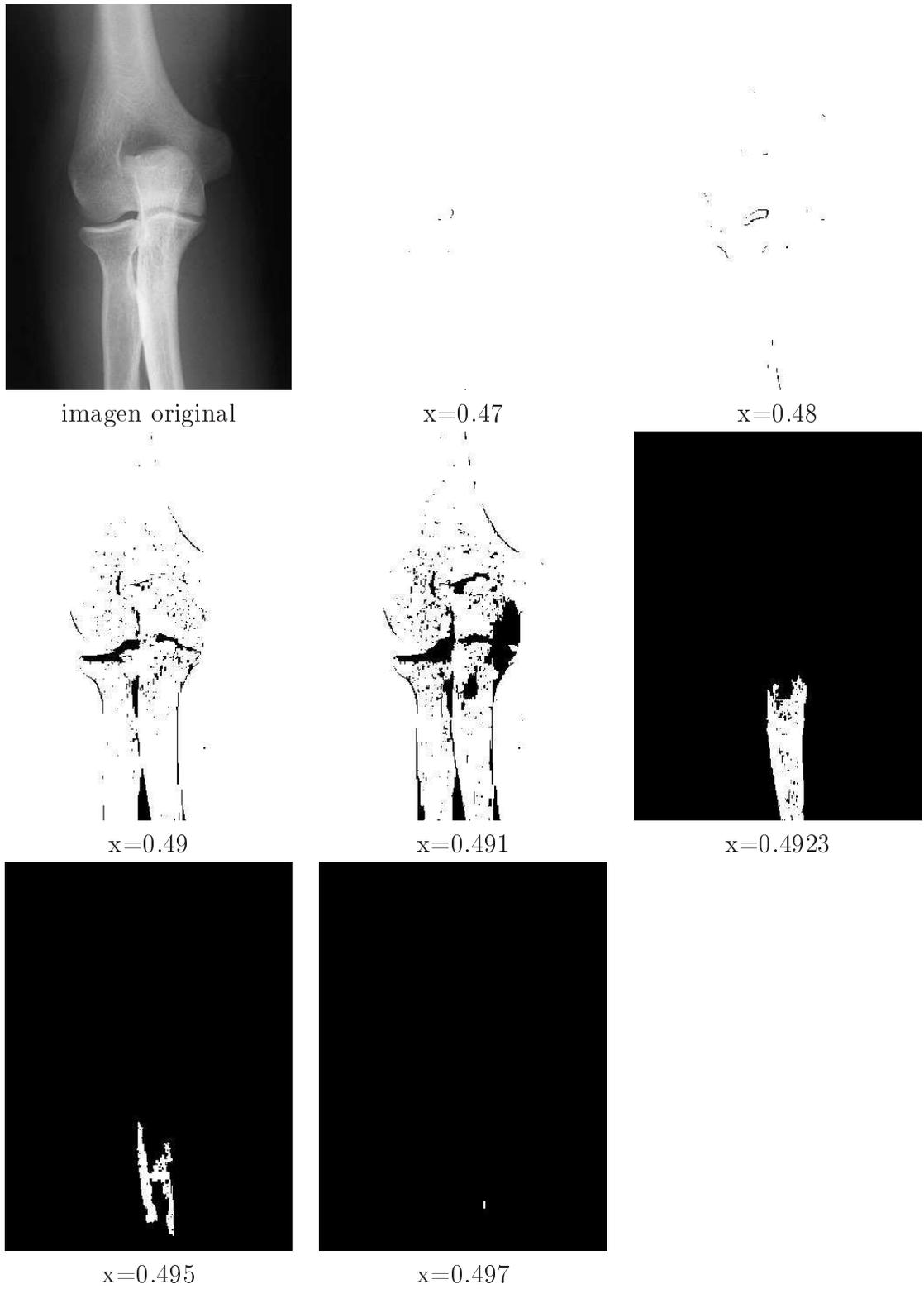


Figura 6.5: Segmentación: radiografía del codo

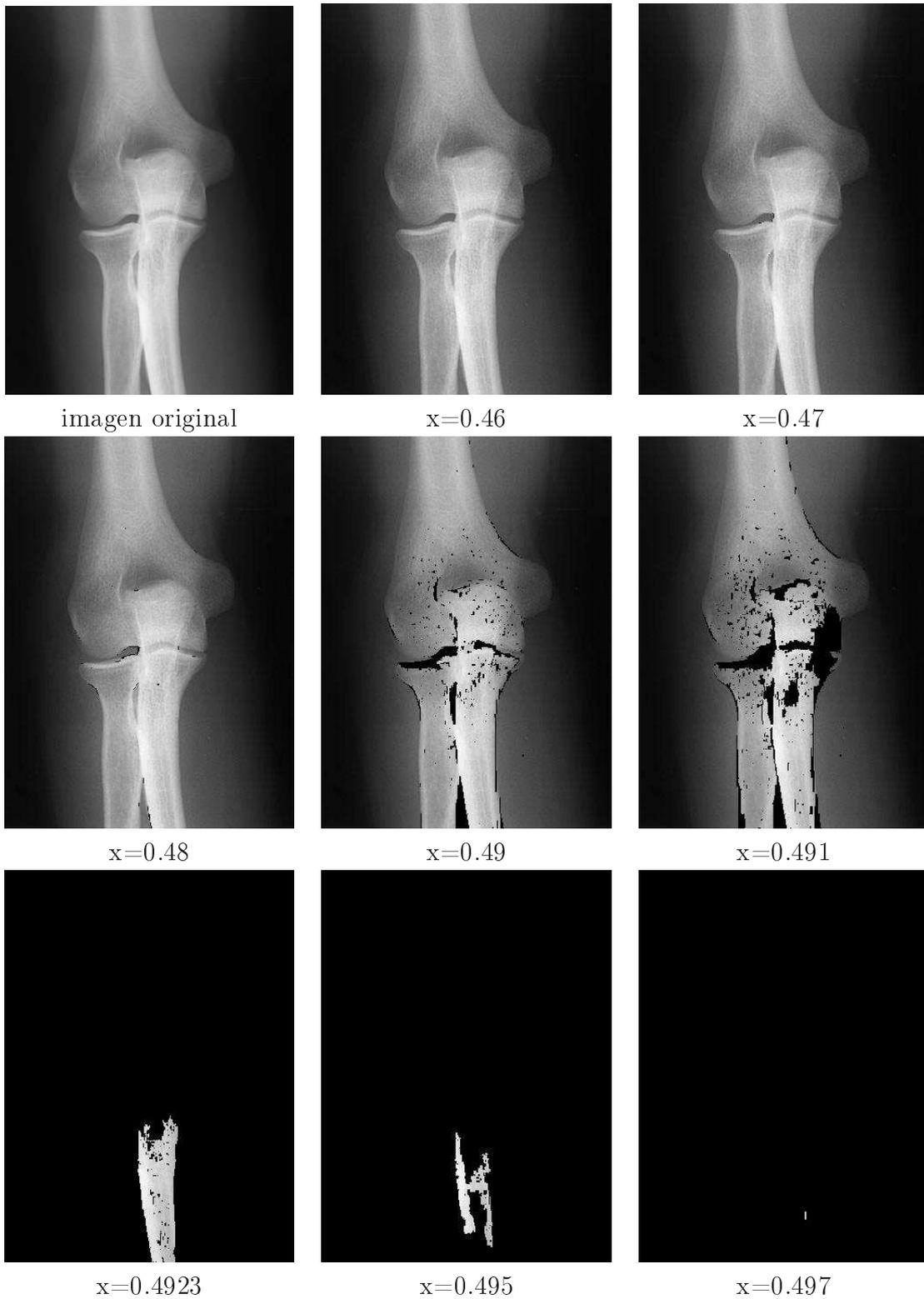


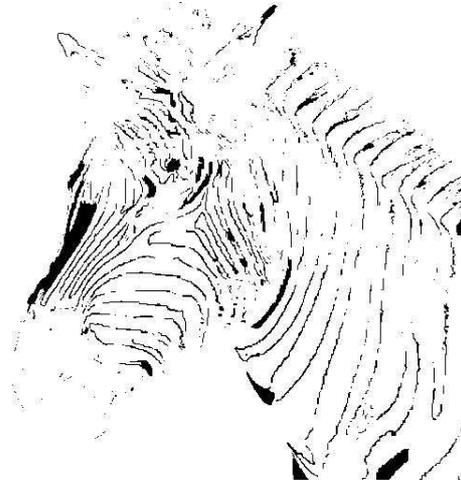
Figura 6.6: Clasificación: radiografía del codo

6.3.4. Ejemplo4.- Cebra

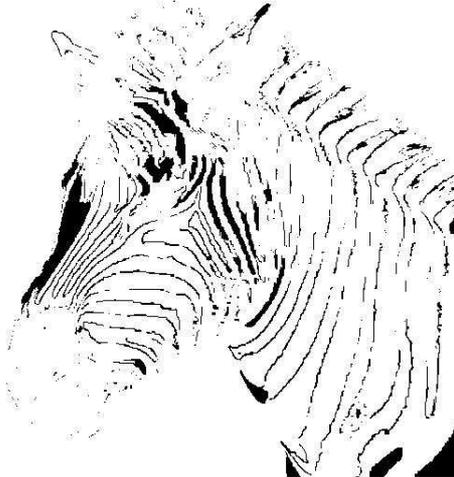
Por último presentamos la imagen de una cebra, cuyo tamaño es de 512x512 píxeles. El spel se especificó cerca del hocico de la cebra, sobre una de las rayas blancas. Por tal motivo es que las primeras imágenes segmentadas se ven blancas. La razón de que la mayoría de las imágenes tenga fondo blanco, se debe a la gran uniformidad y poca variación que existe entre los valores de la imagen, puesto que esta imagen casi está definida sobre dos colores; blanco y negro, es decir, es casi una imagen binaria, y sobre este tipo de imágenes el algoritmo tiene gran potencia y fácilmente puede identificar los objetos con un alto grado de definición. Por la razón mencionada anteriormente, es que se tienen objetos bien definidos para valores adecuados del umbral x . Tanto las imágenes segmentadas como las clasificadas presentan esta propiedad, esto lo podemos apreciar en cada una de las imágenes en donde los valores del umbral x son 0.462 y 0.467. El tiempo de ejecución del algoritmo para esta imagen fue de 4 horas 17 minutos.



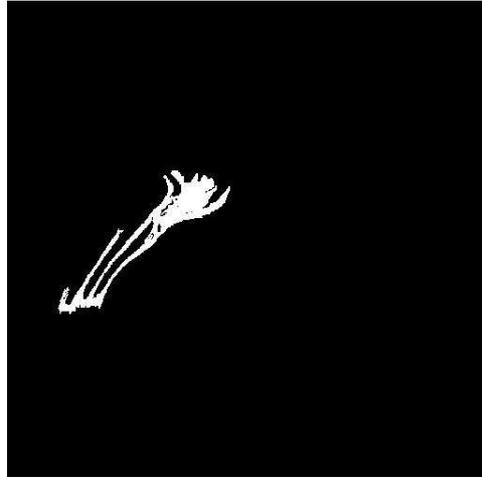
imagen original



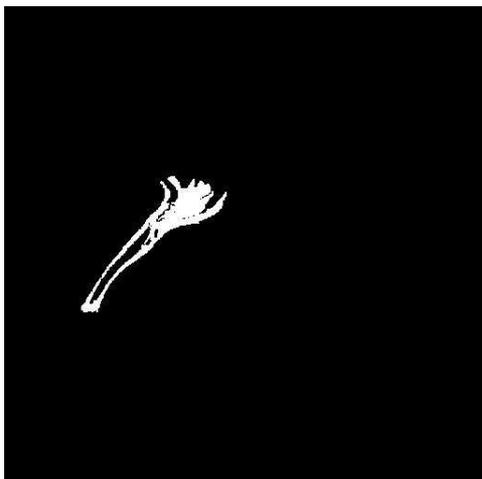
$x=0.46$



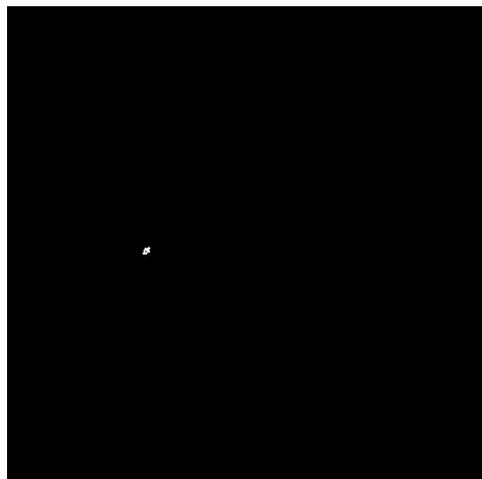
$x=0.461$



$x=0.462$



$x=0.467$



$x=0.49$

Figura 6.7: Segmentación: Cebra



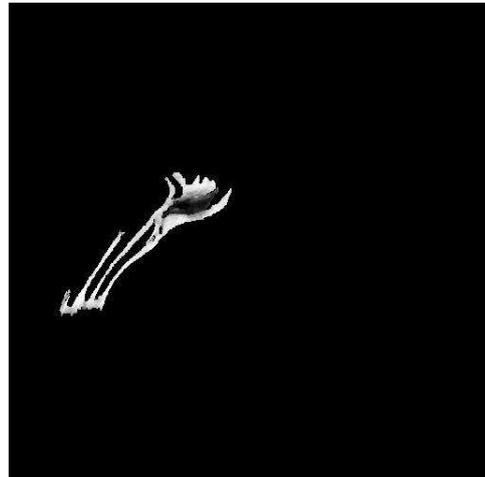
imagen original



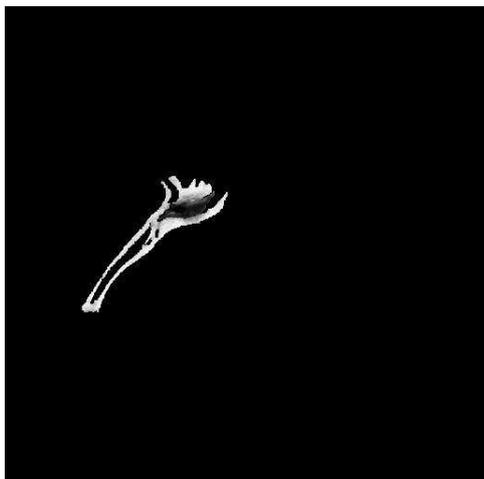
$x=0.46$



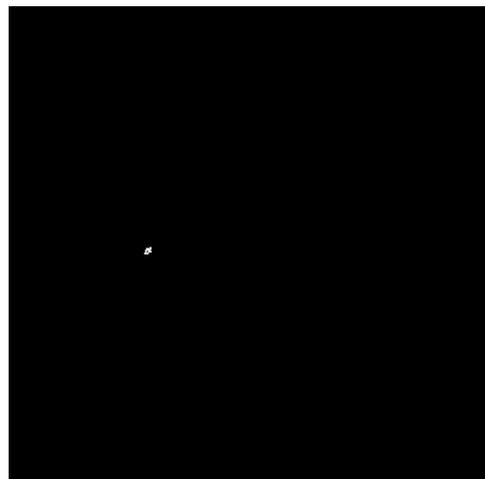
$x=0.461$



$x=0.462$



$x=0.467$



$x=0.49$

Figura 6.8: Clasificación: Cebra

Apéndice A

Apartado de Códigos

En este apartado presentamos las implementaciones de los algoritmos en MATLAB versión 7.0. Antes de proceder a explicar el funcionamiento de cada una de estos módulos, debemos aclarar que el primer paso que hay que realizar para ejecutar el programa es introducir la siguiente expresión en la línea de comando:

```
> global MAX N f fo
```

y pulsar enter, esto con la finalidad de indicar que las 4 variables declaradas serán de carácter global y que cualquier función podrá tener acceso a ellas. En este caso MAX representa el número total de spels en el escenario, N denota la dimensión de los spels, f es el escenario que representa a la imagen que se desea segmentar y corresponde a una matriz que contiene los valores de cada uno de los elementos del escenario y fo es el escenario arrojado por el algoritmo kappaFOE(i,j) que contiene la fuerza de conexión entre el spel especificado con el resto de los elementos del escenario (también es una matriz y de la misma dimensión que f).

Antes de proceder a ejecutar el programa hay que colocar la dirección correcta de la imagen que se desea segmentar dentro de la función inicializa_fo(i,j), puesto que en este módulo se lee la imagen y se convierte a un escenario de membresía a través de la función convert2membershiptscene(f). Una vez hecho esto, podemos correr el algoritmo mediante la colocación de la siguiente sentencia en la línea de comando:

```
> fo = kappaFOE(i,j);
```

y posteriormente pulsar enter, donde i y j representan el renglón y la columna del spel en el que estamos interesados.

Lo que hace el módulo calcula_afinidades(x,y), es precisamente calcular la afinidad entre el spel con coordenadas (x,y) y el resto de los spels del escenario. Lo que retorna este módulo es una matriz de tamaño $m \times n$, donde $m \times n$ son las dimensiones del escenario original f, el resto del código corresponden a la implementación de los pasos 3 hasta 10 del algoritmo (3).

La última función que se presenta es la implementación del algoritmo de Floyd-Warshall modificado, adecuado a la forma en que están representados los elementos

APÉNDICE A. APARTADO DE CÓDIGOS

de la imagen. Lo primero que se hace es calcular la afinidad entre todos los spels, y posteriormente se calcula la fuerza de conexidad entre cada par de ellos.

Los módulos restantes son sencillos de entender, por tanto se omite la explicación de sus funciones, sin embargo, por último hay que mencionar que una vez que se tiene el escenario fo, lo que se procede es ejecutar los módulos de segmentación y clasificación, cuyo primer argumento es fo y el segundo argumento es el valor del umbral que nosotros deseamos.

```
function fo = kappaFOE(x,y)
    global MAX N f fo
    N = 2;
    inicializa_fo(x,y);
    [m n] = size(f);
    visitados = zeros(m,n);
    c = struct('x',0,'y',0);
    k = 1;
    visitados(x,y)=1;
    m_k = calcula_afinidades_spels(x,y);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            if m_k(i,j) > 0
                visitados(i,j)=1;
                c.x=i;
                c.y=j;
                Q(k)=c;
                k=k+1;
            end
        end
    end
    while ~isempty(Q)
        c = Q(1);
        Q(1)=[];
        k=k-1;
        m_k = calcula_afinidades_spels(c.x,c.y);
        fmax = 0;
        for i = 1:m
            for j = 1:n
                fmax = max( fmax, min( fo(i,j), m_k(i,j) ) );
            end
        end
        if fmax > fo(c.x,c.y)
            fo(c.x,c.y) = fmax;
            for i = 1:m
```

APÉNDICE A. APARTADO DE CÓDIGOS

```
        for j = 1:n
            if m_k(i,j) > 0 && visitados(i,j)==0
                c.x=i;
                c.y=j;
                Q(k)=c;
                k=k+1;
            end
        end
    end
end
end
end

end

function inicializa_fo(x,y)
    global MAX N f fo
    f = imread('C:\imagenes\imagen.jpg','jpeg');
    f = double(f(:,:,1));
    f = convert2membershiptscene(f);
    [m n] = size(f);
    MAX = m*n;
    fo = zeros(m,n);
    fo(x,y) = 1.0;
    fo = double(fo);
end

function g = convert2membershiptscene(g)
    global MAX N f fo
    [m n] = size(g);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            g(i,j)=g(i,j)/255;
        end
    end
end

function m_k = calcula_afinidades_spels(a,b)
    global MAX N f fo
    [m n] = size(f);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            m_k(i,j) = afinidad1(a,b,i,j);
        end
    end
end
```

APÉNDICE A. APARTADO DE CÓDIGOS

```
end

function zeta = afinidad1(a,b,c,d)
    global MAX N f fo
    k1=1.0; k2=1.0; cuad=0;
    x = abs(a-c);
    y = abs(b-d);
    cuad = x*x + y*y;
    omega = 0;
    if (x+y)<= 1
        omega = 1.0+k1*sqrt(cuad);
        omega = 1.0 / omega;
    end
    dif = abs(f(a,b)-f(c,d));
    zeta = omega / (1.0 + k2*dif);
end

function O = segmentacion(M,umbral)
    global MAX N f fo
    [m n] = size(M);
    O = zeros(m,n);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            if M(i,j) >= umbral
                O(i,j) = 1;
            end
        end
    end
end

function O = clasificacion(M,umbral)
    global MAX N f fo
    [m n] = size(M);
    O = zeros(m,n);
    for i = 1:m
        for j = 1:n
            if M(i,j) >= umbral
                O(i,j) = f(i,j);
            end
        end
    end
end

function [A M]=higher_floyd(x,y)
```

APÉNDICE A. APARTADO DE CÓDIGOS

```
global MAX N f fo
[m n] = size(f);
M = zeros(m,n,m,n);
M = double(M);
for i1 = 1:m
    for j1 = 1:n
        for i2 = 1:m
            for j2 = 1:n
                M(i1,j1,i2,j2)=afinidad1(i1,j1,i2,j2);
            end
        end
    end
end
for i3 = 1:m
    for j3 = 1:n
        for i1 = 1:m
            for j1 = 1:n
                for i2 = 1:m
                    for j2 = 1:n
                        M(i1,j1,i2,j2)=max(M(i1,j1,i2,j2),min(M(i1,j1,i3,j3),M(i3,j3,i2,j2)));
                    end
                end
            end
        end
    end
end
end
end
end
A = M(:,:,x,y);
end
```


Conclusiones

Un objeto difuso es definido como una componente conexa de elementos del espacio (spels). La conexidad difusa es una relación difusa en el conjunto de todos los spels, que combina la noción de adyacencia difusa de spels (que es independiente de cualquier información de la imagen) y la afinidad difusa de spels (que depende de los valores de intensidad de la imagen). En el presente trabajo hemos resaltado la conveniencia de definir las imágenes en el contexto difuso con la finalidad de obtener mejores resultados en el procesamiento y análisis de las imágenes. Hemos ampliado también las demostraciones de los resultados referentes a las propiedades de los objetos difusos.

Aunque el tratamiento de las imágenes digitales mediante objetos difusos involucra cálculos de complejidad combinatoria, incluso para espacios digitales de dimensión 2, con la ayuda de algunos resultados básicos referentes a la conexidad difusa y a los objetos difusos, hemos desarrollado y presentado algoritmos prácticos para su extracción en una imagen multidimensional. Hemos mostrado también la gran utilidad que ofrece el método de programación dinámica, sobre todo en la reducción del tiempo de ejecución de los algoritmos presentados en esta tesis, puesto que mediante esta técnica se evita la exploración de todos los caminos posibles entre cualesquiera dos elementos del espacio.

Hemos mostrado la potencia de los algoritmos en la correcta definición de los objetos en las imágenes digitales. Podemos decir que los intentos por retener las inexactitudes inherentes de las imágenes en la información de los objetos extraídos de la imagen ha sido una decisión adecuada en el análisis de la imagen y que la noción de conexidad difusa, que había sido ignorada en investigaciones anteriores sobre segmentación de imágenes, tiene mucho que ofrecer en el análisis práctico de las imágenes.

Las relaciones de adyacencia difusa necesitan una investigación más detallada. La adyacencia difusa α que hemos adoptado en el presente trabajo para las pruebas realizadas es la relación difusa definida en (4.4.1). Para un resultado más exacto, α debería reflejar la forma en que el dispositivo que captura la imagen distribuye los elementos de la imagen. De hecho, al considerar un mayor número de vecinos de los spels se incrementa el costo computacional de los algoritmos. Similarmente, la relación de afinidad difusa κ requiere de un estudio más profundo. En todos los resultados presentados en este trabajo, hemos utilizado una forma funcional simple de μ_κ . Es posible diseñar esta para que tome en cuenta las características (tales

como la textura) extraídas de los valores de los spels en vez de tomar directa y únicamente los valores de los spels. Para la relación de conexidad difusa K , existen formas funcionales más sofisticadas que la de la ecuación (4.6.1).

El escenario K_o de un escenario de membresía ζ tiene varias propiedades interesantes. Notemos que aunque dicho escenario no especifica K completamente, contiene información suficiente para definir el $\kappa\theta_x$ -objeto de ζ que contiene al spel para algún $x \in [0, 1]$. También puede ser tratado como un nuevo escenario de membresía que contiene información más precisa acerca del objeto de interés y definir los objetos difusos en él con el objetivo de mejorar la definición.

La teoría y los algoritmos presentados en este trabajo se pueden aplicar a los escenarios binarios a través de las relaciones de adyacencia rígidas y ciertas relaciones especiales de afinidad. Los algoritmos $\kappa\theta_xFOE$ y κFOE pueden ser usados para extraer componentes conexas rígidas en un escenario binario de dimensión n . Las operaciones sobre escenarios tanto binarios como no binarios que requieren del análisis de conexidad entre los elementos del escenario tales como crecimiento de regiones, rellenado de zonas, dilatación, erosión, y esqueletización serían mejor examinadas mediante el uso de nociones de conexidad difusa, puesto que ellos son por naturaleza difusos.

Bibliografía

- [1] Hans Bandemer and Siegfried Gottwald. *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods with Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1995.
- [2] Max Black. Vagueness: an exercise in logical analysis. *Philosophy of Science*, 4(4):427–455, 1937.
- [3] Hans J. Bremermann. *Optimization through evolution and recombination*. Spartan Books, Washington, 1962.
- [4] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [5] Rafael C. Gonzalez and Richard E. Woods. *Digital Image Processing*. Prentice Hall, New Jersey, second edition, 2002.
- [6] George J. Klir and Bo Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [7] Mario Aurelio Rodríguez Pineda. *El concepto de índice de un punto lattice en el análisis homotópico de 2D y 3D imágenes y su realización algorítmica*. PhD thesis, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, Puebla, 1997.
- [8] Jayaram K. Udupa, Punam K. Saha, and Roberto A. Lotufo. Relative fuzzy connectedness and object definition: Theory, algorithms, and applications in image segmentation. *Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 24(11):246–261, November 2002.
- [9] Jayaram K. Udupa and Supun Samarasekera. Fuzzy connectedness and object definition: Theory, algorithms, and applications in image segmentation. *Graphical Models and Image Processing*, 58(3):246–261, May 1996.
- [10] Warren Weaver. Science and complexity. *American Scientist*, 36(4):536–544, 1948.
- [11] Lofti A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.