



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

TESIS:

“CÁLCULO DE UNA NUEVA HERRAMIENTA DE PULIDO CLÁSICO, CON DISEÑO POROSO, USANDO PROGRAMACIÓN LINEAL”

Para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta:

Liliana Jeanett Manzano Sumano

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Cuauhtémoc H. Castañeda Roldán

CO-DIRECTOR DE TESIS

Dr. Jorge González García

Huajuapán de León, Oaxaca a de Septiembre de 2007

DEDICATORIA

Dedicado con amor y cariño:
A mis padres,
Rosa Sumano y Adolfo Manzano
Gracias por darme la vida y brindarme la oportunidad de estudiar
A mi hermano,
Adolfo de Jesús
Por haber llegado a nuestras vidas
A la Negra, May,
Gracias por tu educación y tu gran apoyo siempre para llegar a tener una carrera
Y a Migue
Mi gran amigo y compañero, gracias por apoyarme.

LILIANA

AGRADECIMIENTOS

Gracias a Dios por darme la fuerza requerida para realizar mis sueños.

A mis padres Adolfo y Rosa, quienes me formaron y prepararon para la vida, y por todo el esfuerzo y dedicación que realizaron para brindarme una educación profesional.

Agradezco especialmente al Dr. Cuauhtémoc, por compartirme sus conocimientos y experiencias, por su motivación y entusiasmo dedicados a dirigir mi trabajo, y por brindarme su confianza y su excelente amistad.

A mis compañeras de carrera Lety, Bety, Juanis y Adri, por los buenos momentos juntas.

A Armida, Norsuize y Migue, por estar a mi lado en los momentos difíciles durante la carrera y por alentarme en mis momentos de delibidad para no darme por vencida y amistad.

A los profesores M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín, M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno y Dr. Agustín Santiago Alvarado por las sugerencias y observaciones realizadas que contribuyeron en el mejoramiento de la tesis.

A todos mis profesores que contribuyeron para mi formación académica durante la licenciatura, gracias por todos los conocimientos transmitidos.

A la familia Castañeda Álvarez por brindarme su amistad, apoyo moral, económico y por abrirme las puertas de su casa, a Andy y Cali por permitirme ser un integrante más en su familia. A la M. C. Alma Lidia Piceno Rivera y Dr. Virginia Berrón Lara por brindarme su amistad, darme su apoyo y buenos consejos.

Al CONACYT por el soporte dado para realizar esta investigación dentro del proyecto de “Pulido Predecible” con número de código U44715-F.

LILIANA

ÍNDICE

página

DEDICATORIA	ii
AGRADECIMIENTOS	iii
LISTA DE TABLAS	vi
LISTA DE FIGURAS	viii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1. PULIDO DE SUPERFICIES ÓPTICAS	
1.1 Antecedentes.....	3
1.2 Pulido de superficies ópticas.....	4
1.3 Problemas presentados en el pulido de superficies ópticas.....	6
1.4 Aplicación de la Ecuación de Preston en el pulido de superficies.....	7
1.5 Propuesta de tesis.....	8
CAPÍTULO 2. APROXIMACIÓN DE FUNCIONES	
2.1 Aproximación en un espacio métrico	11
2.2 Splines	21
2.2.1 Introducción	21
2.2.2 Función Spline	22
2.2.3 Construcción de la función spline cúbica de interpolación	23
2.2.4 Spline cúbico paramétrico	27
CAPÍTULO 3. LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y SU APLICACIÓN A PROBLEMAS DE APROXIMACIÓN	
3.1 Introducción	29
3.2 Geometría de la programación lineal	30
3.3 Forma estándar	31
3.4 Solución básica y puntos extremos	33

3.5 El método símplex	35
CAPÍTULO 4. MODELACIÓN DEL PROBLEMA	
4.1 Determinación de la función de contorno de la herramienta de pétalo	42
4.2 Modelación del esquema de la herramienta porosa con programación lineal y la solución	43
CAPÍTULO 5. EJEMPLOS Y RESULTADOS	
5.1 Caso cóncavo	59
5.2 Caso convexo	68
5.3 Ejemplos con brocas adicionales	76
CONCLUSIONES	81
APÉNDICE A	83
APÉNDICE B	85
REFERENCIAS	90
GLOSARIO DE TÉRMINOS	92

LISTA DE TABLAS

Tabla	Pág.
<i>Tabla 3.1 Tabla símplex inicial</i>	36
<i>Tabla 3.2 Tabla símplex inicial</i>	37
<i>Tabla 3.3 Tabla símplex con solución básica en las variables de holgura</i>	37
<i>Tabla 3.4 Selección de las variables de entrada y salida</i>	38
<i>Tabla 3.5 Ubicando el renglón pivote, la columna pivote y el elemento pivote</i>	39
<i>Tabla 3.6 Cálculo del nuevo renglón pivote</i>	39
<i>Tabla 3.7 Tabla símplex final, después de realizar los cálculos de G-J</i>	39
<i>Tabla 3.8 Ubicando las variables de entrada y salida en la iteración 2</i>	40
<i>Tabla 3.9 Calculo del nuevo renglón pivote</i>	40
<i>Tabla 3.10 Tabla símplex optima</i>	40
<i>Tabla 4.1 Tabla de los ángulos donde se colocaron las perforaciones</i>	56
<i>Tabla 5.1 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar perforaciones o postes, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	61
<i>Tabla 5.2 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	63
<i>Tabla 5.3 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	64
<i>Tabla 5.4 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	66
<i>Tabla 5.5 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	67
<i>Tabla 5.6 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	69
<i>Tabla 5.7 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	70
<i>Tabla 5.8 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	71

<i>Tabla 5.9 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	72
<i>Tabla 5.10 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	74
<i>Tabla 5.11 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, evaluando sobre las circunferencias de evaluación</i>	75
<i>Tabla 5.12 Rms obtenido para diferentes herramientas porosas considerando 14,16 y 18 radios de brocas utilizando 101 circunferencias de montaje y 101 circunferencias de evaluación</i>	77

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>	<u>Pág.</u>
<i>Figura 1.1. - a) Superficie real, b) Cantidad de material a remover, c) Superficie deseada</i>	4
<i>Figura 1.2. - Esquema del proceso de pulido clásico</i>	4
<i>Figura 1.3. - Maquina de pulido clásico: Proceso de pulido</i>	5
<i>Figura 1.4. - a) Herramienta sólida, b) Herramienta anular, c) Herramienta de pétalo</i>	5
<i>Figura 1.5. - Herramienta de pétalo formada por 10 anillos incompletos</i>	5
<i>Figura 1.6. - Proceso de pulido</i>	6
<i>Figura 1.7. - Puntos en contacto entre el vidrio, V, y la herramienta, H</i>	7
<i>Figura 1.8. - Herramienta porosa</i>	8
<i>Figura 2.1. - Intervalo abierto</i>	11
<i>Figura 2.2. - Intervalo cerrado</i>	12
<i>Figura 2.3. - Conjunto A</i>	12
<i>Figura 2.4. - Representación grafica del conjunto A</i>	14
<i>Figura 2.5. - Conjunto M</i>	20
<i>Figura 2.6. - Diferentes polinomios para cuatro puntos distintos</i>	21
<i>Figura 2.7. - Polinomio de grado 10 que interpola 11 puntos dados y que presenta oscilaciones</i>	22
<i>Figura 2.8. - 10 polinomios de diferente grado que interpolan 11 puntos dados en cada par de puntos</i>	22
<i>Figura 3.1. - Región factible</i>	31
<i>Figura 3.2. - Representación de una iteración del método simplex</i>	38
<i>Figura 4.1. - Herramienta de pétalo para el pulido de superficies cóncavas</i>	42
<i>Figura 4.2. - Contorno de la herramienta de pétalo formado por m anillos segmentados</i>	42
<i>Figura 4.3. - Gráfica del perfil de la herramienta de pétalo, de las circunferencias de montaje y evaluación</i>	43
<i>Figura 4.4. - Determinación de la afectación del perímetro de una circunferencia de evaluación por una perforación ..</i>	44
<i>Figura 4.5. - Caso en el cual $y_i > x_j + r\phi$</i>	45
<i>Figura 4.6. - Calculando la longitud de arco entre la circunferencia de montaje j y el perfil de la herramienta</i>	46
<i>Figura 4.7. - Gráfica de las circunferencias de montaje, evaluación y perforación</i>	47

<i>Figura 4.8. - Herramienta porosa incorrecta</i>	49
<i>Figura 4.9. - Herramienta porosa, con postes y perforaciones</i>	50
<i>Figura 4.10. - División de la herramienta porosa</i>	50
<i>Figura 4.11. - Circunferencias de perforaciones (o postes) distribuidas uniformemente</i>	52
<i>Figura 4.12. - Circunferencias de perforación (o postes) que se interceptan</i>	53
<i>Figura 4.13. - Determinación de la región donde dos circunferencias de perforación no se interceptan</i>	53
<i>Figura 4.14. - Ubicación de los ángulos $\alpha_{I,k}$ y $\alpha_{D,k}$</i>	54
<i>Figura 4.15. - Distribución de las circunferencias de perforación sobre la circunferencia de montaje y_{m-1}</i>	54
<i>Figura 4.16. - Distribución final de las circunferencias de perforación (o postes)</i>	55
<i>Figura 4.17. - Distribución uniforme de las 5 circunferencias de perforación</i>	56
<i>Figura 4.18. - Distribución final de las circunferencias de perforación</i>	56
<i>Figura 5.1. - Perímetro de la herramienta de pétalo sobre la circunferencia i</i>	58
<i>Figura 5.2. - Herramienta de pétalo para el pulido de superficies cóncavas</i>	59
<i>Figura 5.3. - Segmento del perfil de la herramienta de pétalo para el pulido de superficies cóncavas con 101 puntos</i> ...	59
<i>Figura 5.4. - Desgaste a generar con las herramientas de pétalo, para el pulido de superficies cóncavas.</i>	59
<i>Figura 5.5. - Ajuste del perfil de la herramienta de pétalo utilizada para el pulido de superficies cóncavas</i>	60
<i>Figura 5.6. - Herramienta porosa formada con 38 circunferencias de montaje y 40 circunferencias de evaluación</i>	60
<i>Figura 5.7. - Herramienta porosa formada con 38 circunferencias de montaje y 100 circunferencias de evaluación</i>	62
<i>Figura 5.8. - Herramienta porosa formada con 101 circunferencias de montaje y 101 circunferencias de evaluación</i> ...	65
<i>Figura 5.9. - Herramienta de pétalo para el pulido de superficies convexas</i>	68
<i>Figura 5.10. - Segmento del perfil de la herramienta de pétalo para el pulido de superficies convexas con 101 puntos</i> ...	68
<i>Figura 5.11. -Desgaste a generar con las herramientas de pétalo para el pulido de superficies convexas</i>	68
<i>Figura 5.12. - Ajuste del perfil de la herramienta de pétalo utilizada para el pulido de superficies convexas</i>	69
<i>Figura 5.13. - Herramienta porosa formada con 28 circunferencias de montaje y 30 circunferencias de evaluación</i> ...	70
<i>Figura 5.14. - Herramienta porosa formada con 28 circunferencias de montaje y 90 circunferencias de evaluación</i> ...	73
<i>Figura 5.15. - Herramienta porosa formada con 90 circunferencias de montaje y 90 circunferencias de evaluación</i> ...	73
<i>Figura 5.16. - Herramienta de pétalo para el caso cóncavo, b) Desgaste generado con la herramienta de pétalo, c) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 14 brocas, d) Desgaste generado con la herramienta porosa utilizando 14 brocas, e) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 16 brocas, f) Desgaste generado con la herramienta porosa utilizando 16 brocas, g) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 18 brocas y h) Desgaste generado con la</i>	

<i>herramienta porosa utilizando 18 brocas</i>	78
<i>Figura 5.17. - Herramienta de pétalo para el caso convexo, b) Desgaste generado con la herramienta de pétalo, c) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 14 brocas, d) Desgaste generado con la herramienta porosa utilizando 14 brocas, e) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 16 brocas, f) Desgaste generado con la herramienta porosa utilizando 16 brocas, g) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 18 brocas y h) Desgaste generado con la herramienta porosa utilizando 18 brocas</i>	79

INTRODUCCIÓN

(“Así como los objetos más fáciles de ver no son los demasiado grandes ni los demasiado pequeños, también las ideas más fáciles en matemáticas no son las demasiado complejas ni las demasiado simples”).

Bertrand Arthur William Russell)

Las superficies ópticas son muy importantes en la vida diaria pues a través de estas es posible la observación de un objeto aún cuando este sea muy pequeño o esté alejado de nosotros. Es por ello que juegan un papel importante tanto en el ámbito de la investigación astronómica como en el de la medicina, por mencionar solamente dos aplicaciones. Claro que para poder producir la imagen casi perfecta es importante que el pulido de la superficie óptica sea el correcto.

En este trabajo de tesis se diseña una nueva herramienta de pulido de superficies ópticas, que hemos llamado porosa, a partir de una herramienta ya existente conocida como herramienta de pétalo. En la concepción original del trabajo la herramienta porosa generaría el mismo desgaste que la herramienta de pétalo pero debería ser más fácil su construcción, por estar fabricada mediante perforaciones practicadas en un disco. En el desarrollo de la tesis, particularmente en los capítulos 4 y 5 se analizan los alcances y las limitaciones prácticas de esta idea, y se explica porqué se consideró pertinente modificar la concepción inicial para dividir la herramienta en dos partes, una construida con perforaciones y la otra con postes. El problema técnico fundamental del diseño de la herramienta porosa consiste entonces en determinar el número y la ubicación de los postes y perforaciones que la formarán (esquema de la herramienta).

El contenido de la tesis se ha organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se estudiará la parte física del problema, para lo cual se explica en que consiste el proceso de pulido de superficies ópticas y se describen las diferentes herramientas que se utilizan para generar un desgaste deseado. Se habla de la aplicación de la ecuación de Preston al pulido de superficies ópticas y los problemas presentes en este proceso. Enseguida se explica cual es la idea fundamental que rige el diseño de la nueva herramienta.

El planteamiento y la solución que se le ha dado al problema en esta tesis requieren de herramientas de aproximación de funciones y de programación lineal, es por ello que los capítulos 2 y 3 se abordarán estos temas.

En la primera sección del capítulo 2 se enuncian algunos resultados básicos de teoría de aproximación en espacios métricos y normados y se detallan algunas demostraciones más allá de lo que se presenta en los textos clásicos de la materia, esta teoría se utiliza en el capítulo 4 en la definición de los splines que vamos a ocupar para ajustar el perfil de la herramienta de pétalo, así como para respaldar la existencia de la solución de nuestro problema de diseño. En este capítulo se definirán los splines en general y se mostrará como son construidos, aunque nuestro interés se centrará en los splines cúbicos de interpolación paramétricos.

Este problema se planteó en la tesis como un programa lineal. Es por ello que en el capítulo 3 se define lo que es un problema de programación lineal, su interpretación geométrica, así como la manera en que se resuelven este tipo de problemas por el método símplex.

El objetivo principal de esta tesis se logra en el capítulo 4, en este apartado se explica la forma en que se ataca la propuesta de tesis hecha en el primer capítulo. En la primer sección de éste capítulo se obtiene la función que describe el contorno de herramienta de pétalo utilizando funciones splines cúbicas de interpolación. En la segunda sección se modela el problema de la obtención del esquema de la herramienta porosa que se esta proponiendo, utilizando programación lineal.

Finalmente, en el capítulo 5 se verán algunos ejemplos considerando la herramienta de pétalo utilizada para el pulido de superficies cóncavas y convexas, en cada caso se encontrará la función spline paramétrica que describa el contorno de la herramienta de pétalo y se resuelven los programas lineales adecuados para encontrar diferentes opciones de diseño de la herramienta porosa correspondiente, obteniendo de esta manera las nuevas herramientas que generarán desgastes similares a los generados por las herramientas de pétalo.

CAPÍTULO 1

PULIDO DE SUPERFICIES ÓPTICAS

(A partir de Newton, la Física se hizo mecanicista en el sentido de que eran modelos mecánicos, basados en materia y movimiento, los que surgían para interpretar los hechos observados. *"Nunca estoy satisfecho hasta que consigo el modelo mecánico de una cosa. Si puedo construir un modelo mecánico, entiendo el fenómeno"*.
Lord Kelvin)

1.1 Antecedentes

Las superficies ópticas son utilizadas en la investigación y en nuestra vida cotidiana para generar imágenes del mundo que nos rodea. Estas superficies son usadas en telescopios, anteojos, cámaras, y microscopios, los cuales utilizan espejos y/o lentes de vidrio que son generados con una calidad menor a media longitud (máximo error permitido, $\frac{\lambda}{2} = 275nm$) de onda de luz para su correcto funcionamiento. Por ejemplo para el telescopio Newtoniano el espejo primario tiene una forma parabólica específica, de no ser así las imágenes no serían las correctas. Por ello es importante el proceso de pulido de las superficies ópticas.

Desde tiempos muy antiguos se ha tratado de producir superficies ópticas de gran precisión, elaboradas con un bajo costo y en un lapso de tiempo corto. Sin embargo, realizar el pulido de un vidrio no es tan sencillo pues es necesario tener los tiempos de desgaste exacto para lograr el pulido deseado del espejo o lente. Más adelante se mencionarán algunas investigaciones realizadas en relación al pulido predecible de superficies ópticas y las diferentes formas en que se trata de reconstruir un perfil de desgaste deseado, lo que se conoce como el problema inverso en el pulido de superficies.

1.2 Pulido de superficies ópticas

El pulido de superficies ópticas es el proceso mediante el cual se remueve o se quita cierta cantidad de vidrio, de una superficie real para obtener una forma deseada (ver figura 1.1).

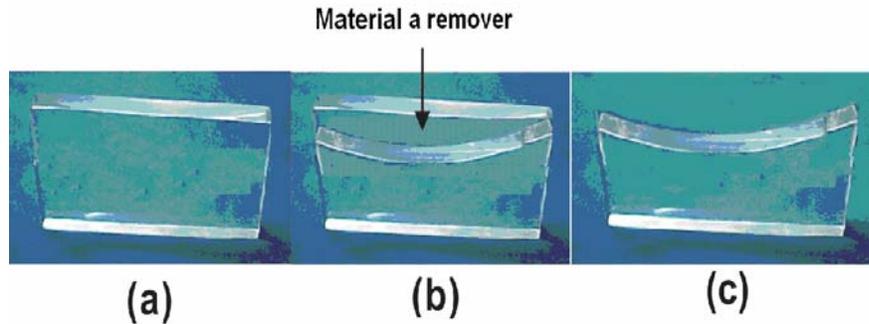


Figura 1.1. -a) Superficie real, b) Cantidad de material a remover, c) Superficie deseada.

Actualmente, existen diferentes tecnologías para el pulido de superficies ópticas, desde las más rudimentarias hasta las más sofisticadas. Dichas técnicas son utilizadas dependiendo de los avances tecnológicos y del presupuesto de cada taller donde se realizan; en México se recurre al método de pulido clásico^[1-4], en el cual, la herramienta matemática para el cálculo del desgaste es la ecuación de Preston^[5-7].

El pulido de superficies utilizando el método clásico consiste en la rotación y desplazamiento sobre el vidrio de una herramienta montada en el brazo de la máquina pulidora, colocando entre la herramienta y el vidrio una suspensión de abrasivo, el cual es una mezcla de pulidor u óxido de cerio con agua (ver figuras 1.2 y 1.3).

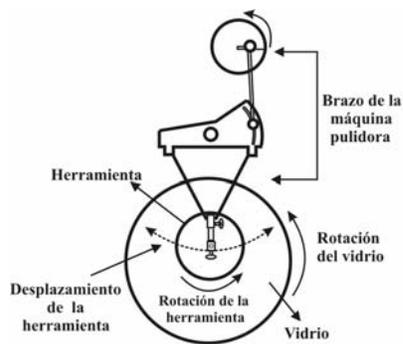


Figura 1.2. -Esquema del proceso de pulido clásico.

Para el pulido clásico de superficies ópticas se utilizan tres tipos de herramientas de pulido: sólida (Figura 1.4 a), anular (Figura 1.4 b) y de pétalo (Figura 1.4 c). La herramienta de pétalo es llamada así debido a que está formada por un conjunto de anillos concéntricos incompletos que juntos le dan la forma de pétalos, donde el tamaño de los segmentos de cada anillo incompleto queda determinado por medio del ángulo central subtendido, tal y como se puede observar en la figura 1.5. De las tres herramientas mencionadas solamente con la sólida y la de pétalo se pueden generar desgastes deseados^[8-13]. El tamaño angular de cada herramienta anular incompleta es directamente proporcional al desgaste generado por la misma^[11].



Figura 1.3. -Maquina de pulido clásico: Proceso de pulido.

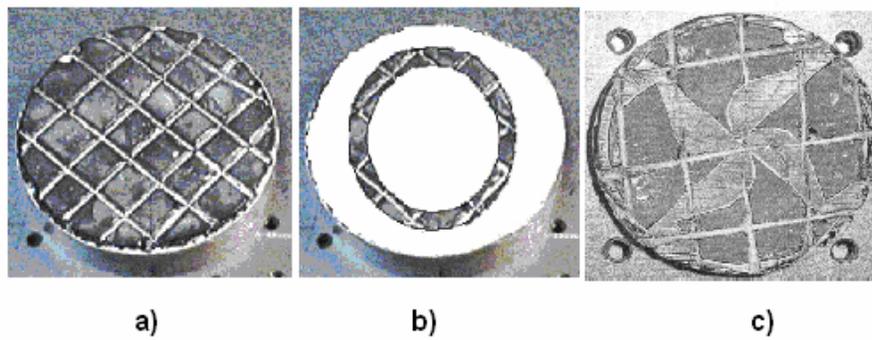


Figura 1.4. -Herramienta sólida, b) Herramienta anular, c) Herramienta de pétalo.

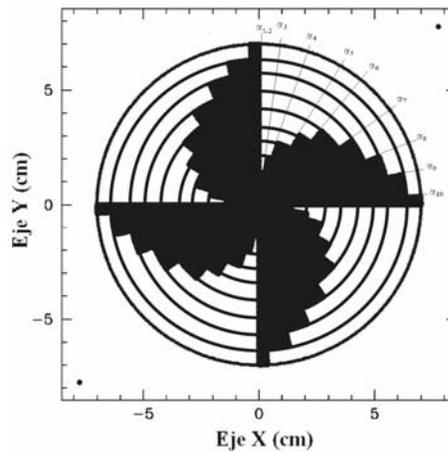


Figura 1.5. - Herramienta de pétalo formada por 10 anillos incompletos

Como se explicará con más detalle en la sección 5.1, en la presente tesis se trabaja con la forma de la herramienta de pétalo, la cual genera un desgaste deseado, para crear, a partir de ella, un nuevo tipo de herramienta que genere el mismo desgaste.

Para la simulación del desgaste generado por una herramienta de pétalo, se considera que esta herramienta está formada por un conjunto de herramientas anulares incompletas de cuatro segmentos, tal y como se muestra en la figura 1.5.

La herramienta de pétalo pule en una misma sesión las diferentes partes de la superficie, en diferentes intervalos de tiempo, de duración proporcional al tamaño angular correspondiente, de tal forma que puede dejarse trabajando un tiempo razonable sobre el vidrio, sabiendo que se obtendrán desgastes proporcionales a los deseados; después se retira el vidrio, se hacen pruebas interferométricas para evaluar el desgaste obtenido y si es necesario se inicia una siguiente etapa de pulido.

1.3 Problemas presentados en el pulido de superficies ópticas

Debido a que la mayoría de los talleres en México realizan el pulido de superficies de manera artesanal, los técnicos por medio de su experiencia determinan los tiempos en que la herramienta (sólida) tallará en diferentes zonas del vidrio para generar la superficie deseada. Dicho proceso artesanal consiste en:

- 1.- Montar una herramienta sólida, prácticamente del tamaño del vidrio, en el brazo de la máquina pulidora y montar el vidrio a pulir en el contenedor de la máquina.
- 2.- Poner a trabajar la máquina pulidora hasta generar la esfera que se asemeje más a la superficie deseada, llamada esfera de referencia.
- 3.- Después se hace trabajar otra herramienta sólida (de tamaño de $1/5$ del tamaño del vidrio a pulir) sobre cada zona de la superficie, (ver figura 1.6), el tiempo que el técnico considere necesario.
- 4.- Durante el proceso de pulido el técnico desmonta la pieza de vidrio en varias ocasiones para evaluar por medio de pruebas ópticas interferométricas si se tiene (o si se esta generando) el perfil deseado. De no ser así, se continúa con el pulido hasta obtener el perfil deseado.

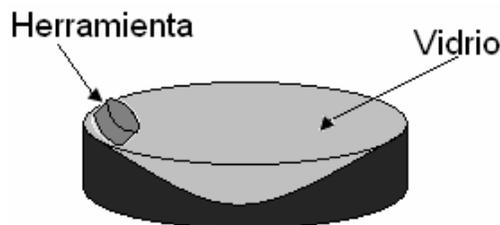


Figura 1.6. -Proceso de pulido.

Cuando las herramientas de pétalo son empleadas los dos primeros pasos se hacen de la misma manera, pero el tercero se realiza montando en la máquina pulidora la herramienta de pétalo, la cual es un poco menor en tamaño a la superficie del vidrio a pulir. El cuarto paso se lleva a cabo, pero con un número menor de repeticiones.

Debido a la forma en que se realiza el proceso artesanal, los problemas que surgen son los siguientes:

Se generan pérdidas de tiempo y dinero, ya que al montar y desmontar en varias ocasiones para verificar si se tiene el perfil deseado, se consume tiempo al tener que alinear nuevamente la pieza de vidrio, y si se llega a desgastar más de lo requerido la pieza tiene que ser desechada generando costos extras al adquirir una nueva pieza e invertir más tiempo de trabajo en ésta.

Otro problema, es cuando dos técnicos trabajan para generar el mismo desgaste sobre diferentes superficies, puede suceder que 1) uno tarde más tiempo que el otro o quizás 2) obtengan diferentes

desgastes; por ello es importante que los técnicos lleven un mismo procedimiento para obtener resultados similares.

Por lo antes mencionado es importante minimizar las pérdidas de tiempo y dinero que se generan en el pulido de superficies ópticas en México, así como generalizar un procedimiento para generar una superficie, para que de esta manera no se dependa tanto de la experiencia del técnico.

1.4 Aplicación de la Ecuación de Preston en el pulido de superficies

En 1927, F. W. Preston describe el primer modelo matemático formal para el cálculo del desgaste producido por una herramienta sobre el vidrio. Considerando una superficie óptica y una herramienta de pulido en contacto, (ver figura 1.7), con una presión p y moviéndose con una velocidad relativa v . Preston afirmó que la cantidad de pulido b realizado en un intervalo de tiempo $[0, t_p]$ esta dado por:

$$b = \int_0^{t_p} ACpv \cdot dt \quad (1-1)$$

donde

A : constante que depende de factores tecnológicos, como tipo de vidrio, composición del abrasivo, temperatura, humedad, etc.

C : vale 1 si existe contacto entre el vidrio y la herramienta; y 0 si no existe.

v : velocidad relativa entre la herramienta (H) y el vidrio (V).

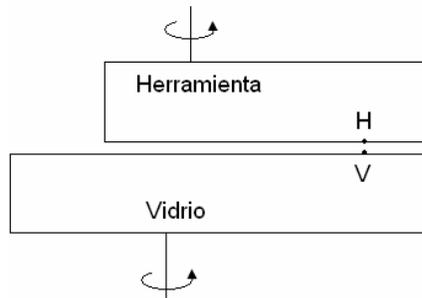


Figura 1.7. -Puntos en contacto entre el vidrio, V, y la herramienta, H.

Aplicar la ecuación (1-1) no es tan fácil, ya que:

- Un punto del vidrio no siempre está en contacto con la herramienta.
- La velocidad relativa, para un mismo instante de tiempo, es diferente para los diferentes puntos del vidrio.
- La presión varía de un punto a otro de la superficie cuando la herramienta sale parcialmente del vidrio.

Se ha discretizado el problema de la evaluación de la integral por computadora de la siguiente manera:

El intervalo de tiempo $(0, \tau)$ es dividido en N subintervalos de tiempo con duración:

$$\Delta t = \frac{\tau}{N} \quad (1-2)$$

El instante de tiempo en el que inicia cada subintervalo esta dado por

$$t_i = i \cdot \Delta t \quad (1-3)$$

donde $i = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$.

En cada instante t_i se evalúan C , p y v asumiendo que se mantienen constantes durante todo el subintervalo. La integral se calcula mediante la aproximación:

$$\int_0^{\tau} ACpv \cdot dt = A\Delta t \sum_{i=0}^{N-1} C_i p_i v_i \quad (1-4)$$

donde el subíndice indica el valor de la variable respectiva en el intervalo i -ésimo.

Desde la postulación del modelo de Preston se han realizado diversos tipos de análisis para obtener de manera automática o parcialmente automática las superficies ópticas deseadas. La ecuación de Preston se utiliza en diferentes trabajos para obtener valores llamados funciones bases, las cuales representan la cantidad de pulido que se obtiene por unidad de tiempo en diferentes puntos de la superficie, cuando actúa sobre ella una herramienta anular, bajo ciertas especificaciones técnicas como la presión, la velocidad de la máquina, etc. Estas funciones base pueden usarse para determinar los tiempos de estancia óptimos de las diferentes herramientas anulares, y diseñar mediante ellos una herramienta de pétalo que produzca el desgaste deseado [12, 13].

1.5 Propuesta de tesis

Se desea generar un nuevo tipo de herramienta de pulido que genere perfiles de desgaste deseado usando el pulido clásico de superficies. La condición que rige el diseño de esta nueva herramienta de pulido es que debe generar el mismo desgaste que genera una herramienta de pétalo dada, o uno muy similar.

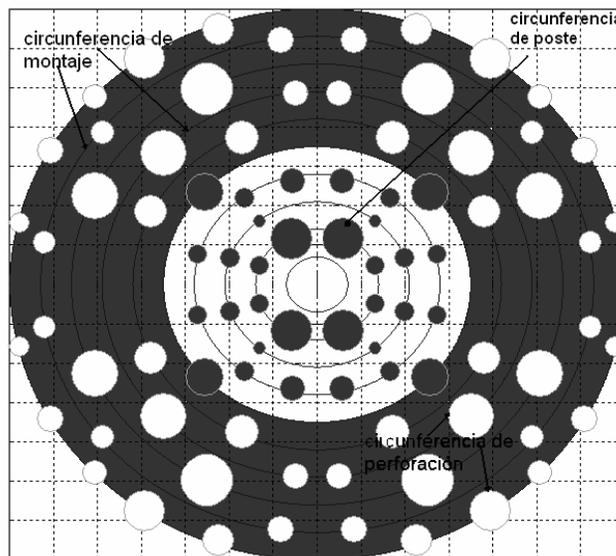


Figura 1.8. -Herramienta porosa.

La nueva herramienta será de tipo poroso como puede observarse en la figura 1.8. Estará integrada por dos partes unidas entre sí; la parte central será un disco sobre el cual se practicarán perforaciones circulares de diferentes radios, la parte exterior, de forma anular, estará compuesto por un determinado número de cilindros circulares (postes) levantados sobre la superficie de este anillo plano. Tanto los centros de las perforaciones como los centros de las bases de los postes estarán ubicados sobre circunferencias de montaje colocadas de manera imaginaria sobre el disco. Al ensamblar las dos partes de la herramienta la superficie no perforada de la primera debe quedar a la misma altura que el extremo superior de los postes de la segunda. De este modo el contacto entre la herramienta y la superficie a pulir se da precisamente en la región no perforada de la primera parte y los círculos que limitan por arriba los postes de la segunda. En el capítulo 4 se explicará porque se consideró en el diseño la presencia de estos postes y no únicamente de las perforaciones, como se hacía en la idea original.

Para obtener el número de circunferencias de perforación y de postes (de cada uno de los diámetros considerados) que deberán ir en cada circunferencia de montaje se recurrirá a programación lineal, utilizando la función linprog de matlab.

El diseño de esta herramienta supone un reto adecuado para aplicar creativamente algunos conocimientos adquiridos en la licenciatura, pero además la idea de hacer esta herramienta surge al tratar de idear un equivalente a la herramienta de pétalo, pero de más fácil construcción; en el taller de óptica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, dependencia con la que el cuerpo académico de óptica aplicada de la Universidad Tecnológica de la Mixteca ha tenido una estrecha colaboración, se han construido las herramientas de pétalo en forma artesanal. Por eso es que surge la idea de sustituirla por una herramienta porosa realizada mediante perforaciones de brocas comerciales con diámetros estándar. Además de que se desea que el desgaste que genere la herramienta porosa sea más uniforme en comparación con el desgaste que genera la herramienta de pétalo. Se mantiene la idea de las perforaciones para la parte central de la herramienta, mientras que para realizar la parte externa podría construirse un molde mediante perforaciones para el vaciado de los postes, para herramientas que obtienen un desgaste cóncavo, (para el caso convexo es a la inversa), aunque no sabemos si esta idea sea factible llevarla a la práctica, por eso debe considerarse la posibilidad de utilizar la máquina de control numérico con la que cuenta la Universidad Tecnológica de la Mixteca en su taller de metales. En cualquier caso es principalmente el aspecto matemático de la modelación y la solución del problema el que le da sustento a la presente tesis.

CAPÍTULO 2

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

(Chebyshev se distinguía por la tendencia a relacionar los problemas teóricos de la matemática con los problemas de la técnica y de la naturaleza. Según el propio Chebyshev “*La mayor parte de los problemas prácticos se reducen a problemas de máximo y mínimo que son nuevos para la ciencia y sólo su solución puede satisfacer a la práctica, que siempre busca lo mejor y más ventajoso*”).

2.1 Aproximación en un espacio métrico

Los espacios métricos proveen el contexto para realizar una aproximación, ya que una de las características básicas de un espacio métrico es que tienen una función de distancia^[14].

Definición 2.-1 Sea A un subconjunto no vacío de un espacio métrico X y $f \in X$; definimos y denotamos la mejor aproximación de f sobre el conjunto A por $E(f, A) = \inf\{d(f, g) : g \in A\}$.

Debe observarse que para cualquier $A \neq \emptyset$ y $f \in X$, el conjunto $\{d(f, g) : g \in A\}$ está acotado inferiormente y por lo tanto el número $E(f, A)$ existe.

Ejemplo 2.-2 Sea (X, d) donde $X = \mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y d la métrica usual, $A = (a, b)$, $f \notin A$, (ver figura 2.1). $E(f, A) = f - b$. Obsérvese que no existe $z \in A$ tal que $|z - f| = E(f, A)$.



Figura 2.1. -Intervalo abierto.

Ejemplo 2.-3 Sea $X = \mathbb{R}$, d , la métrica usual y $A = [a,b]$, $f \in \mathbb{R}$ y $f \notin A$, (ver figura 2.2). Existe $z \in A$ tal que $E(f, A) = |f - z|$ donde $z = b \in A$.



Figura 2.2. -Intervalo cerrado.

Definición 2.-4 Elemento de la mejor aproximación. Sean X un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $A \neq \emptyset$. Un elemento $a^* \in A$ se llama un elemento de la mejor aproximación de f sobre el conjunto A si $E(f, A) = d(f, a^*)$.

Es importante saber si el elemento de la mejor aproximación existe o no en un conjunto, ya que no siempre se puede asegurar que exista.

Problemas de Teoría de Aproximación

- a) Determinar si existe un elemento de la mejor aproximación de f sobre A para cada $f \in X$. En el caso de que para cada $f \in X$ exista un elemento de la mejor aproximación de f sobre A , el conjunto A se llama “conjunto de existencia de la mejor aproximación”.
- b) Determinar si el elemento de la mejor aproximación (en caso de que exista) es único. Cuando para cada $f \in X$ existe un único elemento de la mejor aproximación de f sobre A , se dice que A es conjunto de existencia y unicidad de la mejor aproximación.
- c) Caracterizar de alguna manera los elementos de la mejor aproximación.

Ejemplo 2.-5 Sea $X = \mathbb{R}^2$, d la métrica usual, $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2}$, y A el disco unitario. A es conjunto de existencia y unicidad de la mejor aproximación.

Ejemplo 2.-6 $X = \mathbb{R}^2$, sea d la métrica usual y $A = \{(x_1, x_2) : \max\{|x_1|, |x_2|\} = 2\}$, (ver figura 2.3), $f = (1,1)$. Los puntos $a_1 = (1,2)$ y $a_2 = (2,1)$ son elementos de la mejor aproximación de f en A . A es conjunto de existencia de la mejor aproximación pero no de unicidad.

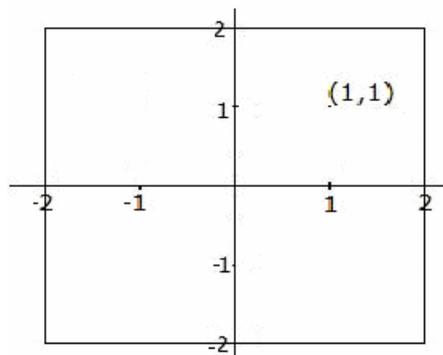


Figura 2.3. -Conjunto A

Teorema 2.-7 Si X es normado, A es convexo y $f \in X$ entonces $A(f) = \{g \in A \mid g \text{ es el elemento de la mejor aproximación a } f \text{ sobre } A\}$ es convexo.

Dem. Si $A(f) = \emptyset$ no hay nada que probar.

En otro caso sean $g_1, g_2 \in A(f)$ y $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \|f - [g_1\alpha + (1 - \alpha)g_2]\| &= \\ \|f + f\alpha - f\alpha - g_1\alpha - (1 - \alpha)g_2\| &\leq \|f\alpha - g_1\alpha\| + \|(1 - \alpha)f - (1 - \alpha)g_2\| \\ &= |\alpha|\|f - g_1\| + |1 - \alpha|\|f - g_2\| \\ &= |\alpha|E(f, A) + |1 - \alpha|E(f, A) \\ &= E(f, A)\{\alpha + 1 - \alpha\} \\ &= E(f, A) \end{aligned}$$

Luego $g_1\alpha + (1 - \alpha)g_2 \in A(f)$ por lo tanto $A(f)$ es convexo. ■

Teorema 2.-8 (de existencia). Si A es conjunto compacto no vacío en un espacio métrico X , entonces A es conjunto de existencia de la mejor aproximación.

Dem. Sea $p \in X$ y $\delta = \inf\{d(x, p) : x \in A\}$. Por definición de ínfimo, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en A con la propiedad $d(p, x_n) \leq \delta + \frac{1}{n}$. Por ser A compacto, existe una subsucesión $\{x_{\alpha_n}\}_{\alpha_n=1}^\infty$ de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ que converge a un punto $x^* \in A$.

Ahora hay que mostrar que x^* es un elemento de la mejor aproximación de f sobre A .

Por la desigualdad del triángulo se tiene que

$$d(p, x^*) \leq d(p, x_{\alpha_n}) + d(x_{\alpha_n}, x^*) \leq \delta + \frac{1}{\alpha_n} + d(x_{\alpha_n}, x^*),$$

ahora tomando límite a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d(p, x^*) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\delta + \frac{1}{\alpha_n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\alpha_n}, x^*) \\ d(p, x^*) &\leq \delta + 0 + 0 = \delta \end{aligned}$$

de donde $d(p, x^*) \leq \delta$.

Por otro lado como $x^* \in A$, se sabe que $d(p, x^*) \geq \delta$ por lo tanto $d(p, x^*) = \delta$. ■

Ejemplo 2.-9 Sea $X = \mathfrak{R}^2$ y $A = \{x : \|x\| < 1\}$ utilizando la métrica usual. Obsérvese que A no es compacto. Sea $f = (2,0) \in \mathfrak{R}^2$. No existe $p \in A$ tal que $E(f, A) = 1 = d(f, p)$. Por lo tanto, A no es conjunto de existencia (ver figura 2.4).

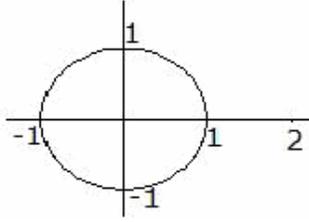


Figura 2.4. -Representación gráfica del conjunto A

Antes de enunciar nuestro segundo teorema de existencia de la mejor aproximación se recordarán otros teoremas.

Teorema 2.-10 Un subconjunto cerrado de un conjunto compacto en un espacio métrico es compacto.

Dem. Sea F un subconjunto cerrado de un conjunto compacto M . Si x_1, x_2, \dots es alguna sucesión en F , podemos encontrar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ la cual converge a un punto $x^* \in M$, por la compacidad de M . Ya que F es cerrado, x^* pertenece a F . ■

Teorema 2.-11 Un mapeo continuo de un espacio métrico en otro lleva conjuntos compactos en conjuntos compactos.

Dem. Sea ϕ tal mapeo y M un conjunto compacto en el dominio de ϕ . Si y_1, y_2, \dots es alguna sucesión en el conjunto imagen $\phi(M)$, entonces se puede encontrar $x_n \in M$ tal que $\phi(x_n) = y_n$. Por ser M compacto, se puede encontrar una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{\alpha_n} \rightarrow x \in M$. Por la continuidad de ϕ , entonces se sigue que $y_{\alpha_n} \rightarrow \phi(x)$. ■

Teorema 2.-12 (Bolzano-Weierstrass). Un intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto.

Dem. Se probará primero para $[0, 1]$. Considere una sucesión arbitraria

$$\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$$

en $[0, 1]$. Si algún número real ξ se encuentra un número infinito de veces en Λ , entonces, trivialmente, Λ tiene una subsucesión que converge a $\xi \in [0, 1]$. En otro caso cada miembro de Λ se escribirá en forma decimal,

$$\lambda = 0.a_1a_2a_3 \dots$$

Si agrupamos los elementos de Λ en diez subconjuntos según el primer dígito de sus expansiones decimales, entonces al menos uno de estos diez subconjuntos, debe contener un número infinito de elementos, tomemos uno de ellos y denotémoslo por S_1 . El conjunto S_1 definido así contiene infinitos puntos de Λ , y éstos tienen el mismo primer dígito. Ahora serán agrupados los elementos de S_1 en clases según su segundo dígito decimal. Una de estas clases, S_2 , debe contener un número infinito de elementos. El conjunto S_2 así definido contiene un número infinito de puntos de Λ , y estos tienen los mismos primeros dos dígitos decimales. Si se continúa de esta manera, tenemos una sucesión de conjuntos

$$S_1, S_2, \dots$$

tal que para cada k, S_k contiene un número infinito de puntos de Λ , todos con los mismos primeros k dígitos decimales. Con un reajuste apropiado podemos construir una sucesión S_1', S_2', \dots, S_n' a partir de S_1, S_2, \dots de intervalos cerrados y acotados que satisfacen la propiedad $0 = \inf \{ |S_n| : n \in \mathbb{N} \}$ y además

$$[0,1] \supseteq S_1' \supseteq S_2' \supseteq \dots \supseteq S_{k-1}' \supseteq S_k' \supseteq \dots \supseteq \dots$$

por la propiedad de los intervalos anidados, existe un único $\xi \in S_k$, para toda $k \in \mathbb{N}$. Ahora selecciónese un índice k_1 tal que $\lambda_{k_1} \in S_1$, un índice $k_2 > k_1$ tal que $\lambda_{k_2} \in S_2$, etc. Luego para cualquier $0 < \varepsilon$, existe un j tal que $0 < \frac{1}{10^j} < \varepsilon$ y con el cual

$$|\xi - \lambda_{k_i}| < 10^{-j} < \varepsilon \text{ para toda } i > j,$$

de aquí $\{\lambda_{k_i}\}$ es una subsucesión que converge a ξ . Por lo tanto, es obvio que $\xi \in [0,1]$. Así que $[0,1]$ es compacto.

Ahora bien, cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ es la imagen del intervalo $[0,1]$ bajo el mapeo continuo

$$\phi(x) = bx + (1-x)a,$$

y por el teorema 2.-11 se tiene que $[a,b]$ es compacto. ■

Lema 2.-13 En el espacio de n -uplas $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ con norma $\|\lambda\| = \max |\lambda_i|$, cada conjunto cerrado y acotado es compacto.

Dem. Se mostrara primero por inducción sobre n que los conjuntos

$$M_n = \{\lambda : \|\lambda\| \leq 1\}$$

son compactos. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass se tiene que $M_1 = [-1,1]$, es compacto. Ahora pondremos que M_n es compacto, para probar que M_{n+1} es compacto. Sea $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$ una sucesión de vectores en M_{n+1} . Cada uno de estos vectores es de la forma

$$\lambda^{(k)} = [\lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(k)}].$$

Como las componentes de estos vectores están en $[-1,1]$ se puede asumir, pasando a una subsucesión si es necesario que, $\lambda_{n+1}^{(k)}$ es convergente. Por la hipótesis de que M_n es compacto, se puede pasar una subsucesión de esta ultima tal que la sucesión de los vectores formados por las primeras n componentes de $\lambda^{(k)}$ converge a un vector $\lambda_n \in M_n$ y así $\lambda^{(k)}$ converge a $\lambda_{n+1} \in M_{n+1}$. Por lo tanto M_{n+1} es compacto. Ahora denotaremos por F un conjunto cerrado y acotado arbitrario en el n -espacio. Entonces para algún $c > 0$ F está contenido en cM_n . Ya que el mapeo $\lambda \rightarrow c\lambda$ es continuo, cM_n es compacto, por teorema 2.-11. Y como F es un subconjunto cerrado de un conjunto compacto, F también es compacto, por teorema 2.-10. ■

Teorema 2.-14 Si X es un conjunto cerrado y acotado en un espacio normado de dimensión finita entonces X es compacto.

Dem. Sea X tal conjunto, entonces existe un conjunto linealmente independiente $\{g_1, \dots, g_n\}$ con la propiedad de que cada elemento $f \in X$ se expresa únicamente en la forma

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i.$$

Denotemos por T al mapeo $T : \mathfrak{R}^n \rightarrow X$ dado por $\lambda \rightarrow f$. Si \mathfrak{R}^n es normado con $\|\lambda\| = \max|\lambda_i|$, T es continua, por que

$$\begin{aligned} \|T\lambda - T\mu\| &= \left\| \sum \lambda_i g_i - \sum \mu_i g_i \right\| = \left\| \sum (\lambda_i - \mu_i) g_i \right\| \\ &\leq \sum |\lambda_i - \mu_i| \|g_i\| \leq \|\lambda - \mu\| \sum \|g_i\|. \end{aligned}$$

De hecho por ser todas las normas equivalentes en \mathfrak{R}^n ^[16], la aplicación T es continua bajo cualquier norma que se considere.

El conjunto X es la imagen, bajo el mapeo T del conjunto

$$M = \{\lambda : T\lambda \in X\}.$$

Por el teorema **2.-11**, la compacidad de X se seguiría de la compacidad de M . Por el lema anterior será suficiente probar que M es cerrado y acotado. Si $\lambda^{(k)} \in M$ y $\lambda^{(k)} \rightarrow \lambda$, entonces

$$T\lambda = T(\lim \lambda^{(k)}) = \lim T(\lambda^{(k)}).$$

Ya que X es cerrado, $T\lambda \in X$, de donde $\lambda \in M$. Esto muestra que M es cerrado. Ahora falta probar que M es acotado. Como el conjunto $\{\lambda : \|\lambda\| = 1\}$ es compacto y T es continuo, el ínfimo, α , de $\|T\lambda\|$ esta en el conjunto. Ya que $\{g_1, \dots, g_n\}$ es independiente, $\alpha > 0$. Por lo tanto para algún $\lambda \neq 0$,

$$\|T\lambda\| = \left\| T\left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}\right) \right\| \cdot \|\lambda\| \geq \alpha \|\lambda\|.$$

Ya que $\|T\lambda\|$ esta acotado sobre M , $\|\lambda\|$ esta acotado sobre M . ■

Teorema 2.-15 (de existencia). Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es conjunto de existencia de la mejor aproximación.

Dem. Sea \mathcal{A} un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X y $g \in X$. Sea f_0 un punto arbitrario de \mathcal{A} . Entonces el punto que se busca está en el conjunto

$$\{f : f \in \mathcal{A}, \|f - g\| \leq \|f_0 - g\|\}.$$

Por el teorema **2.-14**, éste conjunto es compacto. Así pues, por el teorema **2.-8**, \mathcal{A} es conjunto de existencia de la mejor aproximación. ■

Corolario 2.-16 Sea X un espacio normado y sean $v_1, v_2, \dots, v_k \in X$, entonces el conjunto $C = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathfrak{R}, \alpha_i \geq 0 \right\}$ es un conjunto de existencia de la mejor aproximación.

Dem. Sean $g \in X$ y f_0 un punto arbitrario de C . El punto que se busca está en el conjunto

$$C1 = \{f : f \in C, \|f - g\| \leq \|f_0 - g\|\}$$

Resta ver que $C1$ es compacto, pero dado que el subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, \dots, v_k \in X$ es topológicamente isomorfo a \mathfrak{R}^k ^[17], tenemos que C es cerrado en X , de aquí que $C1$ es la intersección de dos cerrados, uno de ellos acotado, por lo tanto $C1$ es compacto. ■

Observe que en el teorema **2.-15**, la finitud de la dimensión del subespacio es una condición suficiente para que tal subespacio sea conjunto de existencia de la mejor aproximación.

¿Qué pasa si la dimensión de tal subespacio no es finita?. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.-17 Sea $X = C\left[0, \frac{1}{2}\right]$ con la suma usual de funciones y el producto de un real por una función, norma del supremo (norma uniforme) y en calidad de A el subespacio de todos los polinomios en la variable x . Se tiene que A no es de dimensión finita y no es un conjunto de existencia; pues para la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \in C\left[0, \frac{1}{2}\right]$$

no existe $g \in A$ tal que $E(f, A) = d(f, g)$.

En efecto suponga que existe

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m,$$

tal que g es elemento de mejor aproximación de f sobre A , luego

$$E(f, A) = \|f - g\| \leq \|f - b\|$$

para cada $b \in A$.

Para cada natural n consideremos el polinomio

$$b_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n,$$

tenemos que $b_n \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego para cada n numero natural, existe N_n , tal que

$$\|f - b_{N_n}\| < \frac{1}{n}.$$

Pero lo anterior indica que $\|f - g\| = 0$ y $f = g$ lo cual no puede ser, por tanto A no es un conjunto de existencia.

Ahora mostremos algunas condiciones para asegurar la unicidad del elemento de la mejor aproximación.

Definición 2.-18 *Convexidad uniforme.* Un espacio normado es uniformemente convexo, si para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\|f - g\| < \varepsilon$ siempre que

$$\|f\| = \|g\| = 1 \text{ y } \left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\| > 1 - \delta.$$

Ejemplo 2.-19 Sea $X = \mathfrak{R}^2$. Si utilizamos la norma euclidiana para X , tenemos que X es *uniformemente convexo*.

Ejemplo 2.-20 Sea $X = \mathfrak{R}^2$. Si se utiliza la norma del supremo para X , entonces X no es *uniformemente convexo*. Sea un $\varepsilon = 1$ y $f = (-1, 1)$, $g = (1, 1) \in X$ tales que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ y $\left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\|_\infty > 1 - \delta \quad \forall \delta > 0$ pero como $\|(f - g)\|_\infty = \|(-2, 0)\|_\infty = 2 > \varepsilon = 1$, por lo cual X no es uniformemente convexo.

Teorema 2.-21 Un conjunto convexo y cerrado en un espacio de Banach uniformemente convexo es un conjunto de existencia y unicidad para la mejor aproximación.

Dem. Sea A un conjunto cerrado y convexo en un espacio uniformemente convexo X y $f \in X$. Sea

$$s = E(f, A) = \inf \{ \|f - g\| : g \in A \}.$$

Si $s = 0$, existe una sucesión $g_n = f_n - f$, con $f_n \in A$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = s = 0$$

esto indica que f_n converge a f , pero A es cerrado, entonces $f \in A$.

Supongamos ahora que $s \neq 0$, entonces

$$1 = \frac{1}{s} \inf \{ \|f - g\| : g \in A \} = \inf \left\{ \left\| \frac{1}{s}f - \frac{1}{s}g \right\| : g \in A \right\} = E\left(\frac{1}{s}f, A^*\right),$$

donde $A^* = \left\{ \frac{1}{s}g : g \in A \right\}$. Tenemos que A^* es convexo y cerrado. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en A , tal que $\left\| \frac{1}{s}f - \frac{1}{s}f_n \right\| \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow \infty$. Defínase

$$g_n = \frac{1}{s}f - \frac{1}{s}f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$, tal que $\|b - g\| < \varepsilon$ siempre que

$$\|b\| = \|g\| = 1 \text{ y } \left\| \frac{1}{2}(b + g) \right\| > 1 - \delta.$$

Para este δ , existe N número natural de tal manera que $\|g_n\| - 1 < \delta$ para toda $n \geq N$. Sea $\lambda_n = \|g_n\|^{-1}$, entonces para $n, m \geq N$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|\lambda_n g_n + \lambda_m g_m\| &= \frac{1}{2} \|g_n + g_m - (1 - \lambda_n)g_n + (1 - \lambda_m)g_m\| \\
&\geq \frac{1}{2} [\|g_n + g_m\| - (1 - \lambda_m)\|g_m\| - (1 - \lambda_n)\|g_n\|] \\
&= \frac{1}{2} \|g_n + g_m\| - \frac{1}{2} (\|g_m\| - 1) - \frac{1}{2} (\|g_n\| - 1)
\end{aligned}$$

además

$$\frac{1}{2} \|g_n + g_m\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{f - f_n}{s} + \frac{f - f_m}{s} \right\| = \frac{1}{s} \left\| f - \frac{f_n + f_m}{2} \right\|$$

por ser \mathcal{A} convexo $\frac{f_n + f_m}{2} \in \mathcal{A}$ y por lo tanto $\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} \frac{f_n + f_m}{2} \in \mathcal{A}^*$, así $\left\| \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} \frac{f_n + f_m}{2} \right\| \geq 1$.

Así que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \|g_n + g_m\| - \frac{1}{2} (\|g_m\| - 1) - \frac{1}{2} (\|g_n\| - 1) \\
&\geq 1 - \frac{1}{2} \delta - \frac{1}{2} \delta = 1 - \delta.
\end{aligned}$$

Por convexidad uniforme, $\|\lambda_n g_n - \lambda_m g_m\| < \varepsilon$, luego la sucesión $\lambda_n g_n$ es de Cauchy. Por la completitud del espacio, se tiene $\lambda_n g_n \rightarrow g^*$.

Además,

$$\|g_n - g^*\| \leq \|g_n - \lambda_n g_n\| + \|\lambda_n g_n - g^*\| \leq \|g_n\|(1 - \lambda_n) + \|\lambda_n g_n - g^*\|$$

esto indica que $g_n \rightarrow g^*$. El conjunto

$$A^{**} = \left\{ \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} g : g \in \mathcal{A} \right\}$$

es convexo y cerrado, por lo tanto $g^* \in A^{**}$ luego $g^* = \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} g_0$ para algún $g_0 \in \mathcal{A}$ y como

$\|\lambda_n g_n\| = 1$, entonces $\|g^*\| = 1$, pero esto implica que

$$s = \|f - g_0\|,$$

Luego \mathcal{A} es de existencia.

Para demostrar la unicidad supongamos que $f', f'' \in \mathcal{A}$ son elementos de la mejor aproximación de f sobre \mathcal{A} . Entonces $\left\| \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f' \right\| = \left\| \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f'' \right\| = 1$ luego por desigualdad del triángulo,

$$\frac{1}{2} \left\| \left(\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f' \right) + \left(\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f'' \right) \right\| \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f' \right\| + \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f'' \right\| = 1$$

pero, como $\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f', \frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f'' \in A^{**}$ y como A^{**} es convexo entonces

$$\Omega = \frac{\left(\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f' \right) + \left(\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f'' \right)}{2} \in A^{**} \text{ y entonces } \|\Omega\| \geq 1 \text{ por que } E\left(\frac{1}{s} f, A^*\right) = 1.$$

Por lo tanto $\|\Omega\| \geq 1 - \delta, \forall \delta > 0$ luego entonces $\left\| \left(\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f' \right) - \left(\frac{1}{s} f - \frac{1}{s} f'' \right) \right\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$, y entonces $f' = f''$. ■

En general, el punto cuya existencia se garantiza por el teorema 2.-8 no es único.

Ejemplo 2.-22 Sea \mathfrak{R}^2 con norma $\|f\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$, donde $f = [\xi_1, \xi_2]$. Sea M el subespacio de puntos de la forma $[\xi_1, 0]$. Sea g el punto $[0, 1]$. Entonces la distancia de g a M es 1 y se alcanza tomando $[\xi, 0]$ con $|\xi| \leq 1$ (ver figura 2.5).

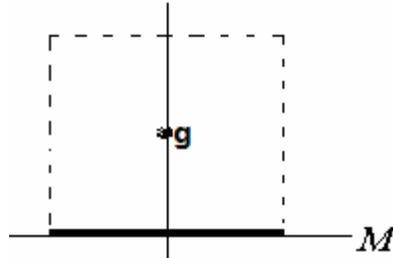


Figura 2.5. - Conjunto M

Este ejemplo sugiere que la curvatura de la esfera unitaria tenga que referirse a la unicidad. De hecho la unicidad del elemento de la mejor aproximación puede ser probada para un espacio estrictamente convexo.

Definición 2.-23 Un espacio normado es estrictamente convexo si $\|x\| = \|y\| = \|\frac{1}{2}(x + y)\| = 1$ implica $x = y$.

Ejemplo 2.-24 \mathfrak{R}^2 con la norma usual, es estrictamente convexo.

Ejemplo 2.-25 \mathfrak{R}^2 con la norma infinito, no es estrictamente convexo. En efecto, $x = (-1, 1)$ y $y = (1, 1)$ se tiene que $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|\frac{1}{2}(x + y)\|_\infty = 1$ sin embargo $x \neq y$.

Proposición 2.-26 Todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo.

Dem. Sea \mathcal{A} un espacio uniformemente convexo. Supóngase que $\|x\| = \|y\| = \|\frac{1}{2}(x + y)\| = 1$. Luego por la definición de uniformemente convexo se tiene que $\|x - y\| < \varepsilon$ para cada ε , y en consecuencia $x = y$. ■

Proposición 2.-27 Todo espacio estrictamente convexo de dimensión finita es uniformemente convexo.

Dem. Sea \mathcal{A} un espacio estrictamente convexo de dimensión finita. Sea $\varepsilon > 0$, y considérese el conjunto \mathcal{S} de pares (x, y) tales que $x, y \in \mathcal{A}$, $\|x\| = \|y\| = 1$, y $\|x - y\| \geq \varepsilon$. Este es un conjunto cerrado y acotado y por lo tanto compacto por el teorema 2.-14. Sobre este conjunto la función $1 - \frac{1}{2}\|x + y\|$ es continua y positiva por ser \mathcal{A} estrictamente convexo, así que tiene un ínfimo positivo, el cual se denota por δ . Entonces para el par (x, y) con $\|x\| = \|y\| = 1$ se tiene que

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \text{ entonces } 1 - \frac{1}{2}\|x + y\| \geq \delta$$

o de otra forma,

$$\frac{1}{2}\|x + y\| > 1 - \delta \text{ entonces } \|x - y\| < \varepsilon. \blacksquare$$

Teorema 2.-28 (de existencia y unicidad). Todo subespacio de dimensión finita de un espacio estrictamente convexo es conjunto de existencia y unicidad de la mejor aproximación.

Dem. La existencia ha sido ya probada en teorema 2.-15.

Suponga que f y f' son dos puntos del subespacio A tal que $d(f, g) = E(g, A) = d(f', g)$. Entonces

$$\left\| \frac{1}{2}(f + f') - g \right\| \leq \frac{1}{2}\|f - g\| + \frac{1}{2}\|f' - g\| = E(g, A).$$

Como A es un subespacio lineal, $\frac{1}{2}(f + f') \in A$, y consecuentemente el miembro izquierdo de esta desigualdad es mayor que $E(g, A)$. Ahora si $E(g, A) = 0$, es claro que $f = f' = g$. Si $E(g, A) \neq 0$, entonces los vectores $\frac{(f-g)}{E(g,A)}$, $\frac{(f'-g)}{E(g,A)}$ y su punto medio son todos de norma 1, y por la convexidad estricta, $f = f'$. ■

2.2 Splines

2.2.1 Introducción

La familia de polinomios es muy útil para resolver problemas de aproximación y esto se debe a la siguiente propiedad fundamental:

Dados $n + 1$ puntos distintos (x_i, y_i) en \mathbb{R}^2 existe un único polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que:

$$P(x_i) = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

si $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Ejemplo 2.-29 Con cuatro puntos distintos sólo se puede construir un polinomio de grado menor o igual a 3 que los interpole.

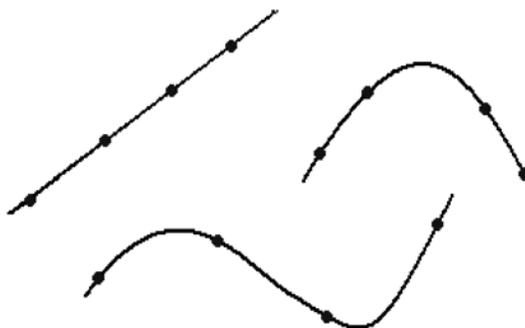


Figura 2.6. - Diferentes polinomios para cuatro puntos distintos.

Aún cuando los polinomios tienen esta buena propiedad, en ocasiones para ciertas distribuciones de puntos, el polinomio que pasa por los mismos tiene un comportamiento poco deseable, debido a las oscilaciones que exhibe su gráfica, (ver figura 2.7).

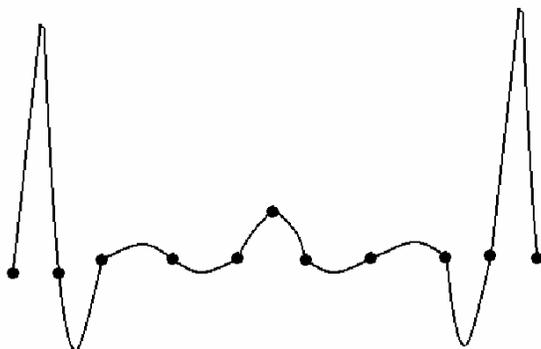


Figura 2.7. - Polinomio de grado 10 que interpola 11 puntos dados y que presenta oscilaciones.

Para evitar esto, se recurre a los splines o funciones a trozos, los cuales se construyen uniendo cada par de puntos por medio de un polinomio de grado n , de tal forma que se obtenga la curva deseada, como podemos observar en la figura 2.8, evitando así oscilaciones exageradas.



Figura 2.8. - 10 polinomios de diferente grado que interpolan 11 puntos dados en cada par de puntos

2.2.2 Función Spline

Sean un segmento $[a, b]$ y la partición P:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

donde x_0 y x_m son llamados nodos finales y x_1, \dots, x_{m-1} nodos internos.

Una función $S(x)$ definida sobre el segmento $[a, b]$ es llamada función spline de grado p , $p \geq 2$ si:

1. $S(x)$ es un polinomio de grado $k \leq p$ en cada $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m-1$,

$$S(x) = S_i(x) = \sum_{k=0}^p a_k^{(i)} (x - x_i)^k, \quad i = 0, \dots, m-1. \quad (2-1)$$

2. $S(x) \in C^{p-1}[a, b]$. (2-2)

Para definir por completo el spline (2-1) necesitamos conocer los valores de los coeficientes $a_k^{(i)}$, por lo que se tienen $(p+1)m$ incógnitas. Además como la función spline debe cumplir (2-2), es decir, que si $S_i^{(k)}(x_{i+1}) = S_{i+1}^{(k)}(x_{i+1})$, con $k = 0, 1, \dots, p-1$ y $i = 1, \dots, m-1$, entonces se tienen $p(m-1)$ condiciones.

Por lo tanto, para definir completamente el spline se necesitan $(p+1)m - p(m-1) = m + p$ números de condiciones.

Sea f una función de la cual conocemos los valores en los puntos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$, es decir,

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_{m-1}) = y_{m-1}, f(x_m) = y_m$$

Una función $S(x)$ definida sobre la partición anterior se llamada una función spline cúbica de interpolación si:

1. Es un polinomio cúbico en cada subintervalo $P, \Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, m-1$,
2. Es de clase $C^2[a, b]$, y
3. Satisface las condiciones

$$S(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, m \quad (2-3)$$

Para la construcción del spline de interpolación se requieren de las siguientes condiciones finales^[18]:

1. Condición final de primer tipo:

$$S'(a) = f'(a), \quad S'(b) = f'(b).$$

2. Condición final de segundo tipo:

$$S''(a) = f''(a), \quad S''(b) = f''(b).$$

3. Condición final de tercer tipo:

$$S'(a) = S'(b), \quad S''(a) = S''(b).$$

4. Condición final de cuarto tipo:

$$S'''(y, x_1 - 0) = S'''(y, x_1 + 0), \quad S'''(y, x_{m-1} - 0) = S'''(y, x_{m-1} + 0).$$

2.2.3 Construcción de la función spline cúbica de interpolación

Considérese el siguiente polinomio (para ver el desarrollo de (2-4) ver referencia [19]):

$$S_i(x) = y_i \frac{(x - x_{i+1})^2 [2(x - x_i) + \Delta x_i]}{\Delta x_i^3} + y_{i+1} \frac{(x - x_i)^2 [2(x_{i+1} - x) + \Delta x_i]}{\Delta x_i^3} + n_i \frac{(x_{i+1} - x)^2 (x - x_i)}{\Delta x_i} - n_{i+1} \frac{(x - x_i)^2 (x_{i+1} - x)}{\Delta x_i^2}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2-4)$$

que satisface
$$\begin{aligned} S_i(x_i) &= y_i & S(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ S'_i(x_i) &= n_i & S'(x_{i+1}) &= n_{i+1} \end{aligned} \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \text{con } i = 1, \dots, m-1.$$

Utilizaremos la ecuación (2-4) teniendo en cuenta que n_i son desconocidas, esto para la construcción de nuestro spline cúbico.

Si derivamos dos veces la ecuación (2-4) obtenemos:

$$S''_i(x) = 6 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i^3} (x_{i+1} + x_i - 2x) - 2 \frac{n_i}{\Delta x_i^2} (2x_{i+1} + x_i - 3x) - 2 \frac{n_{i+1}}{\Delta x_i^2} (x_{i+1} + 2x_i - 3x), \text{ para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2-5)$$

Como se quiere que $S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i)$, para $i = 2, \dots, m-1$ utilizando la ecuación (2-5) se tiene:

$$\begin{aligned} 6 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i^2} - 4 \frac{n_i}{\Delta x_i} - 2 \frac{n_{i+1}}{\Delta x_i} &= -6 \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}^2} + 2 \frac{n_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + 4 \frac{n_i}{\Delta x_{i-1}} \\ - 2 \frac{n_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} - 4 \frac{n_i}{\Delta x_{i-1}} - 4 \frac{n_i}{\Delta x_i} - 2 \frac{n_{i+1}}{\Delta x_i} &= -6 \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}^2} - 6 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i^2} \\ \frac{1}{\Delta x_{i-1}} n_{i-1} + 2 \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i} \right) n_i + \frac{1}{\Delta x_i} n_{i+1} &= 3 \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_{i-1}^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i^2} \right) \\ \Delta x_i n_{i-1} + 2(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) n_i + \Delta x_{i-1} n_{i+1} &= 3 \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} y_i - y_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} y_{i+1} - y_i \right) \end{aligned}$$

Si dividimos todo por $\Delta x_{i-1} + \Delta x_i$ se obtiene que los n_i deben satisfacer las ecuaciones:

$$a_i n_{i-1} + d_i n_i + (1 - a_i) n_{i+1} = b_i \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (2-6)$$

donde

$$\begin{aligned} d_i &= 2 \\ a_i &= \Delta x_i / (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) \\ b_i &= 3 \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i} \right) \end{aligned} \quad (2-7)$$

Si se supone que n_1 y n_m se eligen de alguna forma, entonces (2-6) es un sistema de $m-2$ ecuaciones lineales para calcular las incógnitas n_i con $i = 2, \dots, m-1$.

Regresando al sistema (2-6), este es tridiagonal, ver definición en glosario de términos, y de (2-7) es claro que el sistema es diagonalmente dominante, ver glosario, ya que

$$d_i = 2 > a_i + (1 - a_i) = 1$$

Luego por el teorema A.4. el sistema es no singular, por lo cual el sistema (2-6) tiene solución única.

$$S_1(x) = S_1(x_2) + S_1'(x_2)(x - x_2) + S_1''(x_2) \frac{(x - x_2)^2}{2} + S_1'''(x_2) \frac{(x - x_2)^3}{6}$$

$$S_2(x) = S_2(x_2) + S_2'(x_2)(x - x_2) + S_2''(x_2) \frac{(x - x_2)^2}{2} + S_2'''(x_2) \frac{(x - x_2)^3}{6}$$

En esta condición de frontera se exige que S''' sea continua en x_2 e igualmente en x_{m-1} , es decir

$$S_1'''(x_2) = S_2'''(x_2) \quad (2-10)$$

Derivando nuevamente (2-5) obtenemos

$$S'''_i(x) = -12 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i^3} + 6 \left(\frac{n_i + n_{i+1}}{\Delta x_i^2} \right), \quad \text{para } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (2-11)$$

Utilizando la condición (2-10) en (2-11) e igualando se obtiene:

$$-12 \frac{y_2 - y_1}{\Delta x_1^3} + 6 \left(\frac{n_1 + n_2}{\Delta x_1^2} \right) = -12 \frac{y_3 - y_2}{\Delta x_2^3} + 6 \left(\frac{n_2 + n_3}{\Delta x_2^2} \right) \quad (2-12)$$

recuérdese que de (2-6) se tiene que:

$$n_3 = \frac{b_2 - a_2 n_1 - d_2 n_2}{1 - a_2} = \frac{3}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} (y_2 - y_1) + \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} (y_3 - y_2) \right) - a_2 n_1 - d_2 n_2$$

Luego sustituyendo n_3 en la ecuación (2-12) y simplificando términos se obtiene:

$$\Delta x_2 n_1 + (x_3 - x_1) n_2 = \frac{(y_2 - y_1)(\Delta x_1 + 2(x_3 - x_1))\Delta x_2}{\Delta x_1(x_3 - x_1)} + \frac{(y_3 - y_2)\Delta x_1^2}{\Delta x_2(x_3 - x_1)} \quad (2-13)$$

Aplicando el mismo procedimiento para el extremo final, se obtiene:

$$(x_m - x_{m-2})n_{m-1} + \Delta x_{m-2}n_m = \frac{(y_{m-1} - y_{m-2})\Delta x_{m-1}^2}{\Delta x_{m-2}(x_m - x_{m-2})} + \frac{(y_m - y_{m-1})(\Delta x_{m-1} + 2(x_m - x_{m-2}))\Delta x_{m-2}}{\Delta x_{m-1}(x_m - x_{m-2})} \quad (2-14)$$

Así que las n_1, \dots, n_m se obtiene al solucionar el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & d_2 & 1 - a_2 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & a_{m-1} & d_{m-1} & 1 - a_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{m-1} \\ n_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix}$$

donde $d_1 = \Delta x_2$, $a_1 = x_3 - x_1$ y $a_m = x_m - x_{m-2}$, $a_1 = \Delta x_{m-2}$ y b_1 y b_m son el lado derecho de (2-13) y (2-14) respectivamente y los demás están dados por (2-7).

Una manera más conveniente de escribir el spline cúbico $S(x)$ es definir cada polinomio $S_i(x)$ en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ por medio del polinomio de Taylor alrededor de x_i , utilizando la condición iii) queda:

$$\begin{aligned} S_i(x) &= S_i(x_i) + S'_i(x_i)(x - x_i) + S''_i(x_i)(x - x_i)^2 / 2 + S'''_i(x_i)(x - x_i)^3 / 6 \\ &= A_i + B_i(x - x_i) + C_i(x - x_i)^2 / 2 + D_i(x - x_i)^3 / 6 \end{aligned} \quad (2-15)$$

donde

$$\begin{aligned} A_i &= y_i \\ B_i &= n_i \\ C_i &= -\frac{2}{\Delta x_i} \left(2n_i + n_{i+1} - 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i} \right) \\ D_i &= \frac{6}{\Delta x_i^2} \left(n_i + n_{i+1} - 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x_i} \right) \end{aligned} \quad (2-16)$$

Teorema 2.-30 Una función spline cúbica de interpolación (2-15) que satisface el sistema de ecuaciones (2-6) y (2-7) existe y es única.

Dem. Por construcción la función existe. Y por ser el sistema lineal de los n_i , en ecuación (2-6) diagonalmente dominante, por un teorema de álgebra el sistema es no singular, y por lo tanto el sistema tiene solución única. ■

2.2.4 Spline cúbico paramétrico

En ocasiones los datos que uno desea aproximar a una función, tienen para una misma abcisa más de un valor, y debido a que en una función esto no es posible, es necesario ver los puntos (x_i, y_i) como dos funciones:

$$\begin{aligned} x &= P_1(t) \\ y &= P_2(t) \quad \text{donde } a \leq t \leq b \end{aligned}$$

de manera que para valores

$$t_1 < t_2 < \dots < t_m \quad (2-17)$$

del parámetro t se tiene que

$$\begin{aligned} P_1(t_i) &= x_i \\ P_2(t_i) &= y_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Una vez elegidos los valores de t_i del parámetro t que cumplan (2-17) se construye el spline cúbico P_1 que interpola las x_i de la curva original y el P_2 que interpola las y_i , es decir:

$$\begin{aligned}x &= P_1(t) \\y &= P_2(t)\end{aligned}$$

pasa por los puntos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$. Esta curva se conoce como *spline cúbico paramétrico*.

La elección de la parametrización adecuada es fundamental para evitar que el interpolante tenga oscilaciones bruscas. La experiencia demuestra que en cualquier aproximación, parametrizar respecto a la longitud de arco es conveniente. En este caso se tomarán como parámetros:

$$\begin{aligned}t_1 &= 0 \\t_{i+1} &= t_i + d_i \quad i = 1, \dots, m-1\end{aligned} \quad (2-18)$$

donde d_i es una aproximación de la longitud de arco que va de (x_i, y_i) a (x_{i+1}, y_{i+1}) , la manera de calcular d_i ^[20] puede ser:

$$\begin{aligned}\text{i) } d_i &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ \text{ii) } d_i &= \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 \\ \text{iii) } d_i &= |\Delta x_i| + |\Delta y_i| \\ \text{iv) } d_i &= \max(|\Delta x_i|, |\Delta y_i|)\end{aligned} \quad (2-19)$$

donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ y $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Una vez que se ha elegido la forma de los puntos t_i entonces de (2-6) se tiene que las pendientes del spline $P_1(t)$ que interpola a x_i se calcula como solución del sistema:

$$a_i n_{i-1} + d_i n_i + (1 - a_i) n_{i+1} = b_i \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (2-20)$$

donde

$$\begin{aligned}d_i &= 2 \\ a_i &= \Delta t_i / (\Delta t_{i-1} + \Delta t_i) \quad \text{con } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \\ b_i &= 3 \left(\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta t_{i-1} + \Delta t_i} + \frac{\Delta t_{i-1}}{\Delta t_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta t_{i-1} + \Delta t_i} \right)\end{aligned} \quad (2-21)$$

La primera y última ecuación del sistema (2-20) depende de la condición de frontera seleccionada.

De forma similar, las n_i del spline $P_2(t)$ que interpola a y_i se obtienen como solución del sistema (2-20), donde lo único que cambia es:

$$b_i = 3 \left(\frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \frac{\Delta y_{i-1}}{\Delta t_{i-1} + \Delta t_i} + \frac{\Delta t_{i-1}}{\Delta t_i} \frac{\Delta y_i}{\Delta t_{i-1} + \Delta t_i} \right) \quad i = 2, \dots, m-1 \quad (2-22)$$

Quedando el spline cúbico paramétrico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}P_1(t) &= A_i + B_i(t - t_i) + C_i(t - t_i)^2 / 2 + D_i(t - t_i)^3 / 6 \\ P_2(t) &= a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 / 2 + d_i(t - t_i)^3 / 6\end{aligned} \quad (2-23)$$

CAPÍTULO 3

LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y SU APLICACIÓN A PROBLEMAS DE APROXIMACIÓN

Dantzing, padre de la programación lineal afirmó *“la diferencia entre los investigadores de operaciones y los políticos, es que unos intentan resolver el problema honestamente y el otro está pretendiendo resolver el problema”*
George B. Dantzing

3.1 Introducción

La programación lineal ha sido una de las técnicas más innovadoras que ha contribuido al desarrollo económico, social y bélico, entre otros. El avance tecnológico, específicamente en el área de cómputo, ha puesto la programación lineal al alcance de todos.

El objetivo de la programación lineal es resolver un problema de maximización o minimización de una función lineal con restricciones lineales que pueden ser de desigualdad, igualdad o una combinación de ambas. Un problema formulado de esta manera recibe el nombre de programa lineal. Una forma típica de un programa lineal^[20] es:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{sujeto a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \text{(PL)} & \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \quad (3-1)$$

En el programa **3-1** llamaremos a $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ función objetivo, que debe minimizarse o maximizarse y la denotaremos por z . Los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n son los coeficientes de costo, los cuales son conocidos y x_1, x_2, \dots, x_n son las variables que deben determinarse. Los coeficientes a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ son llamados coeficientes tecnológicos. Los b_i representan los requerimientos mínimos que deben satisfacerse. Las restricciones $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ son llamadas restricciones de no negatividad.

En cuanto a los métodos de solución, durante décadas, el método simplex inventado por George B. Dantzing dominó la solución de este tipo de problemas, dada su fácil implementación y el tiempo de resolución en problemas a pequeña, mediana y gran escala^[20]. Posteriormente otros matemáticos, entre ellos Narendra K. Karmarkar, desarrollaron los métodos de Punto Interior^[20], los cuales han probado ser de complejidad polinomial, a diferencia del simplex que no muestra esta característica para cualquier problema. Sin embargo, para la mayoría de los problemas prácticos el método simplex resulta altamente eficiente y por esa razón sigue siendo de amplio uso. En el resto de este capítulo presentaremos un breve estudio de los programas lineales y de su solución por el método simplex. Para mayores detalles sobre la programación lineal se pueden consultar un gran número de textos, entre ellos la referencia [20].

El método simplex se basa fundamentalmente en que la solución óptima de un programa lineal está asociada con un punto extremo y que los puntos extremos están completamente definidos por las soluciones básicas de la forma estándar del modelo de programación lineal.

3.2 Geometría de la programación lineal

La programación lineal (PL) puede ser estudiada algebraica y geoméricamente. Ambas aproximaciones son equivalentes, pero una de ellas puede ser más conveniente que la otra para dar respuesta a preguntas particulares acerca de programación lineal.

La región factible puede describirse desde el punto de vista geométrico, y usar conceptos tales como el de convexidad para analizar el programa lineal. Usando geometría muchos de los conceptos en programación lineal son fáciles de entender, por que ellos pueden ser descritos en términos de nociones intuitivas tales como “moverse a lo largo del borde de la región factible”.

Ejemplo 3.-1 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a } & -x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La región factible se gráfica en la figura 3.1

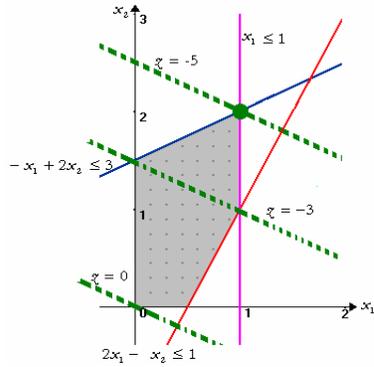


Figura 3.1. - Región factible

La figura incluye líneas rectas punteadas correspondientes a varios valores de la función objetivo. Como se ilustra, el valor de z decrece según estas líneas son movidas hacia arriba y a la derecha. El objetivo z no puede ser decrementado indefinidamente. Eventualmente la recta $z = k$ deja de intersectar la región factible, indicando que no hay puntos factibles correspondientes a ese valor particular de z . El mínimo ocurre cuando $z = -5$, en el punto $(1, 2)^T$, es decir, en el último punto donde una *línea objetivo* (curva de nivel de la función objetivo) intercepta la región factible. Esto ocurre en una esquina de la región factible, lo cual no constituye algo excepcional.

3.3 Forma estándar

De manera algebraica el programa lineal se puede escribir de una manera particular, llamada "forma estándar". Entonces los coeficientes de la matriz de restricciones del programa lineal pueden ser analizados y manipulados como un sistema de ecuaciones, usando herramientas de algebra lineal. Si $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $y_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ escribimos $y \geq 0$.

En notación matricial, un programa lineal en forma estándar será escrito:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z = cx^T \\ &\text{sujeto a } Ax = b \quad (3-2) \\ &\quad \quad \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $b \geq 0$. x y c son vectores de tamaño n , b es vector de tamaño m , y A es una matriz $m \times n$ llamada *matriz de restricciones*. Esta forma particular de un programa lineal se usa dentro del método simplex.

Todos los programas pueden ser convertidos a su forma estándar. Las reglas para hacer esto son simples:

- a. Si el problema original es un problema de minimizar, entonces la función objetivo se puede multiplicar por -1 para obtener un problema de maximización: $\max z^* = -z$. Después que el problema ha sido resuelto, el valor objetivo óptimo debe multiplicarse por -1, así que $z = -z^*$. Los valores óptimos de las variables son los mismos para ambas funciones objetivos.

b. Si alguna de las componentes de b es negativa, entonces estas restricciones deberán ser multiplicadas por -1 . Esto ocasionará que la restricción de la forma \leq se convierta a una restricción de la forma \geq , y viceversa.

c. Si una variable tiene una cota inferior diferente de cero, por ejemplo

$$x_1 \geq 5$$

entonces la variable puede ser reemplazada en el problema por

$$x'_1 = x_1 - 5$$

Una cota superior en una variable puede ser tratada como una restricción.

Una variable que no está acotada ni inferior ni superiormente será llamada variable "libre" o "sin restricciones", y puede ser reemplazada por un par de variables no negativas. Por ejemplo, si x_2 es una variable libre, en el programa será reemplazada por:

$$x_2 = x'_2 - x''_2, \text{ con } x'_2, x''_2 \geq 0.$$

d. Si la restricción es de la forma \leq , por ejemplo:

$$2x_1 + 7x_2 - 3x_3 \leq 10,$$

se convertirá en una igualdad sumándole en el miembro izquierdo una variable de "holgura" s_1 :

$$2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + s_1 = 10$$

y agregando la restricción de no negatividad $s_1 \geq 0$. Similarmente, una restricción de la forma \geq , por ejemplo:

$$6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 15$$

se convierte en una igualdad restándole en el miembro izquierdo una variable de "exceso" e_2 :

$$6x_1 - 2x_2 + 4x_3 - e_2 = 15$$

y agregando la restricción $e_2 \geq 0$.

Ejemplo 3.-2 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & z = -5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 7 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & -4x_1 - 9x_2 + 4x_3 \leq -4 \\ & x_1 \geq -2, 0 \leq x_2 \leq 4, x_3 \text{ libre} \end{array}$$

después de aplicarle las reglas anteriormente mencionadas el programa queda:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar } & z' = 5x'_1 + 3x_2 - 7x'_3 + 7x''_3 \\
\text{sujeto a } & 2x'_1 + 4x_2 + 6x'_3 - 6x''_3 = 11 \\
& 3x'_1 - 5x_2 + 3x'_3 - 3x''_3 + s_2 = 11 \\
& 4x'_1 + 9x_2 - 4x'_3 + 4x''_3 - e_3 = 12 \\
& x_2 + s_4 = 4 \\
& x'_1, x_2, x'_3, x''_3, s_2, e_3, s_4 \geq 0
\end{aligned}$$

En forma matricial será representado por:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar } & z = cx^T \\
\text{sujeto a } & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

con

$$c = (5 \ 3 \ -7 \ 7 \ 0 \ 0 \ 0), \quad b = (11 \ 11 \ 12 \ 4)^T \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -4 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El vector de variables es $x = (x'_1 \ x_2 \ x'_3 \ x''_3 \ s_2 \ e_3 \ s_4)$ con c y x vectores renglón de dimensión 7.

3.4 Solución básica y puntos extremos

Consideremos el problema de programación lineal en su forma estándar (3-2), con $m \leq n$. Supóngase que la matriz A es de rango completo, es decir, que los renglones de A son linealmente independientes.

La razón por la que se hace esta suposición es por que si A no fuera de rango completo se tendría que las restricciones son inconsistentes o habría restricciones redundantes, dependiendo del vector b . Si las restricciones son inconsistentes la región factible es vacía y el problema no tiene solución. Si hay restricciones redundantes pueden ser removidas del problema sin cambiar la región factible, ni la solución.

Si $m = n$ entonces la solución de $Ax = b$ es única y sólo hay un punto en la región factible.

En el caso general $m \leq n$, si x es una solución de $Ax = b$, y si es posible separar las componentes de x en dos vectores, uno x_N , de $n - m$ variables las cuales son iguales a cero, y otro x_B , de m variables cuyos coeficientes en las restricciones determinan una matriz invertible B de $m \times m$, decimos entonces que x es una solución básica del programa lineal. En casos donde más de $n - m$ componentes de x son cero habrá más de una manera de elegir x_B y x_N .

Las m variables asociadas a x_B se llaman **variables básicas** y las $n - m$ restantes variables se conocen como **variables no básicas**.

x es una solución básica factible si además de ser solución básica, satisface la restricción de no negatividad $x \geq 0$. Si adicionalmente es óptima para el programa lineal, entonces es una solución básica factible óptima.

Sea x una solución básica factible. Una vez que un conjunto de variables básicas ha sido seleccionado es posible reordenar las variables, así que podemos escribir:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

La matriz de restricción puede ser escrita como:

$$A = (B, N)$$

donde B es la matriz de coeficientes para x_B y N es la matriz de coeficientes para x_N . Para una solución básica tendremos que $x_N = 0$, así que el sistema de restricciones $Ax = b$ se simplifica a $Bx_B = b$:

$$Ax = (B, N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = Bx_B + Nx_N = Bx_B = b$$

Por lo tanto x_B , está determinado por B y b .

Ejemplo 3-3 Consideremos las siguientes dos ecuaciones con 5 incógnitas.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 9x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 9 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + 6x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Una solución básica sólo puede incluir dos ($m = 2$) variables básicas, por lo que se tendrán tres ($n - m = 3$) variables no básicas iguales a cero. Analicemos algunos de los posibles casos que pueden presentarse dependiendo de las combinaciones que se propongan de variables básicas y no básicas.

Caso 1. Solución básica factible

Variables no básicas: $(x_2, x_4, x_5) = (0, 0, 0)$

Ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 9x_3 &= 9 \\ 5x_1 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Solución: única con $x_1 = 0, x_3 = 1$.

Solución básica factible debido a que $x_1, x_3 \geq 0$.

Caso 2. Solución básica no factible

Variables no básicas: $(x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0)$

Ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 9 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Solución: única con $x_1 = -12, x_2 = 21$.

Paso 3. Determinar las nuevas soluciones básicas empleando los cálculos apropiados de Gauss-Jordan. Ir al paso 1.

Ejemplo 3.-4 Consideremos el siguiente programa lineal

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 5x_1 + 3x_2 \\ & 8x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ \text{sujeto a} \quad & 3x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & -2x_1 + 5x_2 \leq 5 \\ & x_2 \leq \frac{1}{2} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Al aplicar las reglas de la sección 3.3 al programa lineal anterior para llevarlo a su forma estándar se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 5x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\ \text{sujeto a} \quad & 8x_1 + 2x_2 + s_1 \leq 9 \\ & 3x_1 + 4x_2 + s_2 \leq 5 \\ & -2x_1 + 5x_2 + s_3 \leq 5 \\ & x_2 + s_4 \leq 1 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

El programa lineal en su forma estándar se acomoda en la siguiente tabla símplex:

Tabla 3.2 Tabla símplex inicial.

Sol. básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	-5	-3	0	0	0	0	0
s_1	0	8	2	1	0	0	0	9
s_2	0	3	4	0	1	0	0	5
s_3	0	-2	5	0	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1

En la tabla 3.2 cada uno de los cuatro renglones inferiores representa una ecuación de restricción cuyo lado derecho se da en la columna de “solución”.

El renglón $-z$ se obtiene de

$$z - 5x_1 - 3x_2 = 0.$$

Iteración 0.

Tabla 3.3 Tabla símplex con solución básica en las variables de holgura.

Sol. básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	-5	-3	0	0	0	0	0
s_1	0	8	2	1	0	0	0	9
s_2	0	3	4	0	1	0	0	5
s_3	0	-2	5	0	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1

Las variables de holgura s_1, s_2, s_3 y s_4 proporcionan una solución *básica factible* inicial, teniendo como variables no básicas cero a x_1 y x_2 y la columna “solución” proporciona automáticamente los valores de las holguras, variables básicas, $s_1 = 9, s_2 = 5, s_3 = 5$ y $s_4 = 1$, ver tabla 3.3, esto por la manera en que se asocian las holguras con las columnas. En esta primera iteración el valor de z es cero.

Iteración 1.

Elegimos a la variable no básica x_1 como *variable de entrada* ya que tiene el coeficiente *más negativo* en el renglón z . La variable de entrada x_1 ahora debe incrementarse arriba del nivel cero. La figura 3.2 muestra que empezando en el origen A, el valor más grande que se le puede asignar a x_1 , sin caer fuera del espacio factible, es el punto B.

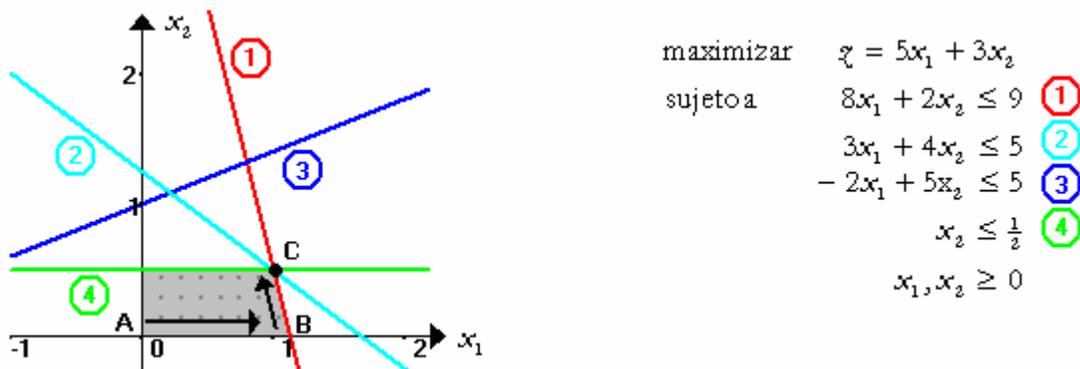


Figura 3.2. - Representación de una iteración del método simplex.

De la figura 3.2 determinaremos B considerando las intersecciones de las restricciones con el eje x_1 . Estas intersecciones están dadas por las **razones** del lado derecho de la ecuación, columna solución, con los coeficientes correspondientes de la restricción bajo x_1 , como se observa en la tabla 3.4.

Tabla 3.4 Selección de las variables de entrada y salida.

Sol. básica factible	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	Razón (o intersección)
z	1	-5	-3	0	0	0	0	0	
s_1	0	8	2	1	0	0	0	9	$9/8=1.125$ (min)
s_2	0	3	4	0	1	0	0	5	$5/3=1.666$
s_3	0	-2	5	0	0	1	0	5	$5/-2=-2.5$ (No considerar)
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1	$1/0=\infty$ (No considerar)

Nos interesan razones *no negativas* (intersecciones) debido a que representan la dirección del incremento en x_1 . Por ello se descartan las razones de los renglones de las restricciones 3 y 4 cuyos coeficientes son negativo y cero, ver tabla 3.4.

Como la razón no negativa mínima proporciona el valor de la variable de entrada x_1 en la nueva solución se tiene que $x_1 = \frac{9}{8}$.

Por lo tanto, la variable básica s_1 será la *variable de salida*, la cual tomará el valor cero.

Los cálculos de la nueva solución básica se basan en las operaciones de renglones Gauss-Jordan.

Tabla 3.5 Ubicando el renglón pivote, la columna pivote y el elemento pivote.

Sol. básica factible	ζ	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	-5	-3	0	0	0	0	0
s_1	0	8	2	1	0	0	0	9
s_2	0	3	4	0	1	0	0	5
s_3	0	-2	5	0	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1

← Renglón pivote
 ↓ Columna pivote

La intersección de la columna pivote y el renglón pivote definen el **elemento pivote**, ver tabla 3.5.

Los cálculos de Gauss-Jordan necesarios para producir la nueva solución básica son:

1. Renglón pivote

$$\text{Nuevo renglón pivote} = \text{renglón pivote actual} \div \text{elemento pivote}$$

2. Todos los demás renglones, incluyendo ζ

$$\text{Nuevo renglón} = \text{renglón actual} - \text{producto de su coeficiente en la columna pivote por el nuevo renglón pivote.}$$

Realizando el primer cálculo se obtiene la tabla 3.6.

Tabla 3.6 Cálculo del nuevo renglón pivote.

Sol. básica factible	ζ	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z								
x_1	0	1	2/8	1/8	0	0	0	9/8
s_2								
s_3								
s_4								

← Nuevo renglón pivote

Posteriormente, al aplicar los cálculos del tipo 2 se obtiene la nueva tabla 3.7 símplex, con la nueva solución básica $x_1 = \frac{9}{8}$, $s_2 = \frac{13}{8}$, $s_3 = \frac{29}{4}$ y $s_4 = \frac{1}{2}$ con valor objetivo $\zeta = 45/8$.

Tabla 3.7 Tabla símplex final, después de realizar los cálculos de G-J.

Sol. básica factible	ζ	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	-7/4	5/8	0	0	0	45/8
x_1	0	1	1/4	1/8	0	0	0	9/8
s_2	0	0	13/4	-3/8	1	0	0	13/8
s_3	0	0	11/2	1/4	0	1	0	29/4
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1/2

Iteración 2.

La tabla 3.7 símplex no es óptima pues la variable *no básica* x_2 tiene coeficiente negativo en el renglón ζ luego por la condición de optimalidad la *variable de entrada* es x_2 y nuestra *variable de salida* es s_2 , ver tabla 3.8.

Tabla 3.8 Ubicando las variables de entrada y salida en la iteración 2.

Sol. básica factible	ζ	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución	Razón (o intersección)
z	1	0	-7/4	5/8	0	0	0	45/8	
x_1	0	1	1/4	1/8	0	0	0	9/8	9/8/(1/4)=9/2
s_2	0	0	13/4	-3/8	1	0	0	13/8	13/8/(13/4)=1/2
s_3	0	0	11/2	1/4	0	1	0	29/4	29/4/(11/2)=29/22
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1/2	1/2/1=1/2

Se realizan nuevamente los cálculos necesarios como en la iteración 1, tabla 3.9, obteniendo la tabla 3.10 con solución básica $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{9}{2}$ y $s_4 = 0$ y con valor objetivo $\zeta = 13/2$.

Tabla 3.9 Calculo del nuevo renglón pivote.

Sol. básica factible	ζ	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	-7/4	5/8	0	0	0	45/8
x_1	0	1	1/4	1/8	0	0	0	9/8
x_2	0	0	1	-3/26	4/13	0	0	1/2
s_3	0	0	11/2	1/4	0	1	0	29/4
s_4	0	0	1	0	0	0	1	1/2

Tabla 3.10 Tabla símplex óptima.

Sol. básica factible	ζ	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solución
z	1	0	0	11/26	7/13	0	0	13/2
x_1	0	1	0	2/13	-1/13	0	0	1
x_2	0	0	1	-3/26	4/13	0	0	1/2
s_3	0	0	0	23/26	-22/13	1	0	9/2
s_4	0	0	0	3/26	-4/13	0	1	0

Como se puede ver en la tabla 3.10 la solución es óptima pues ninguno de los coeficientes del renglón ζ asociados con las variables no básicas s_1 y s_2 es negativo.

CAPÍTULO 4

MODELACIÓN DEL PROBLEMA

(El término modelo se refiere a la generalización conceptual que se abstrae de un grupo de experiencias con el propósito de categorizar y sistematizar nuevas experiencias).

“a través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo”, Hitt (2000).)

Recordemos cual es el objetivo principal que nos planteamos en la propuesta de tesis: encontrar el número y la ubicación de las perforaciones y de los postes necesarios para generar una herramienta porosa a partir de una herramienta de pétalo para el pulido de superficies ópticas. Para realizar tal trabajo se requiere en primer lugar encontrar una función que describa el perfil de la herramienta de pétalo para posteriormente determinar el diseño de la herramienta porosa que emule su desempeño. En la sección 4.1 se planteará la obtención del perfil de la herramienta de pétalo por medio de splines cúbicos y en la sección 4.2 se modelara por medio de programación lineal el problema de obtener el esquema de perforaciones y postes de la herramienta porosa.

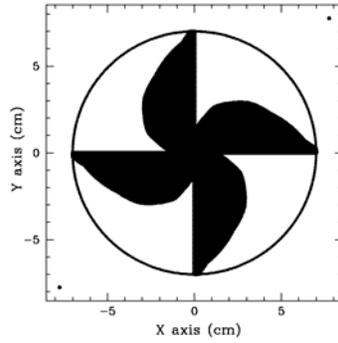


Figura 4.1. -Herramienta de pétalo para el pulido de superficies cóncavas.

4.1 Determinación de la función de contorno de la herramienta de pétalo

Se desea ajustar un conjunto de puntos en el plano que describen el contorno de uno de los 4 pétalos que forman la herramienta de pétalo. La forma de la herramienta de pétalo que se utiliza es la que genera un desgaste deseado. Se describirá en esta sección el ajuste que se hace para obtener la función de contorno de la herramienta de pétalo por medio de un spline cúbico paramétrico.

El spline debe pasar por los puntos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ que describen el contorno de la herramienta de pétalo (ver figura 4.2), pero al observar que pueden existir configuraciones de puntos en los cuales se presenten diferentes ordenadas para una misma abscisa, se decidió hacer el ajuste con splines cúbicos paramétricos.

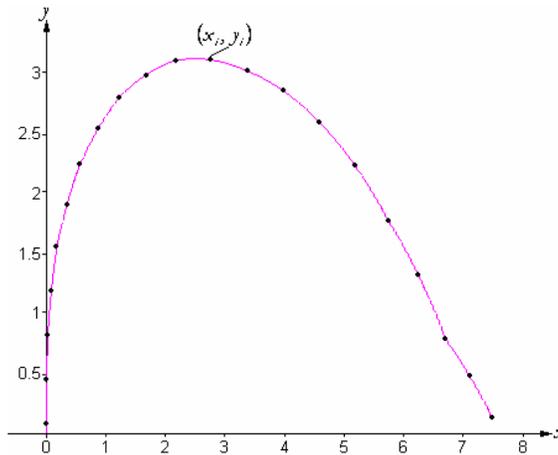


Figura 4.2. - Contorno de la herramienta de pétalo formado por m anillos segmentados.

Por ello debemos encontrar polinomios $P_1(t)$ y $P_2(t)$ que satisfagan las condiciones de la sección 2.2.4, donde

$$\begin{aligned} P_1(t_i) &= x_i \\ P_2(t_i) &= y_i \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Para calcular los valores del parámetro t se considero la condición de distancia i), de las condiciones (2-19), por ser la más conveniente. Una vez que se tienen los valores de t_i , se procede a resolver el

sistema lineal (2-20) y (2-21) para obtener el spline cúbico $P_1(t_i) = x_i$, y se resuelve el sistema lineal (2-20) y (2-22) para obtener el spline $P_2(t_i) = y_i$, $i = 1, \dots, m$; en ambos splines se utilizaron las condiciones de frontera iii) vistas en la sección 2.2.3. Así, P_1 y P_2 quedan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 P_1(t) &= A_i + B_i(t - t_i) + C_i \frac{(t - t_i)^2}{2} + D_i \frac{(t - t_i)^3}{6} \\
 P_2(t) &= a_i + b_i(t - t_i) + c_i \frac{(t - t_i)^2}{2} + d_i \frac{(t - t_i)^3}{6}
 \end{aligned}
 \tag{4-1}$$

donde $A_i, B_i, C_i, D_i, a_i, b_i, c_i$ y d_i son constantes, y quedan definidas como en la sección 2.2, en (2-23).

Los splines (4-1) existen y son únicos por el teorema 2.-35 de la sección 2.2.3.

Por medio de un programa realizado en matlab utilizando la función “spline” del toolbox, se pueden encontrar los valores de los coeficientes $A_i, B_i, C_i, D_i, a_i, b_i, c_i$ y d_i .

En la siguiente sección se describirá el uso que se le da a este spline.

4.2 Modelación del esquema de la herramienta porosa con programación lineal y la solución

Como se mencionó en la sección 1.5, la idea original era la de construir la herramienta porosa usando exclusivamente perforaciones, pero en el desarrollo de esta idea se encontraron dificultades que llevaron a un cambio en el diseño, concibiendo ahora la herramienta en dos partes, una con perforaciones y otra con postes. En este capítulo la presentación se hará en forma retrospectiva, desarrollando la idea del diseño de la herramienta construida a base de perforaciones únicamente, hasta llegar al problema que derivó en la introducción de los postes y aclarando en su momento los ajustes necesarios en los cálculos correspondientes, los cuales son mínimos.

Se desea conocer el número y la colocación de las perforaciones (o poros) que se necesitan para el diseño de la herramienta porosa, partiendo de la herramienta de pétalo. La solución al problema se realizará considerando uno solo de los pétalos, situándolo en el primer cuadrante del plano, debido a que los tres restantes son iguales y se sitúan en los demás cuadrantes.

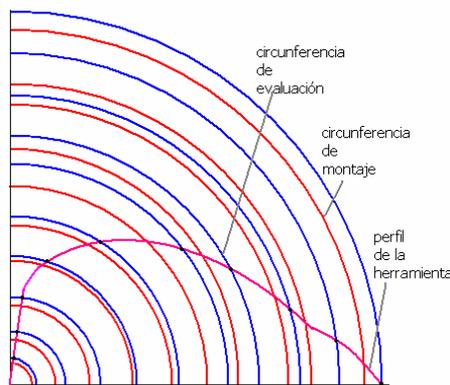


Figura 4.3. - Gráfica del perfil de la herramienta de pétalo, de las circunferencias de montaje y evaluación.

Para realizar el planteamiento del problema definimos dos conjuntos de circunferencias situadas sobre la herramienta: circunferencias de montaje y circunferencias de evaluación (ver figura 4.3), las primeras serán utilizadas para colocar en ellas los centros de las perforaciones circulares, y las últimas para evaluar que tanto se ve afectado su perímetro por las perforaciones.

En este contexto, denotemos:

- m = número de circunferencias de montaje,
- e = número de circunferencias de evaluación,
- r_b = radio de la herramienta de pétalo,
- r_v = radio del vidrio que se va a pulir,
- x_j = radio de la j - ésima circunferencia de evaluación y
- y_i = radio de la i - ésima circunferencia de montaje
- r_p = radio de la perforación, con $0 < r_{p1} < \dots < r_{p2} < r_{p1}$

En el modelo final se considerarán diversos radios para las perforaciones, recordemos que se utilizarán los radios estándar de brocas comerciales para el programa final, lo mismo que en los ejemplos, pero para simplificar la exposición consideraremos por ahora uno solo de ellos, denotado por r_p .

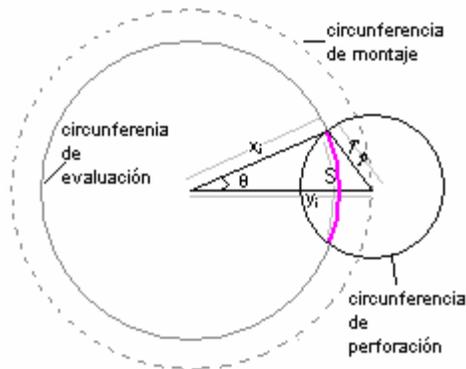


Figura 4.4. - Determinación de la afectación del perímetro de una circunferencia de evaluación por una perforación.

Determinemos, usando la ley de los cosenos, el valor del ángulo θ representado en la figura 4.4:

$$r_p^2 = y_i^2 + x_j^2 - 2y_i x_j \cos \theta$$

despejando θ nos queda:

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{y_i^2 + x_j^2 - r_p^2}{2y_i x_j} \right)$$

Hagamos

$$a_{i,j} = \left(\frac{y_i^2 + x_j^2 - r_p^2}{2y_i x_j} \right) \quad (4-2).$$

La afectación que sufre el perímetro de la circunferencia de evaluación de radio x_j por una perforación de radio r_p que la intercepta es igual a

$$S = 2x_j \cos^{-1}(a_{i,j}).$$

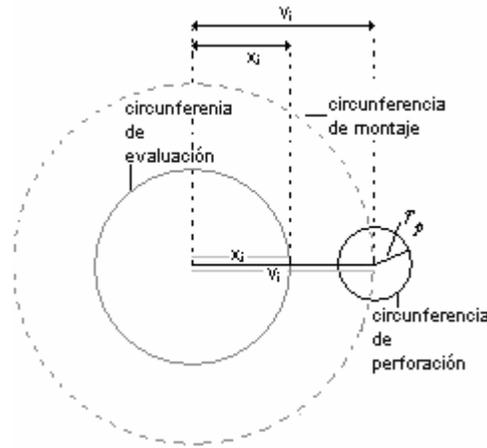


Figura 4.5. - Caso en el cual $y_i > x_j + r_p$

Observemos que la intersección se da si y sólo si $|a_{i,j}| \leq 1$. Veamos por ejemplo que si $a_{i,j} > 1$, entonces $y_i > x_j + r_p$, y la perforación no alcanza a afectar a la circunferencia de evaluación. En efecto, supongamos que $\frac{y_i^2 + x_j^2 - r_p^2}{2y_i x_j} > 1$, luego, (ver figura 4.5)

$$\begin{aligned} y_i^2 + x_j^2 - r_p^2 &> 2y_i x_j \\ y_i^2 - 2y_i x_j + x_j^2 &> r_p^2 \\ (y_i - x_j)^2 &> r_p^2 \\ y_i - x_j &> r_p \\ y_i &> x_j + r_p \end{aligned}$$

Cuando una herramienta de pétalo se pone a trabajar, sólo los pétalos entran en contacto con la pieza de vidrio, por ello, la idea es la siguiente:

El diseño de la herramienta porosa debe ser tal que si trazamos una circunferencia imaginaria sobre la herramienta de pétalo, del mismo radio que una circunferencia de evaluación dada y situada en la herramienta porosa, se observe lo siguiente:

La parte del contorno de la primera de estas circunferencias que queda situada sobre los pétalos, y la parte del contorno de la segunda que no queda superpuesta sobre ninguno de los poros, es decir, la parte que tendrá contacto con el vidrio, tienen medidas aproximadamente iguales.

Dado que la herramienta porosa que estamos diseñando se va a construir mediante perforaciones realizadas en un disco, las variables del problema son:

m_i : número de perforaciones (de radio r_p) realizadas, con centro en la i -ésima circunferencia de montaje, $i = 1, \dots, m$.

Bajo el supuesto de que las perforaciones no se superponen unas con otras, la afectación $p(j)$ que hacen en conjunto todas las perforaciones (de radio r_p) sobre el perímetro de la circunferencia de evaluación de radio x_j es igual a

$$p(j) = \sum_{i=1}^m 2m_i x_j \phi(a_{i,j}), \quad j = 1, \dots, e \quad (4-3)$$

donde

$$\phi(x) = \begin{cases} \cos^{-1}(x) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}. \quad (4-4)$$

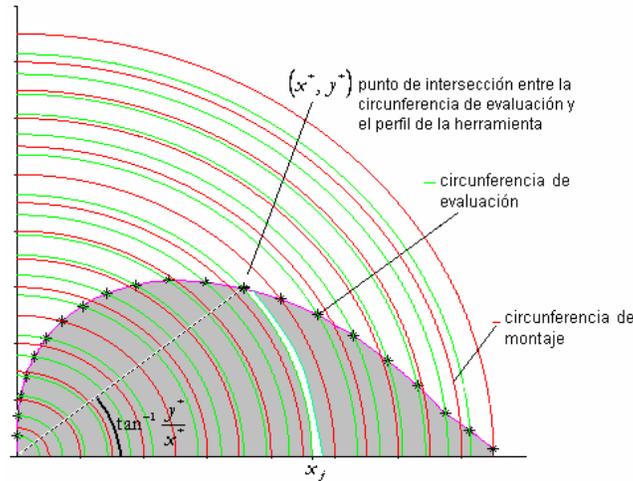


Figura 4.6. - Calculando la longitud de arco entre la circunferencia de montaje j y el perfil de la herramienta.

Ahora bien, si $x = P_1(t)$, $y = P_2(t)$, $a \leq t \leq b$, definen el spline $s(t)$ que ajusta los puntos situados sobre el pétalo (ver sección 4.1), y si (x^*, y^*) es el punto de intercepción de este spline con la circunferencia de evaluación de radio x_j , entonces (ver figura 4.6)

$$x_j \tan^{-1} \frac{y^*}{x^*}$$

es nuestra estimación de longitud del arco de la j -ésima circunferencia de evaluación que queda superpuesta sobre uno sólo de los pétalos de la herramienta (parte que tiene contacto con el vidrio) y por lo tanto, (ver figura 4.7):

$$f(j) = \frac{\pi}{2} x_j - x_j \tan^{-1} \frac{y^*}{x^*}, \quad (4-5)$$

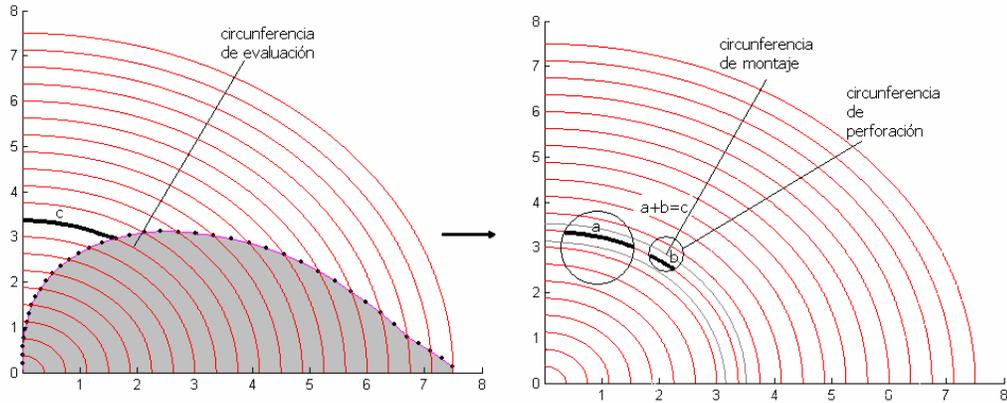


Figura 4.7. - Grafica de las circunferencias de montaje, evaluación y perforación.

es la fracción del contorno de la misma circunferencia que debe de quedar superpuesta con las perforaciones de la herramienta porosa (parte que no tiene contacto con el vidrio). Si consideramos (4-2), esto nos lleva a plantear el sistema $f(j) = p(j)$, $j = 1, \dots, e$, esto es:

$$f(j) = \sum_{i=1}^m 2m_i x_j \phi(a_{i,j}), \quad (4-6)$$

$$j = 1, \dots, e \quad i = 1, \dots, m.$$

En el caso general este sistema puede ser inconsistente, sin embargo siempre podemos buscar una solución aproximada.

Observemos que estamos planteando una discretización del siguiente problema de aproximación: Dada la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} x - x \tan^{-1} \frac{y^*}{x^*},$$

donde (x^*, y^*) es el punto de intersección del spline $s(t)$ con la circunferencia de radio x , se plantea encontrar la mejor aproximación a esta función sobre el espacio generado por las funciones

$$\psi_i = 2x \left(\frac{x^2 + y_i^2 - r_p^2}{2xy_i} \right), i = 1, 2, \dots, m,$$

en el sentido de alguna norma definida en el espacio de funciones adecuado. Estamos dejando de lado el hecho de que los coeficientes de la funciones ψ_i los requerimos enteros. Si toman valores no enteros, habría que contemplar fracciones de perforación, pero sin atender de momento esta objeción, fijemos nuestra atención en que en un planteamiento así, el elemento de la mejor aproximación representa un esquema de perforaciones donde todas las circunferencias situadas sobre la herramienta son circunferencias de evaluación, y no solamente algunas de ellas. Para este problema existe una solución, de acuerdo al corolario del teorema 2.-19.

Mencionamos lo anterior para establecer la relación de nuestro problema con la teoría de aproximación y la garantía que nos da la teoría presentada en el capítulo II de esta tesis sobre la existencia de una solución al problema planteado en el párrafo precedente. Sin embargo hay que reconocer que en ese mismo capítulo no se presenta método alguno para encontrar el mejor aproximante. Sin embargo, recurriremos para tal propósito a la formulación de nuestro problema como un programa lineal, utilizando los conceptos y los métodos de solución planteados en el capítulo tres.

Si deseamos que las diferencias $\varepsilon_j = f(j) - p(j)$, $j = 1, \dots, e$ sean positivas y tan pequeñas como sea posible. Podemos manejar los ε_j como variables e introducir otra variable δ que los acote superiormente, con lo cual podemos formular el siguiente programa lineal.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && z = \delta \\
 &\text{sujeto a} && f(j) - p(j) = \varepsilon_j \\
 &&& \delta \geq \varepsilon_j \\
 &&& \varepsilon_j, \delta \geq 0, \quad j = 1, \dots, e
 \end{aligned} \tag{4-7}$$

sustituyendo (4-3) en la ecuación (4-7) queda:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && z = \delta \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^m 2m_i x_j \cos^{-1} \left(\frac{y_i^2 + x_j^2 - r_p^2}{2y_i x_j} \right) + \varepsilon_j = f(j) \\
 &&& \varepsilon_j - \delta \geq 0 \\
 &&& \varepsilon_j, \delta, m_i \geq 0, \quad j = 1, \dots, e
 \end{aligned} \tag{4-8}$$

Y su forma estándar es:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && z = \delta \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^m 2m_i x_j \cos^{-1} \left(\frac{y_i^2 + x_j^2 - r_p^2}{2y_i x_j} \right) + \varepsilon_j = f(j) \\
 &&& \varepsilon_j - \delta - \eta_j = 0 \\
 &&& \varepsilon_j, \delta, \eta_j, m_i \geq 0, \\
 &&& j = 1, \dots, e
 \end{aligned} \tag{4-9}$$

Obsérvese que no estamos restringiendo las variables m_i a tomar valores enteros, esto lo hacemos para evitar la mayor complicación de los métodos de solución de la programación entera respecto a los de la no entera, y considerando también que de acuerdo al esquema que se presenta a continuación podemos obviar esa restricción. Resolveremos el problema en etapas, determinando primero el número y la ubicación de las perforaciones de mayor radio, redondeando después este número, y pasando la factura de lo que falta por aproximar a las perforaciones del radio consecutivamente menor, y así sucesivamente.

Algoritmo 4-1 Algoritmo para determinar el esquema de perforaciones.

Dados los números $r_{p_1} > r_{p_2} > \dots > r_{p_l} > 0$:

- 1) Se hace $k=1$, donde $k = 1, \dots, l$
- 2) Se hace $r_p = r_{p_k}$ y se soluciona (4-9),
- 3) Los valores obtenidos para los m_i , $i = 1, 2, \dots, m$ se redondean hacia abajo hasta el entero más próximo $\lfloor m_i \rfloor$, $i = 1, 2, \dots, m$,
- 4) Se evalúa $p(j)$, $j = 1, 2, \dots, e$, sustituyendo m_i por $\lfloor m_i \rfloor$ en (4-3) y se actualiza $f(j) = f(j) - p(j)$, $j = 1, \dots, e$,
- 5) Si $k < l$ se hace $k = k + 1$ se va al paso 2). Si $k = l$ se termina, el error final de aproximación en la j -ésima circunferencia de evaluación está dado por $f(j)$.

Se implantó en matlab este algoritmo, en cada iteración resuelve un programa de la forma (4-9) con la ayuda de la función linprog, el código del programa se puede consular en el apéndice.

Una vez que se obtienen los m_i es necesario distribuir las perforaciones en cada circunferencia de montaje para obtener la herramienta porosa que se desea, tal y como se muestra en la figura 4.8.

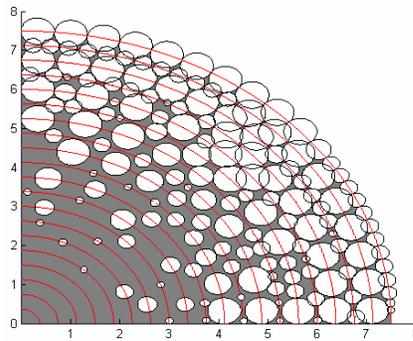


Figura 4.8. - Herramienta porosa incorrecta.

Al momento de realizar la distribución de las circunferencias de perforación se observaron superposiciones entre ellas, en la parte mas externa de la herramienta, debido a que en esta zona de la herramienta de pétalo prácticamente no hay material (ver figura 4.1), esta situación afecta los resultados obtenidos, pues una herramienta así no estaría generando el desgaste deseado. Como se observa en la figura 4.8 las superposiciones se dan en la parte más externas de la herramienta porosa, como resultado de un mayor número de circunferencias de perforación en esa región, por lo cual se optó por dividir la herramienta porosa en dos secciones bajo las siguientes especificaciones:

- 1) La sección interna se realizará practicando perforaciones en un disco plano.

- 2) La sección externa estará formada por postes cilíndricos, situados sobre una superficie plana de contorno anular. Los radios de las bases circulares de los postes serán iguales a los radios de las perforaciones de la sección interna de la herramienta.
- 3) La superficie de la sección interna estará nivelada con la parte más alta de los postes de la sección externa.

Los círculos que coronan los postes representan la parte de la sección externa de la herramienta que tendrá contacto con la superficie a pulir. Como el área de esta parte es menor que la que no debe entrar en contacto (formada antes por perforaciones), el número de postes que se requiere es menor que el número de perforaciones que se requería en el esquema anterior (cuando se contemplaba el uso de perforaciones únicamente), así que esto debe aliviar el problema que se mencionó anteriormente, de la superposición al momento de la distribución (ver figura 4.8).

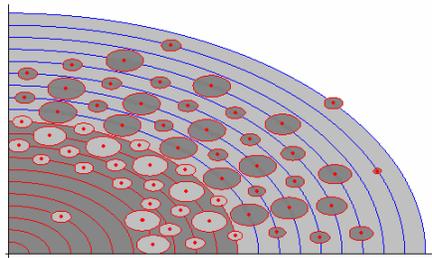


Figura 4.9. - Herramienta porosa, con postes y perforaciones.

Para la obtención de los números de postes que deben de colocarse en cada circunferencia de montaje se utiliza el mismo programa lineal dado en (4-9) salvo por una modificación en la ecuación (4-5), quedando ahora como:

$$f(j) = x_j \tan^{-1} \frac{y^*}{x^*} \quad (4-10)$$

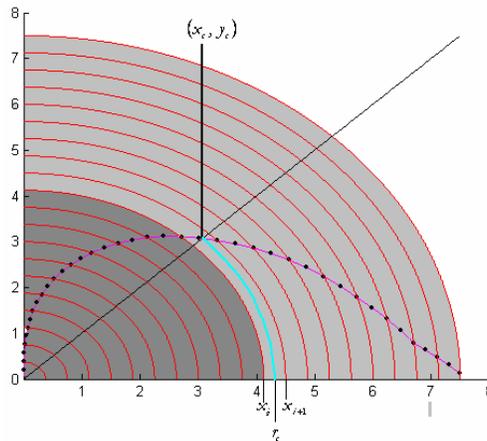


Figura 4.10. -División de la herramienta porosa.

El criterio para dividir la herramienta de pétalo en sus dos secciones, interna y externa, será el siguiente: se determina el punto de intercepción (s, s) de la gráfica de la función identidad con la gráfica del spline que describe el perfil de la herramienta de pétalo (ver figura 4.9). Si $r \leq s$ es el radio de

circunferencia de montaje, entonces se realizan perforaciones sobre esa circunferencia y si $r > s$, se montan postes (ver figura 4.10).

Explicaremos brevemente algunas ideas geométricas que guiaron la distribución de los poros (perforaciones o postes) en la herramienta, una vez que el número de estos ha sido calculado por el programa para cada una de las circunferencias de montaje. Recordemos que estamos ilustrando el proceso del diseño de la herramienta en el primer cuadrante únicamente; desde luego que puede hacerse para circunferencias completas, pero por ahora, al decir “circunferencia de montaje” nos referimos únicamente a una cuarta parte de esta.

Se siguió un método heurístico que se describirá a continuación para realizar la distribución de las perforaciones o postes, utilizando algunas ideas geométricas. Cabe mencionar que el problema de la distribución es complicado y en esta tesis no se ha resuelto de una manera completa, es decir, no se ha llegado a un método general del cual podamos asegurar que realice la distribución de los postes y perforaciones de cualquier esquema obtenido. Así, el método de distribución que se sigue aquí, no pretende ser el óptimo.

Sean como antes $r_{p_1} > r_{p_2} > \dots > r_{p_l} > 0$ los radios de las perforaciones que se practicarán para hacer la herramienta porosa. Al aplicar el **algoritmo 4.-1** se obtiene una matriz M de la forma:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1\eta} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2\eta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{l1} & m_{l2} & \cdots & m_{l\eta} \end{bmatrix}$$

donde $m_{i,j}$ es el número de perforaciones de radio r_{p_i} colocadas sobre la circunferencia de montaje j , $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, \eta$, esto tomando en cuenta que se han reenumerado las circunferencias de montaje desde la 1 que es la de menor radio hasta la η que es la mayor, considerando sólo aquellas para las cuales se determinó un número positivo de perforaciones; es decir, en la matriz M no hay ninguna columna compuesta exclusivamente de ceros.

De acuerdo a lo anterior se define:

$$Y = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_\eta] \text{ y } r_p = [r_{p_1} \quad r_{p_2} \quad \cdots \quad r_{p_l}]$$

donde y_i es el radio de la circunferencia de montaje i , (circunferencia que si tiene al menos una perforación) y $y_1 < y_2 < \dots < y_\eta$.

También asignamos un símbolo al número total de perforaciones en la circunferencia de montaje k :

$$n_k = m_{1,k} + \cdots + m_{l,k}, \quad k = 1, \dots, \eta$$

El acomodo de las perforaciones se hará de la siguiente manera: las n_η perforaciones de la circunferencia de montaje η (la más grande) se colocarán iniciando en la proximidad del eje x con las de mayor radio y desplazándose contra reloj hacia el eje y , al tiempo que disminuyen los radios de las

restantes. Las $n_{\eta-1}$ perforaciones de la siguiente circunferencia de montaje se colocarán a la inversa, iniciando con las más pequeñas a partir del eje x , para acercarse al eje y mientras se colocan las de radio progresivamente mayor, para la siguiente circunferencia de montaje invertimos de nuevo el orden de los tamaños al hacer la colocación y así sucesivamente. Todo esto para ayudar a que las perforaciones situadas en una circunferencia de montaje “esquiven” a las de la siguiente.

En concordia con esto, definimos una matriz P , cuya entrada $p_{j,i}, i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, \eta$ es el radio de la i -ésima perforación que se colocará en la circunferencia de montaje j , contra reloj y partiendo del eje x .

Así, en la circunferencia de montaje de radio y_η se distribuyen de manera uniforme los centros de las n_η perforaciones determinadas por el algoritmo para esa circunferencia, iniciando con las de radio mayor desde el eje x y desplazándose en sentido positivo (contra reloj), colocando cada vez una perforación de radio menor o igual que la anterior. Para realizar esto se calculan los ángulos $\Theta_i, i = 1, \dots, n_\eta$, (ver figura 4.11).

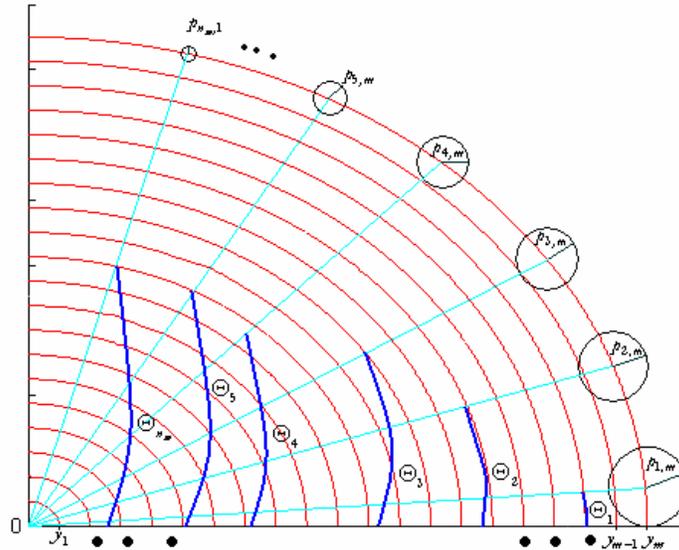


Figura 4.11. - Circunferencias de perforación (o poste) distribuidas uniformemente.

Para colocar las perforaciones de la siguiente circunferencia de montaje, de radio $y_{\eta-1}$ debemos determinar con precisión las posiciones factibles para sus centros (ver figura 4.11).

En consecuencia, se determinan, usando la ley de los cósenos, los valores de los ángulos $\theta_{k,D}$ y $\theta_{k,I}$ con $k = 1, \dots, n_{\eta-1}$ representados en la figura 4.12:

$$\begin{aligned} (p_{k,\eta} + p_{k,\eta-1})^2 &= y_{\eta-1}^2 + y_\eta^2 - 2y_{\eta-1}y_\eta \cos \theta_{k,D} \\ (p_{k+1,\eta} + p_{k,\eta-1})^2 &= y_{\eta-1}^2 + y_\eta^2 - 2y_{\eta-1}y_\eta \cos \theta_{k,I} \end{aligned}$$

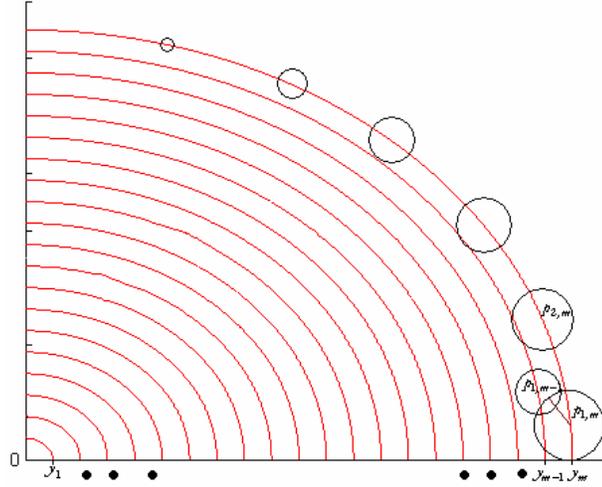


Figura 4.12. - Circunferencias de perforación (o postes) que se interceptan.

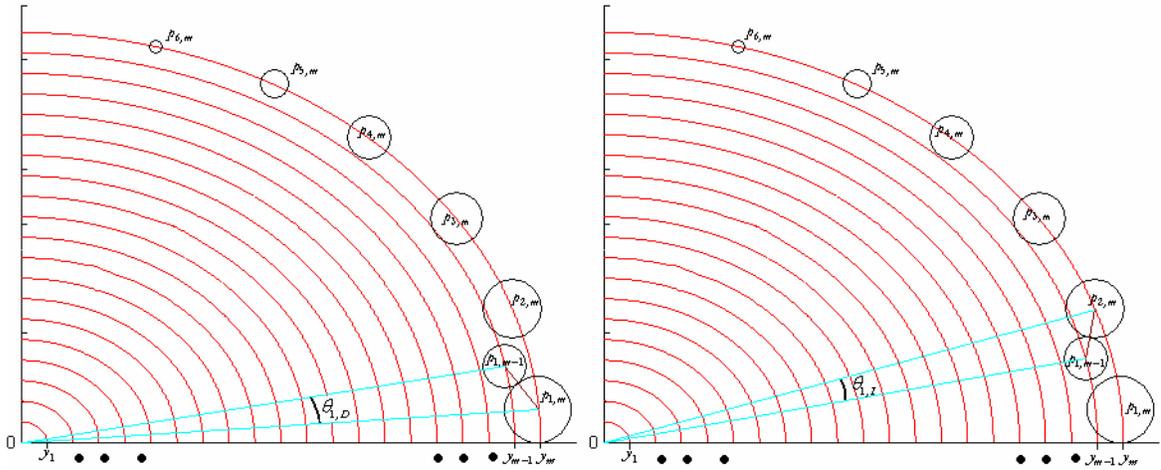


Figura 4.13. - Determinación de la región donde dos circunferencias de perforación no se interceptan.

despejando $\theta_{k,D}$ y $\theta_{k,I}$ nos queda:

$$\begin{aligned} \theta_{k,D} &= \cos^{-1} \left(\frac{y_{\eta-1}^2 + y_{\eta}^2 + (p_{k,\eta} + p_{k,\eta-1})^2}{2y_{\eta-1}y_{\eta}} \right) \\ \theta_{k,I} &= \cos^{-1} \left(\frac{y_{\eta-1}^2 + y_{\eta}^2 + (p_{k+1,\eta} + p_{k,\eta-1})^2}{2y_{\eta-1}y_{\eta}} \right) \quad \text{con } k = 1, \dots, n_{\eta-1} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Utilizando los valores de (4.11) se calculan los valores de los ángulos $\alpha_{D,k}$ y $\alpha_{I,k}$, representados en la figura 4.13:

$$\begin{aligned} \alpha_{D,k} &= \Theta_1 + \theta_{1,D} \\ \alpha_{I,k} &= \Theta_2 - \theta_{1,I} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Finalmente, se obtienen los ángulos $\Theta_k = \frac{\alpha_{I,k} + \alpha_{D,k}}{2}$ para $k = 1, \dots, n_{\eta-1}$, los cuales nos garantizan que las circunferencias de perforación colocadas anteriormente no se interceptan con las nuevas (ver figura 4.14).

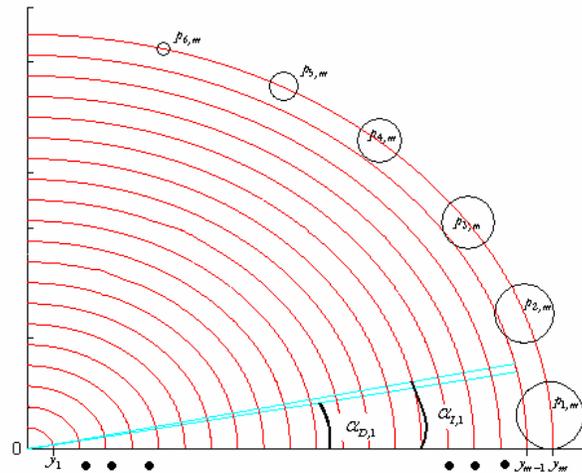


Figura 4.14. - Ubicación de los ángulos $\alpha_{I,k}$ y $\alpha_{D,k}$.

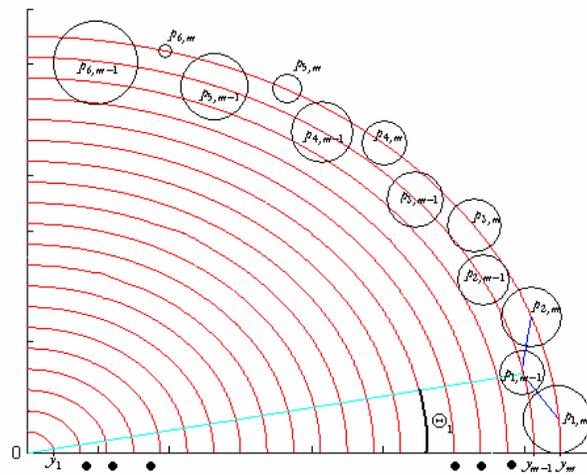


Figura 4.15. - Distribución de las circunferencias de perforación sobre la circunferencia de montaje y_{m-1} .

Siguiendo esta idea, se continúa con la distribución de las demás circunferencias de perforación (o postes), quedando finalmente la herramienta como se observa en la figura 4.15.

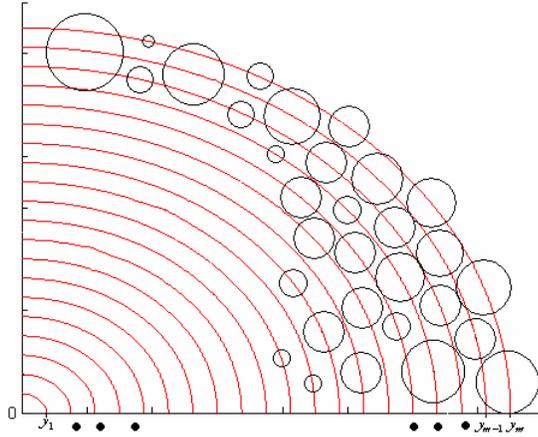


Figura 4.16. - Distribución final de las circunferencias de perforación (o postes).

Para comprender mejor la manera en que se realiza la distribución de las circunferencias de perforación (o postes) veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.-1 Supóngase que se tienen los siguientes datos:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = [2.09 \quad 2.79 \quad 3.49 \quad 4.19], N = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 5],$$

$$r_p = [0.33 \quad 0.31 \quad 0.29 \quad 0.27 \quad 0.21 \quad 0.15 \quad 0.13 \quad 0.11] \text{ y}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.29 & 0.11 & 0.33 \\ 0 & 0.21 & 0.21 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0.31 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0.33 & 0.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, al distribuir sobre la circunferencia de montaje de radio 4.19 de manera uniforme las 5 circunferencias de perforación, obtenemos $\Theta = [2.15^\circ \quad 18.67^\circ \quad 37.66^\circ \quad 56.64^\circ \quad 75.63^\circ]$.

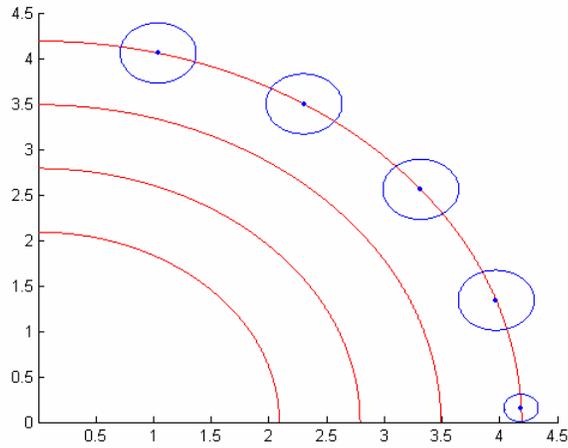


Figura 4.17. - Distribución uniforme de las 5 circunferencias de perforación.

Empleando (4.11) y (4.12), obtenemos los ángulos sobre los cuales colocaremos las circunferencias de perforación sobre la circunferencia de montaje 3.49, 2.79 y 2.09, ver tabla 4.1 de ángulos.

Tabla 4.1 Tabla de los ángulos donde se colocaron las perforaciones.

Ángulos Circunferencia de montaje	Θ
3.49cm	10.41° 28.17° 47.15° 66.14°
2.79cm	19.29° 37.66°
2.09cm	28.47°

Quedando la distribución finalmente como en la figura 4.18.

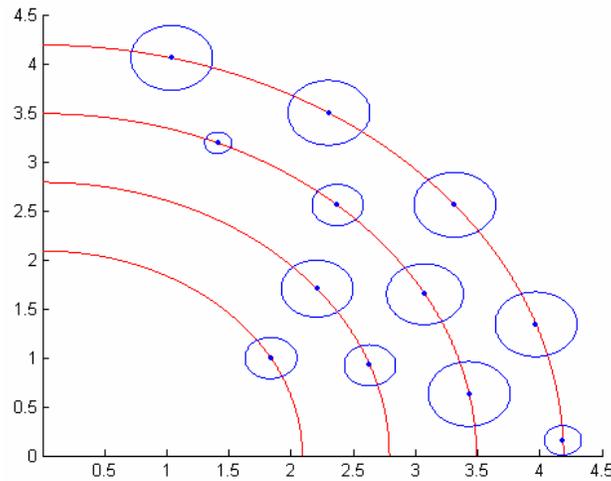


Figura 4.18. - Distribución final de las circunferencias de perforación.

CAPÍTULO 5

EJEMPLOS Y RESULTADOS

“Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad”, Albert Einstein.
“En lo tocante a ciencia, la autoridad de un millar no es superior al humilde razonamiento de un hombre. Hablar oscuramente lo sabe hacer cualquiera, con claridad lo hacen muy pocos”, Galileo Galilei)

En este capítulo se muestran ejemplos en los cuales se obtienen herramientas porosas que aproximan el desgaste que se obtiene con una herramienta de pétalo dada. El primer grupo de ejemplo se hace para una herramienta que genera un desgaste cóncavo, el segundo para una que genera un desgaste convexo.

Para cada uno de estos ejemplos de las secciones 5.1 y 5.2 se construyeron diferentes herramientas correspondientes a diferentes valores asignados al número de circunferencias de montaje y de evaluación y utilizando los valores de los radios de perforación de 16 brocas comerciales estándar. En cada uno de los ejemplos se muestra que tanto se esta aproximando la herramienta porosa a la de pétalo obteniendo el rms de la afectación de los perímetros. El rms^[21] es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las diferencias entre el valor deseado y el valor aproximado, es decir:

$$\text{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{re} (f_i - f_i^*)^2}{re}}$$

donde

f_i = parte del perímetro de la circunferencia de evaluación i que queda superpuesta con la herramienta de pétalo, o fuera de ella, según sea el caso, ver figura 5.1.

f_i^* = parte del perímetro de la circunferencia de evaluación i que queda superpuesta sobre las perforaciones – o postes- de la nueva herramienta, ver figura 5.1.

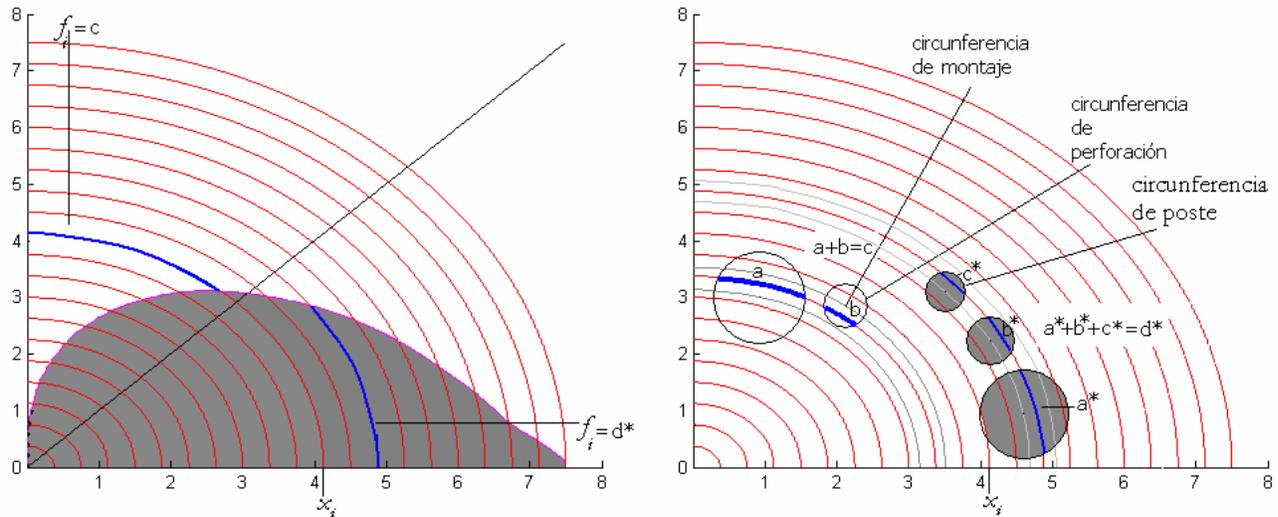


Figura 5.1. - Perímetro de la herramienta de pétalo sobre la circunferencia i .

En las tablas de cada ejemplo se muestran: parte del perímetro de la circunferencia de evaluación que queda fuera del pétalo –o parte del perímetro que queda dentro del pétalo– y parte del perímetro sobre la circunferencia de evaluación eliminado por las perforaciones –o parte del perímetro comprendido dentro de los postes- y la diferencia entre estos dos valores. Además de que en cada tabla se resalta la mayor diferencia, y también se presenta el promedio de las diferencias.

Hay que resalta que de acuerdo a lo que se nos ha informado respecto al funcionamiento de la máquina de control numérico del taller de metales de esta universidad, el diámetro más pequeño que puede ser manipulado con efectividad es de 1/64 de pulgada, el cual corresponde a la broca número 14 de las 16 utilizadas en los ejemplos, de modo que las brocas número 15 y 16 son aún más pequeñas. Sin embargo, nuestro modelo tiene aún aplicación en la práctica para construir herramientas que hagan una primera aproximación al desgaste deseado, pero también puede servir como base para posteriores modelos que puedan salvar estas dificultades.

En la sección 5.3 se han considerado herramientas diseñadas con 101 circunferencias de evaluación y 101 circunferencias de montaje de tres clases diferentes: a) herramientas construidas con las primeras 14 brocas de las empleadas en los ejemplos de las secciones 5.1 y 5.2, b) herramientas generadas en las secciones 5.1 y 5.2, construidas con brocas de 16 radios diferentes, c) herramientas generadas con 18 brocas de radios diferentes, las dos menores de brocas no existentes en el mercado.

Esto se ha hecho así para analizar los alcances del modelo teórico. Se grafican en estos ejemplos las herramientas obtenidas, así como el desgaste generado por ellas, para efectos de comparación. Al principio de la sección 5.3 se describe la forma en que se obtuvieron estas evaluaciones.

5.1 Caso cóncavo

En la figura 5.2 se muestra la herramienta de pétalo que genera una superficie cóncava, de ésta se obtendrá la función que describe su perfil. Debido a que los cuatro pétalos son idénticos se trabajará con uno solo de ellos (ver figura 5.3). En la figura 5.4 se observa el desgaste a generar por una herramienta de pétalo, dicho desgaste se quiere generar con una herramienta porosa.

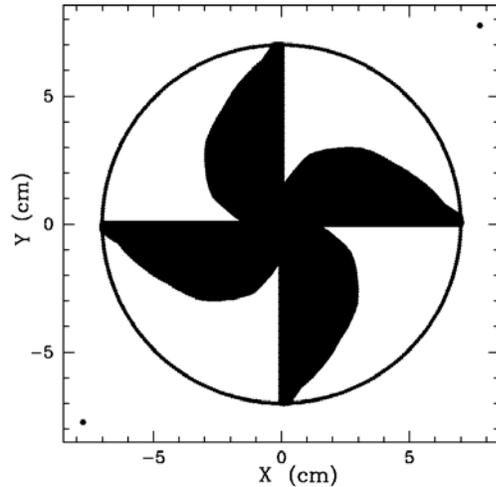


Figura 5.2. - Herramienta de pétalo para el pulido de superficies cóncavas.

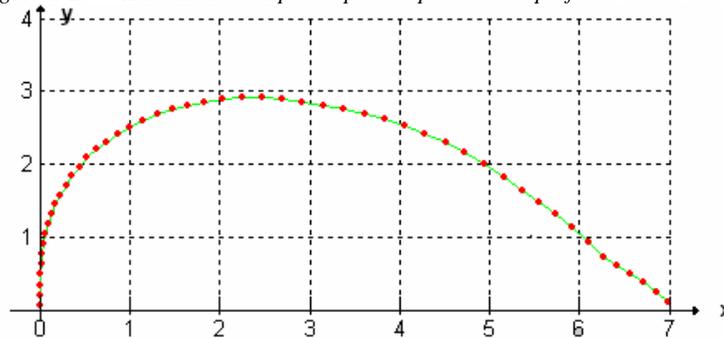


Figura 5.3. - Segmento del perfil de la herramienta de pétalo para el pulido de superficies cóncavas con 101 puntos.

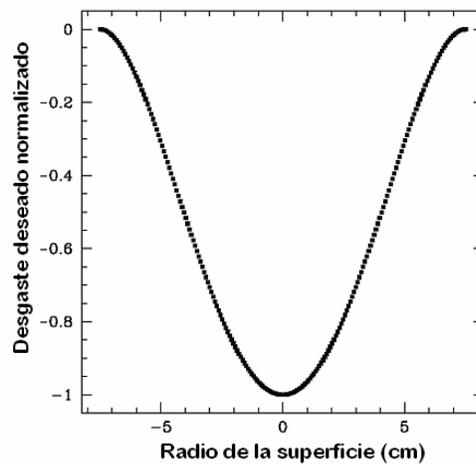


Figura 5.4. - Desgaste a generar con las herramientas de pétalo, para el pulido de superficies cóncavas.

Para encontrar las constantes de la ecuación (4-1) se utiliza el programa perfil implementado en matlab, ver apéndice. Obteniendo como resultado 100 polinomios para la función $f_1(t)$ y 100 polinomios para la $f_2(t)$, (ver figura 5.5).

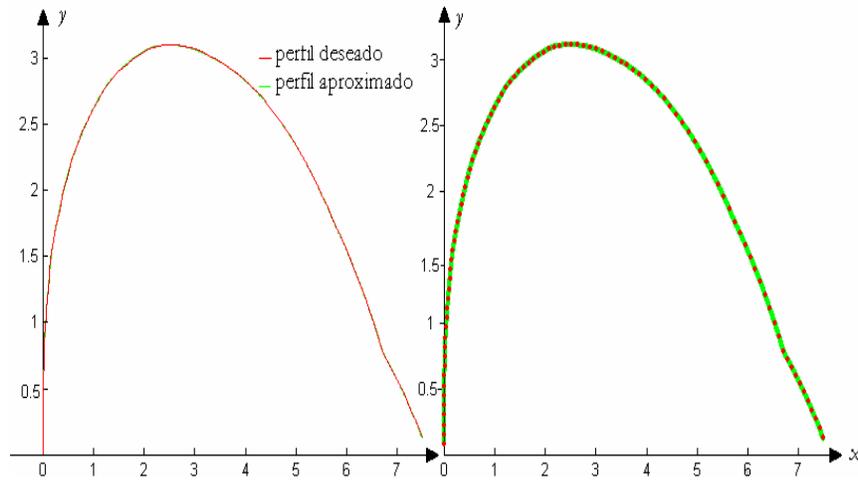


Figura 5.5. - Ajuste del perfil de la herramienta de pétalo utilizada para el pulido de superficies cóncavas.

Ejemplo 5.-1 Se desea encontrar una herramienta porosa, con radio de la herramienta de 7cm y un radio del vidrio a pulir de 7.5cm, considerando 40 circunferencia de evaluación y 38 de montaje; al correr el programa se obtuvieron los siguientes resultados:

La herramienta debe separarse en la circunferencia de montaje 22, en donde se deben realizar perforaciones, a partir de la circunferencia de montaje 23 será necesario colocar postes. La herramienta porosa obtenida se muestra en la figura 5.6.

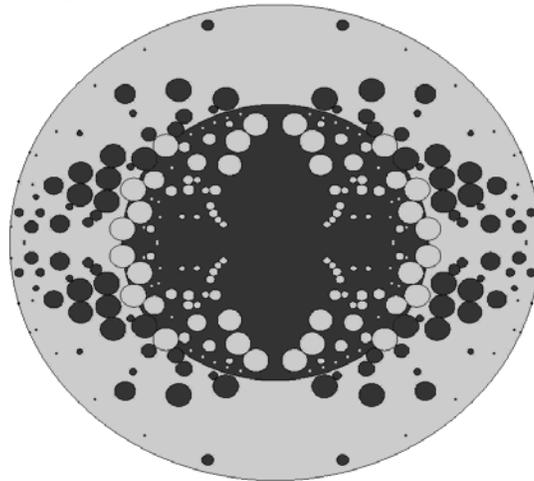


Figura 5.6. - Herramienta porosa formada con 38 circunferencias de montaje y 40 circunferencias de evaluación.

Si se compara la afectación que tiene esta herramienta en los perímetros de las circunferencias de evaluación, con la afectación que tiene sobre los mismos la herramienta de pétalo (modelada por el spline hallado), se encuentra que la mayor diferencia entre estos valores es de 0.1365cm para la parte interna y de 0.1451cm para la parte externa. Mientras que el rms es de 0.0655cm para la parte interna y de 0.0701cm para la parte externa, ver tabla 5.1.

Tabla 5.1 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar perforaciones o postes, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda fuera del pétalo	f^* =Parte del perímetro eliminado con las perforaciones	Diferencia= $ f - f^* $
1.- 0.1750	0.0009	0	0.0009
2.- 0.3500	0.0047	0	0.0047
3.- 0.5249	0.0114	0	0.0114
4.- 0.6999	0.0210	0	0.0210
5.- 0.8749	0.0407	0	0.0407
6.- 1.0499	0.0707	0	0.0707
7.- 1.2248	0.1081	0	0.1081
8.- 1.3998	0.1525	0.1296	0.0229
9.- 1.5748	0.2182	0.1063	0.1119
10.- 1.7498	0.3008	0.2230	0.0778
11.- 1.9247	0.3952	0.2967	0.0985
12.- 2.0997	0.5009	0.4126	0.0882
13.- 2.2747	0.6327	0.5610	0.0717
14.- 2.4497	0.7836	0.7326	0.0509
15.- 2.6246	0.9491	0.9172	0.0319
16.- 2.7996	1.1287	1.0894	0.0393
17.- 2.9746	1.3429	1.3073	0.0356
18.- 3.1496	1.5796	1.5266	0.0530
19.- 3.3245	1.8339	1.8266	0.0073
20.- 3.4995	2.1050	2.1019	0.0031
21.- 3.6745	2.4196	2.4070	0.0126
22.- 3.8495	2.7598	2.6848	0.0750
23.- 4.0244	3.1205	2.9840	0.1365
	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro comprendido dentro de los postes	Diferencia= $ f - f^* $
24.- 4.1994	3.0943	3.0461	0.0481
25.- 4.3744	2.9835	2.9211	0.0624
26.- 4.5494	2.8559	2.7541	0.1019
27.- 4.7244	2.7094	2.6529	0.0565
28.- 4.8993	2.5439	2.5256	0.0183
29.- 5.0743	2.3594	2.2628	0.0966
30.- 5.2493	2.1559	2.0744	0.0814
31.- 5.4243	1.9333	1.7882	0.1451
32.- 5.5992	1.6904	1.6628	0.0276
33.- 5.7742	1.4755	1.4024	0.0731
34.- 5.9492	1.2471	1.1852	0.0619
35.- 6.1242	1.0022	0.9564	0.0458
36.- 6.2991	0.7385	0.6975	0.0411
37.- 6.4741	0.5942	0.5547	0.0395
38.- 6.6491	0.4439	0.3664	0.0775
39.- 6.8241	0.2847	0.2726	0.0120
40.- 6.9990	0.1167	0.1162	0.0005
RMS de perforaciones =			0.0641 cm
RMS de postes =			0.0680 cm
PROMEDIO DE DIFERENCIAS =			0.0541cm

Ejemplo 5.-2 Se tienen las mismas condiciones del ejemplo anterior solo que ahora consideramos 100 circunferencias de evaluación y 38 de montaje; al realizar los cálculos se obtuvieron los siguientes resultados:

La herramienta se divide en dos a partir de la circunferencia de montaje 22, hasta ésta circunferencia se elaboraran perforaciones, de la circunferencia 23 en adelante se pondrán postes.

Obteniendo en comparación con la herramienta de pétalo en las circunferencias de evaluación que la mayor diferencia entre estos valores es de 0.4213cm para la parte interna y de 0.2883cm para la parte externa, y observamos que se tiene un rms de 0.2073cm para la parte interna y para la parte externa el rms es de 0.1435cm, ver tabla 5.2. La figura 5.7 muestra la forma que tendría la herramienta porosa, con los datos anteriores.

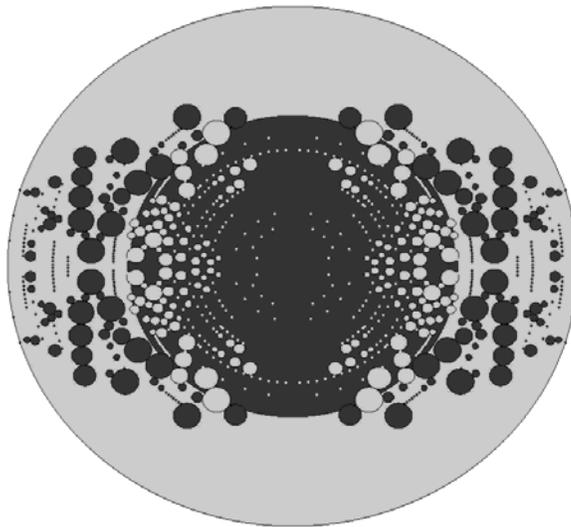


Figura 5.7. - Herramienta porosa formada con 38 circunferencias de montaje y 100 circunferencias de evaluación.

Tabla 5.2 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro eliminado por las perforaciones	Diferencia= $ f - f^* $
1.- 0.0700	0.0000	0	0.0000
2.- 0.1400	0.0005	0	0.0005
3.- 0.2100	0.0014	0	0.0014
4.- 0.2800	0.0028	0	0.0028
5.- 0.3500	0.0047	0	0.0047
6.- 0.4199	0.0070	0	0.0070
7.- 0.4899	0.0098	0	0.0098
8.- 0.5599	0.0131	0	0.0131
9.- 0.6299	0.0169	0	0.0169
10.- 0.6999	0.0210	0	0.0210
11.- 0.7699	0.0260	0	0.0260
12.- 0.8399	0.0356	0	0.0356
13.- 0.9099	0.0461	0.0295	0.0166
14.- 0.9799	0.0578	0	0.0578
15.- 1.0499	0.0707	0	0.0707
16.- 1.1198	0.0848	0.0662	0.0186
17.- 1.1898	0.1000	0	0.1000
18.- 1.2598	0.1164	0	0.1164
19.- 1.3298	0.1340	0	0.1340
20.- 1.3998	0.1525	0	0.1525
21.- 1.4698	0.1736	0.1528	0.0208
22.- 1.5398	0.2031	0	0.2031
23.- 1.6098	0.2337	0	0.2337
24.- 1.6798	0.2663	0	0.2663
25.- 1.7498	0.3008	0	0.3008
26.- 1.8198	0.3372	0.1516	0.1856
27.- 1.8897	0.3754	0.1282	0.2471
28.- 1.9597	0.4154	0.1452	0.2702
29.- 2.0297	0.4575	0.4295	0.0280
30.- 2.0997	0.5009	0.1353	0.3656
31.- 2.1697	0.5485	0.3147	0.2337
32.- 2.2397	0.6044	0.3391	0.2652
33.- 2.3097	0.6616	0.2657	0.3959
34.- 2.3797	0.7215	0.6773	0.0441
35.- 2.4497	0.7836	0.4809	0.3027
36.- 2.5197	0.8480	0.5583	0.2897
37.- 2.5896	0.9148	0.8968	0.0180
38.- 2.6596	0.9839	0.7056	0.2783
39.- 2.7296	1.0556	0.6815	0.3741
40.- 2.7996	1.1287	0.8798	0.2488
41.- 2.8696	1.2083	0.9913	0.2171
42.- 2.9396	1.2979	1.2800	0.0179
43.- 3.0096	1.3888	1.2312	0.1576
44.- 3.0796	1.4828	1.2119	0.2709
45.- 3.1496	1.5796	1.4119	0.1677
46.- 3.2196	1.6792	1.3988	0.2805
47.- 3.2896	1.7817	1.5606	0.2211
48.- 3.3595	1.8868	1.5580	0.3289
49.- 3.4295	1.9951	1.6931	0.3021
50.- 3.4995	2.1050	2.0755	0.0295
51.- 3.5695	2.2243	1.9317	0.2925
52.- 3.6395	2.3543	2.1412	0.2131
53.- 3.7095	2.4860	2.2976	0.1883
54.- 3.7795	2.6213	2.4474	0.1739
55.- 3.8495	2.7598	2.6383	0.1215
56.- 3.9195	2.9016	2.5282	0.3735
57.- 3.9895	3.0467	2.6254	0.4213

Tabla 5.3 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro comprendido dentro de los postes	Diferencia= $ f - f^* $
58.- 4.0594	3.1815	3.1762	0.0052
59.- 4.1294	3.1400	3.1020	0.0380
60.- 4.1994	3.0943	2.9112	0.1830
61.- 4.2694	3.0505	2.8822	0.1682
62.- 4.3394	3.0068	2.8939	0.1129
63.- 4.4094	2.9595	2.9492	0.0103
64.- 4.4794	2.9093	2.8176	0.0917
65.- 4.5494	2.8559	2.7147	0.1412
66.- 4.6194	2.7996	2.7718	0.0278
67.- 4.6894	2.7402	2.7113	0.0289
68.- 4.7593	2.6778	2.5226	0.1552
69.- 4.8293	2.6124	2.3503	0.2620
70.- 4.8993	2.5439	2.5019	0.0420
71.- 4.9693	2.4724	2.4389	0.0334
72.- 5.0393	2.3978	2.3660	0.0317
73.- 5.1093	2.3202	2.1593	0.1609
74.- 5.1793	2.2395	1.9512	0.2883
75.- 5.2493	2.1559	2.0189	0.1370
76.- 5.3193	2.0691	1.8474	0.2217
77.- 5.3893	1.9794	1.8285	0.1509
78.- 5.4593	1.8865	1.7495	0.1370
79.- 5.5292	1.7912	1.7886	0.0026
80.- 5.5992	1.6904	1.5555	0.1348
81.- 5.6692	1.6044	1.3564	0.2480
82.- 5.7392	1.5195	1.3918	0.1277
83.- 5.8092	1.4311	1.2932	0.1379
84.- 5.8792	1.3404	1.3123	0.0282
85.- 5.9492	1.2471	1.0920	0.1551
86.- 6.0192	1.1512	0.9535	0.1977
87.- 6.0892	1.0528	1.0446	0.0083
88.- 6.1592	0.9514	0.7984	0.1530
89.- 6.2291	0.8493	0.7391	0.1102
90.- 6.2991	0.7385	0.6356	0.1029
91.- 6.3691	0.6800	0.5897	0.0903
92.- 6.4391	0.6236	0.6192	0.0044
93.- 6.5091	0.5650	0.4039	0.1611
94.- 6.5791	0.5052	0.2973	0.2078
95.- 6.6491	0.4439	0.3188	0.1252
96.- 6.7191	0.3813	0.1605	0.2207
97.- 6.7891	0.3172	0.1499	0.1674
98.- 6.8591	0.2518	0.1323	0.1195
99.- 6.9291	0.1849	0	0.1849
100.- 6.9990	0.1167	0.1132	0.0035
RMS de perforaciones =			0.2055
RMS de postes =			0.1418
PROMEDIO DE DIFERENCIAS =			0.1427

Ejemplo 5.-3 Considérese la misma herramienta anterior con radio de la herramienta de 7cm y radio del vidrio a pulir de 7.5cm, por lo que se sigue utilizando la misma función de perfil del ejemplo anterior. Ahora se tendrán 101 circunferencias de evaluación y 101 circunferencias de montaje, al realizar los cálculos se obtuvieron los siguientes resultados:

Al igual que la herramienta anterior la partición de esta herramienta se hace en la circunferencia de montaje 58, realizando hasta esta circunferencia perforaciones, obteniendo en comparación con la herramienta de pétalo en las afectaciones a las circunferencias de evaluación que la mayor diferencia entre estos valores correspondientes es de 0.0333cm y el rms es 0.0166cm. De la circunferencia 59 en adelante se colocaran postes, teniendo en comparación con la herramienta de pétalo en las afectaciones sobre las circunferencias de evaluación que la mayor diferencia entre estos valores es de 0.0335cm y el rms de 0.0201cm, ver tablas 5.4 y 5.5. La figura 5.8 muestra la forma de la herramienta porosa, con los datos obtenidos.

Como podemos observar este último ejemplo en comparación con los dos anteriores el rms es menor, lo que nos indica que tenemos una herramienta más aproximada a la de pétalo que las anteriores, debido a esto se tiene un mayor número de circunferencias de montaje.

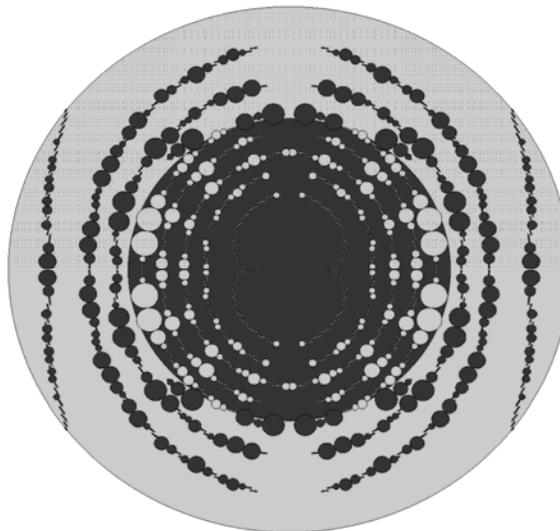


Figura 5.8. - Herramienta porosa formada con 101 circunferencias de montaje y 101 circunferencias de evaluación.

Tabla 5.4 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, medida sobre las circunferencias de evaluación

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro eliminado por las perforaciones	Diferencia= $ f - f^* $
1.- 0.0693	0	0	0
2.- 0.1386	0.0005	0	0.0005
3.- 0.2079	0.0014	0	0.0014
4.- 0.2772	0.0027	0	0.0027
5.- 0.3465	0.0046	0	0.0046
6.- 0.4158	0.0069	0	0.0069
7.- 0.4851	0.0096	0	0.0096
8.- 0.5544	0.0128	0	0.0128
9.- 0.6237	0.0165	0	0.0165
10.- 0.6930	0.0206	0	0.0206
11.- 0.7623	0.0252	0	0.0252
12.- 0.8316	0.0344	0.0340	0.0004
13.- 0.9009	0.0447	0.0396	0.0051
14.- 0.9702	0.0561	0.0396	0.0165
15.- 1.0395	0.0687	0.0396	0.0291
16.- 1.1088	0.0825	0.0792	0.0033
17.- 1.1780	0.0974	0.0792	0.0182
18.- 1.2473	0.1134	0.1132	0.0002
19.- 1.3166	0.1306	0.1188	0.0118
20.- 1.3859	0.1489	0.1188	0.0301
21.- 1.4552	0.1684	0.1584	0.0100
22.- 1.5245	0.1966	0.1954	0.0012
23.- 1.5938	0.2266	0.1980	0.0286
24.- 1.6631	0.2584	0.2376	0.0208
25.- 1.7324	0.2921	0.2772	0.0149
26.- 1.8017	0.3276	0.3168	0.0108
27.- 1.8710	0.3650	0.3564	0.0086
28.- 1.9403	0.4041	0.3938	0.0113
29.- 2.0096	0.4451	0.4339	0.0123
30.- 2.0789	0.4880	0.4720	0.0159
31.- 2.1482	0.5327	0.5116	0.0210
32.- 2.2175	0.5865	0.5852	0.0012
33.- 2.2868	0.6426	0.6304	0.0122
34.- 2.3561	0.7010	0.7003	0.0011
35.- 2.4254	0.7618	0.7497	0.0120
36.- 2.4947	0.8248	0.8312	0.0008
37.- 2.5640	0.8901	0.8685	0.0219
38.- 2.6333	0.9577	0.9617	0.0052
39.- 2.7026	1.0275	1.0273	0.0002
40.- 2.7719	1.0997	1.0498	0.0316
41.- 2.8412	1.1741	1.1597	0.0142
42.- 2.9105	1.2605	1.2419	0.0016
43.- 2.9798	1.3496	1.3256	0.0240
44.- 3.0491	1.4415	1.4175	0.0228
45.- 3.1184	1.5361	1.5043	0.0319
46.- 3.1877	1.6335	1.6022	0.0299
47.- 3.2570	1.7336	1.7293	0.0160
48.- 3.3263	1.8365	1.8357	0.0003
49.- 3.3956	1.9421	1.9257	0.0167
50.- 3.4649	2.0505	2.0254	0.0265
51.- 3.5341	2.1616	2.1434	0.0000
52.- 3.6034	2.2873	2.2848	0.0042
53.- 3.6727	2.4163	2.3944	0.0333
54.- 3.7420	2.5485	2.5587	0.0019
55.- 3.8113	2.6839	2.6553	0.0281
56.- 3.8806	2.8225	2.8198	0.0011
57.- 3.9499	2.9644	2.9406	0.0074
58.- 4.0192	3.1094	3.0624	0.0299

Tabla 5.5 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro comprendido dentro de los postes	Diferencia= $ f - f^* $
59.- 4.0885	3.1646	3.1598	0.0065
60.- 4.1578	3.1220	3.0891	0.0302
61.- 4.2271	3.0762	3.0890	0.0134
62.- 4.2964	3.0342	2.9621	0.0332
63.- 4.3657	2.9893	2.9758	0.0293
64.- 4.4350	2.9415	2.8997	0.0222
65.- 4.5043	2.8906	2.8148	0.0183
66.- 4.5736	2.8368	2.8337	0.0008
67.- 4.6429	2.7800	2.7541	0.0311
68.- 4.7122	2.7202	2.7038	0.0026
69.- 4.7815	2.6574	2.6078	0.0090
70.- 4.8508	2.5917	2.5786	0.0297
71.- 4.9201	2.5230	2.4798	0.0018
72.- 4.9894	2.4513	2.4368	0.0130
73.- 5.0587	2.3766	2.3558	0.0242
74.- 5.1280	2.2990	2.2462	0.0335
75.- 5.1973	2.2183	2.1986	0.0195
76.- 5.2666	2.1347	2.1146	0.0159
77.- 5.3359	2.0481	2.0473	0.0018
78.- 5.4052	1.9586	1.9310	0.0247
79.- 5.4745	1.8660	1.8566	0.0023
80.- 5.5438	1.7705	1.7654	0.0027
81.- 5.6131	1.6719	1.6486	0.0240
82.- 5.6824	1.5890	1.5624	0.0207
83.- 5.7517	1.5039	1.4896	0.0140
84.- 5.8210	1.4161	1.3909	0.0313
85.- 5.8902	1.3259	1.3283	0.0090
86.- 5.9595	1.2331	1.2117	0.0189
87.- 6.0288	1.1378	1.1053	0.0291
88.- 6.0981	1.0400	1.0090	0.0305
89.- 6.1674	0.9396	0.8903	0.0300
90.- 6.2367	0.8369	0.8285	0.0025
91.- 6.3060	0.7309	0.7045	0.0263
92.- 6.3753	0.6754	0.6536	0.0222
93.- 6.4446	0.6189	0.6140	0.0053
94.- 6.5139	0.5609	0.5590	0.0018
95.- 6.5832	0.5016	0.4976	0.0020
96.- 6.6525	0.4409	0.4190	0.0231
97.- 6.7218	0.3788	0.3565	0.0221
98.- 6.7911	0.3154	0.3089	0.0025
99.- 6.8604	0.2505	0.2373	0.0129
100.- 6.9297	0.1843	0.1582	0.0259
101.- 6.9990	0.1167	0.1161	0.0005
RMS de perforaciones =			0.0166
RMS de postes =			0.0201
PROMEDIO DE DIFERENCIAS =			0.0145

5.2 Caso convexo

La herramienta de pétalo para generar la superficie convexa se muestra en la figura 5.9. Al igual que en el caso cóncavo, se trabajará con un solo pétalo de la herramienta, (ver figura 5.10). El desgaste que se quiere generar con una herramienta de pétalo se observa en la figura 5.11, este mismo desgaste se quiere generar con la nueva herramienta porosa.

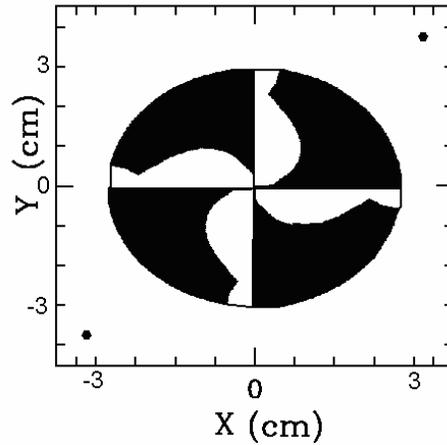


Figura 5.9. - Herramienta de pétalo para el pulido de superficies convexas.

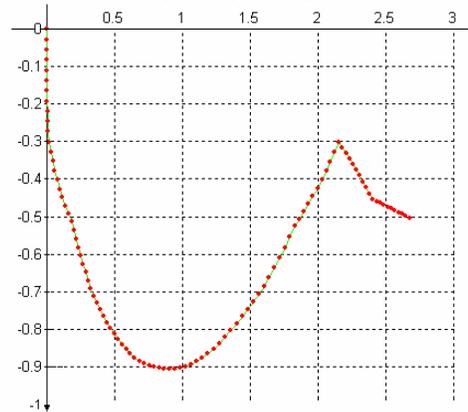


Figura 5.10. - Segmento del perfil de la herramienta de pétalo para el pulido de superficies convexas con 101 puntos.

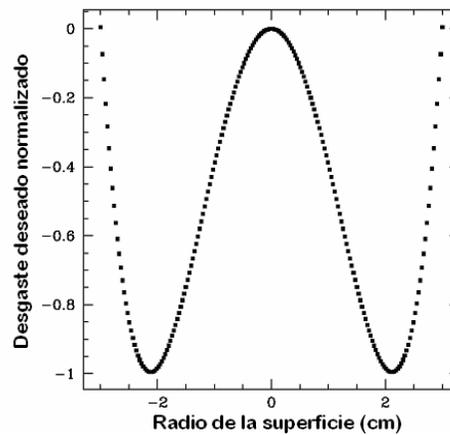


Figura 5.11. - Desgaste a generar con las herramientas de pétalo para el pulido de superficies convexas.

De igual manera que en el primer ejemplo 5.1-1 se calcula la función $f_1(t)$ para 100 polinomios y otros 100 polinomios para $f_2(t)$ que describan el perfil de la herramienta de pétalo para el pulido de superficies convexas, (ver figura 5.12).

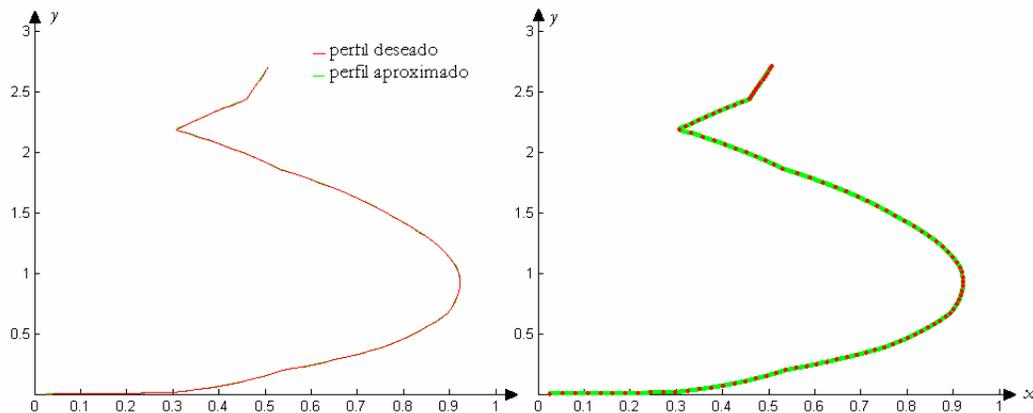


Figura 5.12. - Ajuste del perfil de la herramienta de pétalo utilizada para el pulido de superficies convexas.

Ejemplo 5.-4 Sea la herramienta de pétalo con radio de 2.75centímetros y un radio del vidrio a pulir de 3centímetros, teniendo 30 circunferencias de evaluación y 28 circunferencias de montaje, al realizar los cálculos necesarios se obtuvieron los siguientes resultados:

Hasta la circunferencia de montaje 13 se colocaran postes, si se compara la afectación que produce esta herramienta en los perímetros de las circunferencias de evaluación, con la afectación que producen sobre los mismos la herramienta de pétalo, se encuentra que la mayor diferencia entre estos valores es de 0.1692cm con un rms de 0.0925cm para la parte interna, ver tabla 5.6.

De la circunferencia de montaje 14 en adelante se realizan perforaciones, teniendo en esta parte externa de la herramienta un rms de 0.1037cm y teniendo que la mayor afectación en las circunferencias de evaluación es de 0.1988cm, ver tabla 5.7. La figura 5.13 muestra la forma de la herramienta porosa.

Tabla 5.6 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro comprendido dentro de los postes	Diferencia= $ f - f^* $
1. 0.0901	0.0010	0	0.0010
2. 0.1802	0.0048	0	0.0048
3. 0.2703	0.0114	0	0.0114
4. 0.3604	0.0411	0	0.0411
5. 0.4505	0.0963	0	0.0963
6. 0.5405	0.1692	0	0.1692
7. 0.6306	0.2361	0.1263	0.1098
8. 0.7207	0.2989	0.2518	0.0471
9. 0.8108	0.3692	0.2979	0.0713
10. 0.9009	0.4554	0.3372	0.1182
11. 0.9910	0.5564	0.4253	0.1311
12. 1.0811	0.6677	0.5268	0.1408
13. 1.1712	0.7986	0.7727	0.0259
14. 1.2613	0.9479	0.9260	0.0219

Tabla 5.7 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro eliminado por las perforaciones	Diferencia= $ f - f^* $
15. 1.3514	1.0129	1.0050	0.0079
16. 1.4415	0.9732	0.9572	0.0160
17. 1.5315	0.9149	0.9022	0.0126
18. 1.6216	0.8426	0.7274	0.1152
19. 1.7117	0.7652	0.6413	0.1239
20. 1.8018	0.6822	0.5190	0.1631
21. 1.8919	0.5871	0.4921	0.0950
22. 1.9820	0.5032	0.3044	0.1988
23. 2.0721	0.4306	0.2682	0.1624
24. 2.1622	0.3509	0.2471	0.1038
25. 2.2523	0.3330	0.2951	0.0379
26. 2.3424	0.3824	0.2635	0.1189
27. 2.4324	0.4348	0.3780	0.0567
28. 2.5225	0.4703	0.4512	0.0190
29. 2.6126	0.4864	0.4772	0.0093
30. 2.7027	0.5023	0.4762	0.0261
RMS de postes =			0.0891cm
RMS de perforaciones =			0.1004cm
PROMEDIO DE DIFERENCIAS =			0.0752cm

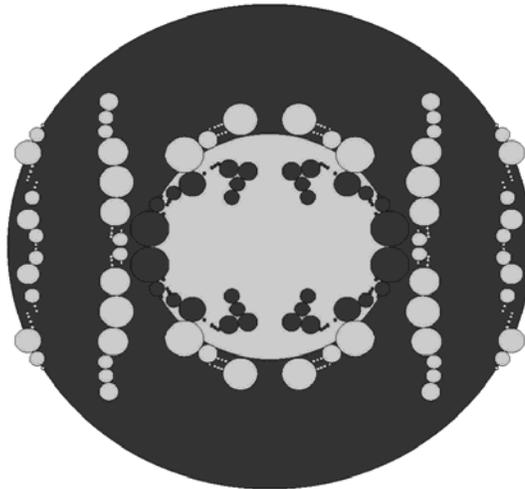


Figura 5.13. - Herramienta porosa formada con 28 circunferencias de montaje y 30 circunferencias de evaluación.

Ejemplo 5.-5 Sea la misma herramienta de pétalo con radio de la herramienta de 2.75 centímetros y un radio del vidrio a pulir de 3 centímetros, por lo tanto utilizaremos la misma función de perfil, consideremos ahora 90 circunferencias de evaluación y 28 circunferencias de montaje, al realizar los cálculos necesarios se obtuvieron los siguientes resultados:

Para este caso se pondrán postes de la circunferencia de montaje 1 hasta la 13, observando que se tiene un rms de 0.1442cm y si comparamos la afectación que produce esta herramienta en los perímetros de las circunferencias de evaluación con la afectación que producen sobre los mismos la

herramienta de pétalo, se encuentra que la mayor diferencia entre estos valores es de 0.3215cm para la parte interna de la herramienta, ver tabla 5.8.

De la circunferencia de montaje 14 en adelante se realizan perforaciones, teniendo en esta parte de externa de herramienta un rms de 0.1300cm y se tiene que la mayor diferencia entre las afectaciones que produce esta herramienta y la de pétalo en las circunferencias de evaluación es de 0.2621cm, ver tabla 5.9. La figura 5.14 muestra la forma de la herramienta porosa.

Tabla 5.8 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f=Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f*=Parte del perímetro comprendido dentro de los postes	Diferencia= $ f - f^* $
1.- 0.0300	0.0000	0	0.0000
2.- 0.0601	0.0003	0	0.0003
3.- 0.0901	0.0010	0	0.0010
4.- 0.1201	0.0019	0	0.0019
5.- 0.1502	0.0032	0	0.0032
6.- 0.1802	0.0048	0	0.0048
7.- 0.2102	0.0067	0	0.0067
8.- 0.2402	0.0088	0	0.0088
9.- 0.2703	0.0114	0	0.0114
10.- 0.3003	0.0143	0	0.0143
11.- 0.3303	0.0269	0	0.0269
12.- 0.3604	0.0411	0	0.0411
13.- 0.3904	0.0576	0.0389	0.0187
14.- 0.4204	0.0759	0	0.0759
15.- 0.4505	0.0963	0	0.0963
16.- 0.4805	0.1187	0.1122	0.0065
17.- 0.5105	0.1431	0	0.1431
18.- 0.5405	0.1692	0	0.1692
19.- 0.5706	0.1980	0.1742	0.0238
20.- 0.6006	0.2167	0	0.2167
21.- 0.6306	0.2361	0	0.2361
22.- 0.6607	0.2562	0.2274	0.0288
23.- 0.6907	0.2772	0.2325	0.0446
24.- 0.7207	0.2989	0	0.2989
25.- 0.7508	0.3215	0	0.3215
26.- 0.7808	0.3449	0.3325	0.0124
27.- 0.8108	0.3692	0.1557	0.2135
28.- 0.8408	0.3939	0.1875	0.2065
29.- 0.8709	0.4240	0.3958	0.0281
30.- 0.9009	0.4554	0.1912	0.2641
31.- 0.9309	0.4880	0.2474	0.2405
32.- 0.9610	0.5216	0.4876	0.0341
33.- 0.9910	0.5564	0.3654	0.1910
34.- 1.0210	0.5924	0.4381	0.1543
35.- 1.0511	0.6294	0.6015	0.0279
36.- 1.0811	0.6677	0.5009	0.1668
37.- 1.1111	0.7066	0.4764	0.2302
38.- 1.1411	0.7515	0.6956	0.0559
39.- 1.1712	0.7986	0.7746	0.0240
40.- 1.2012	0.8469	0.5831	0.2639
41.- 1.2312	0.8967	0.6686	0.2281
42.- 1.2613	0.9479	0.9434	0.0045
43.- 1.2913	1.0005	0.8542	0.1463

Tabla 5.9 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, medida sobre las circunferencias de evaluación

Radio de la circunferencia de evaluación	f=Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f*=Parte del perímetro eliminado por las perforaciones	Diferencia= f - f*
44.- 1.3213	1.0211	0.7876	0.2335
45.- 1.3514	1.0129	0.9814	0.0315
46.- 1.3814	1.0036	0.7983	0.2053
47.- 1.4114	0.9896	0.7379	0.2517
48.- 1.4415	0.9732	0.9538	0.0193
49.- 1.4715	0.9553	0.7642	0.1911
50.- 1.5015	0.9359	0.6737	0.2621
51.- 1.5315	0.9149	0.8914	0.0234
52.- 1.5616	0.8923	0.8372	0.0551
53.- 1.5916	0.8682	0.6626	0.2056
54.- 1.6216	0.8426	0.6847	0.1580
55.- 1.6517	0.8149	0.8041	0.0108
56.- 1.6817	0.7900	0.5636	0.2264
57.- 1.7117	0.7652	0.5152	0.2500
58.- 1.7418	0.7389	0.7352	0.0037
59.- 1.7718	0.7112	0.5684	0.1428
60.- 1.8018	0.6822	0.4781	0.2041
61.- 1.8318	0.6517	0.6165	0.0353
62.- 1.8619	0.6199	0.5523	0.0675
63.- 1.8919	0.5871	0.4344	0.1528
64.- 1.9219	0.5507	0.5409	0.0098
65.- 1.9520	0.5250	0.3960	0.1290
66.- 1.9820	0.5032	0.3924	0.1108
67.- 2.0120	0.4798	0.4241	0.0557
68.- 2.0421	0.4557	0.4453	0.0103
69.- 2.0721	0.4306	0.3464	0.0842
70.- 2.1021	0.4046	0.3249	0.0797
71.- 2.1321	0.3773	0.3706	0.0068
72.- 2.1622	0.3509	0.1845	0.1665
73.- 2.1922	0.3153	0.1456	0.1697
74.- 2.2222	0.3152	0.3119	0.0033
75.- 2.2523	0.3330	0.1489	0.1841
76.- 2.2823	0.3489	0.1848	0.1641
77.- 2.3123	0.3655	0.3526	0.0130
78.- 2.3424	0.3824	0.3297	0.0527
79.- 2.3724	0.3996	0.3455	0.0541
80.- 2.4024	0.4172	0.3948	0.0223
81.- 2.4324	0.4348	0.3358	0.0990
82.- 2.4625	0.4541	0.3468	0.1073
83.- 2.4925	0.4659	0.4382	0.0277
84.- 2.5225	0.4703	0.4510	0.0193
85.- 2.5526	0.4758	0.3909	0.0849
86.- 2.5826	0.4811	0.3688	0.1122
87.- 2.6126	0.4864	0.4698	0.0166
88.- 2.6427	0.4917	0.3845	0.1073
89.- 2.6727	0.4970	0.3881	0.1089
90.- 2.7027	0.5023	0.4962	0.0061
RMS de postes =			<i>0.1425cm</i>
RMS de perforaciones =			<i>0.1286cm</i>
PROMEDIO DE DIFERENCIAS =			0.1003cm

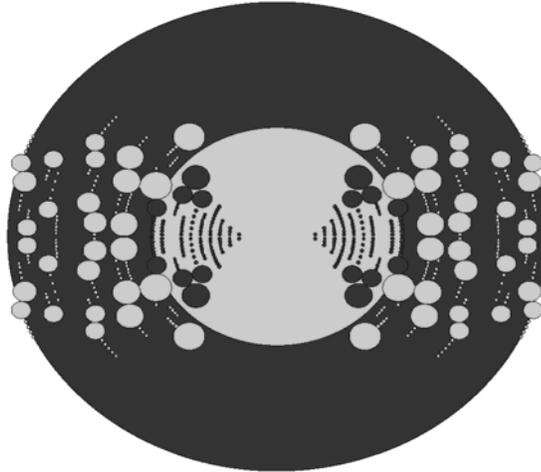


Figura 5.14. - Herramienta porosa formada con 28 circunferencias de montaje y 90 circunferencias de evaluación.

Ejemplo 5.-6 Sea la misma herramienta de pétalo con radio de la herramienta de 2.75cm y un radio del vidrio a pulir de 3cm, consideremos ahora 90 circunferencias de evaluación y 90 circunferencias de montaje, al realizar los cálculos necesarios se obtuvieron los siguientes resultados:

Para este caso se pondrán postes de la circunferencia de montaje 1 hasta la 43, observando que se tiene un rms de 0.0159cm y si comparamos la afectación que produce esta herramienta en los perímetros de las circunferencias de evaluación con la afectación que producen sobre los mismos la herramienta de pétalo, se encuentra que la mayor diferencia entre estos valores es de 0.0335cm para la parte interna, ver tabla 5.10.

De la circunferencia de montaje 44 en adelante se realizan perforaciones, teniendo en esta parte de herramienta un rms de 0.0178cm y la mayor afectación que produce por las circunferencias de evaluación es de 0.0308cm, ver tabla 5.11. La figura 5.15 muestra la forma de la herramienta porosa.

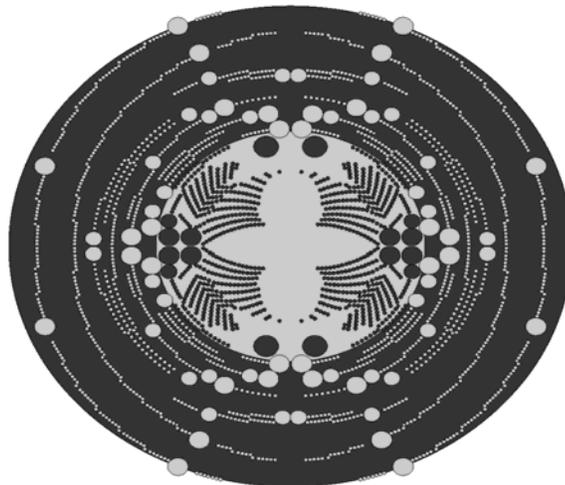


Figura 5.15. - Herramienta porosa formada con 90 circunferencias de montaje y 90 circunferencias de evaluación.

Tabla 5.10 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al colocar postes, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f=Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f*=Parte del perímetro comprendido dentro de los postes	Diferencia= f - f*
1.- 0.0300	0.0000	0	0.0000
2.- 0.0601	0.0003	0	0.0003
3.- 0.0901	0.0010	0	0.0010
4.- 0.1201	0.0019	0	0.0019
5.- 0.1502	0.0032	0	0.0032
6.- 0.1802	0.0048	0	0.0048
7.- 0.2102	0.0067	0	0.0067
8.- 0.2402	0.0088	0	0.0088
9.- 0.2703	0.0114	0	0.0114
10.- 0.3003	0.0143	0	0.0143
11.- 0.3303	0.0269	0	0.0269
12.- 0.3604	0.0411	0.0396	0.0015
13.- 0.3904	0.0576	0.0396	0.0180
14.- 0.4204	0.0759	0.0736	0.0023
15.- 0.4505	0.0963	0.0792	0.0171
16.- 0.4805	0.1187	0.1162	0.0025
17.- 0.5105	0.1431	0.1188	0.0243
18.- 0.5405	0.1692	0.1584	0.0108
19.- 0.5706	0.1980	0.1954	0.0026
20.- 0.6006	0.2167	0.1980	0.0187
21.- 0.6306	0.2361	0.2350	0.0011
22.- 0.6607	0.2562	0.2376	0.0186
23.- 0.6907	0.2772	0.2746	0.0026
24.- 0.7207	0.2989	0.2772	0.0217
25.- 0.7508	0.3215	0.3168	0.0047
26.- 0.7808	0.3449	0.3168	0.0281
27.- 0.8108	0.3692	0.3564	0.0128
28.- 0.8408	0.3939	0.3934	0.0005
29.- 0.8709	0.4240	0.3960	0.0280
30.- 0.9009	0.4554	0.4302	0.0252
31.- 0.9309	0.4880	0.4634	0.0245
32.- 0.9610	0.5216	0.5153	0.0063
33.- 0.9910	0.5564	0.5485	0.0079
34.- 1.0210	0.5924	0.5589	0.0335
35.- 1.0511	0.6294	0.6268	0.0026
36.- 1.0811	0.6677	0.6365	0.0312
37.- 1.1111	0.7066	0.6982	0.0084
38.- 1.1411	0.7515	0.7241	0.0274
39.- 1.1712	0.7986	0.7752	0.0234
40.- 1.2012	0.8469	0.8386	0.0084
41.- 1.2312	0.8967	0.8944	0.0023
42.- 1.2613	0.9479	0.9328	0.0151
43.- 1.2913	1.0005	0.9988	0.0017

Tabla 5.11 Afectación que se produce sobre la herramienta de pétalo al realizar perforaciones, medida sobre las circunferencias de evaluación.

Radio de la circunferencia de evaluación	f =Parte del perímetro que queda dentro del pétalo	f^* =Parte del perímetro eliminado por las perforaciones	Diferencia= $ f - f^* $
44.- 1.3213	1.0211	0.9957	0.0254
45.- 1.3514	1.0129	1.0107	0.0021
46.- 1.3814	1.0036	0.9769	0.0266
47.- 1.4114	0.9896	0.9786	0.0110
48.- 1.4415	0.9732	0.9646	0.0085
49.- 1.4715	0.9553	0.9232	0.0321
50.- 1.5015	0.9359	0.9349	0.0009
51.- 1.5315	0.9149	0.8943	0.0205
52.- 1.5616	0.8923	0.8766	0.0157
53.- 1.5916	0.8682	0.8522	0.0160
54.- 1.6216	0.8426	0.8223	0.0204
55.- 1.6517	0.8149	0.8113	0.0035
56.- 1.6817	0.7900	0.7693	0.0207
57.- 1.7117	0.7652	0.7549	0.0103
58.- 1.7418	0.7389	0.7365	0.0024
59.- 1.7718	0.7112	0.6797	0.0315
60.- 1.8018	0.6822	0.6630	0.0192
61.- 1.8318	0.6517	0.6433	0.0085
62.- 1.8619	0.6199	0.6043	0.0155
63.- 1.8919	0.5871	0.5818	0.0054
64.- 1.9219	0.5507	0.5445	0.0062
65.- 1.9520	0.5250	0.4911	0.0338
66.- 1.9820	0.5032	0.4849	0.0183
67.- 2.0120	0.4798	0.4627	0.0172
68.- 2.0421	0.4557	0.4360	0.0197
69.- 2.0721	0.4306	0.4252	0.0053
70.- 2.1021	0.4046	0.3825	0.0221
71.- 2.1321	0.3773	0.3564	0.0209
72.- 2.1622	0.3509	0.3508	0.0001
73.- 2.1922	0.3153	0.3142	0.0011
74.- 2.2222	0.3152	0.3142	0.0010
75.- 2.2523	0.3330	0.3191	0.0139
76.- 2.2823	0.3489	0.3483	0.0006
77.- 2.3123	0.3655	0.3463	0.0192
78.- 2.3424	0.3824	0.3569	0.0256
79.- 2.3724	0.3996	0.3884	0.0113
80.- 2.4024	0.4172	0.3976	0.0196
81.- 2.4324	0.4348	0.4040	0.0308
82.- 2.4625	0.4541	0.4333	0.0208
83.- 2.4925	0.4659	0.4652	0.0006
84.- 2.5225	0.4703	0.4701	0.0002
85.- 2.5526	0.4758	0.4675	0.0083
86.- 2.5826	0.4811	0.4766	0.0045
87.- 2.6126	0.4864	0.4832	0.0033
88.- 2.6427	0.4917	0.4730	0.0187
89.- 2.6727	0.4970	0.4653	0.0318
90.- 2.7027	0.5023	0.4756	0.0267
RMS de postes =			<i>0.0157cm</i>
RMS de perforaciones =			<i>0.0176cm</i>
PROMEDIO DE DIFERENCIAS =			<i>0.0132cm</i>

Sobre los ejemplos anteriores, hay que mencionar que tanto para el caso de superficies cóncavas como convexas, es importante tomar un buen número de circunferencias de evaluación para poder cuantificar de forma confiable la aproximación al desgaste producido por la herramienta de pétalo, así como también es importante tomar un número adecuado de circunferencias de montaje para que el programa tenga suficientes opciones para posicionar las perforaciones en la herramienta.

5.3 Ejemplos con brocas adicionales

En los ejemplos que se presentan a continuación se consideraron además de los 16 radios considerados en las secciones anteriores, otros radios menores de brocas no existentes en el mercado para obtener una mejor aproximación en cuanto al desgaste deseado y lograr así una mayor cercanía entre los desgastes producidos por la herramienta de pétalo y la nueva herramienta, evidenciando así el buen desempeño teórico del método desarrollado en este trabajo, y que son en todo caso las limitaciones prácticas las que pudieran dificultar el alcance de los objetivos planteados. Estos ejemplos se realizaron para 101 circunferencias de montaje y 101 circunferencias de evaluación.

El procedimiento que se ha seguido para evaluar las herramientas porosas consiste en construir a partir de ellas una herramienta de pétalo de la manera siguiente: Tomando en cuenta los valores de la última actualización de $f(j)$ en el algoritmo 4-1, puede evaluarse la afectación que hacen las perforaciones y los postes sobre los perímetros de las diferentes circunferencias de evaluación. Si S es la parte del perímetro de una circunferencia de evaluación de radio re que no ha sido afectada por las perforaciones, entonces $\theta = \frac{S}{re}$ es el ángulo central que subtende el arco de longitud S , y es por lo tanto el tamaño angular que le correspondería a una herramienta anular incompleta de ese mismo radio. Algo similar ocurre para las circunferencias de evaluación afectadas por postes. Una vez que se tienen los tamaños angulares, se ingresan a un programa ^[1] que grafica a partir de ellos la herramienta de pétalo y calcula el desgaste producido por la misma. Este programa evalúa también el rms del desgaste generado respecto al desgaste generado por la herramienta. Finalmente podemos comparar esta herramienta y este desgaste con la herramienta de pétalo que originó la herramienta porosa y el desgaste que produce esta, cerrándose de este modo el círculo.

Nos referiremos a veces al desgaste generado por la herramienta de pétalo reconstruida a partir de la porosa simplemente como desgaste obtenido con la herramienta porosa.

Para el caso cóncavo, la figura 5.16 b) muestra el desgaste que se obtiene con la herramienta de pétalo. La figura 5.16 d) nos muestra el desgaste obtenido con una herramienta porosa construida utilizando 14 brocas comerciales, como se observa en la gráfica, utilizando esta herramienta no se obtendría un buen desgaste se tendría un rms de 0.0171142cm, el cual en comparación con el rms que genera la herramienta de pétalo original que es de 0.0023752cm es bastante grande además, se aprecia que es la parte central de la herramienta porosa la que no está generando el desgaste deseado. Sin embargo, al recuperar de la herramienta porosa los ángulos necesarios para crear la herramienta de pétalo se observa en las imágenes que casi se obtiene la herramienta de pétalo original.

En la figura 5.16 f), se crea una herramienta porosa utilizando las 14 brocas comerciales y aumentando otras 2 de radios más pequeños que si son comerciales pero que en la Máquina de Control Numérico no se utilizan, se observa que el desgaste simulado mejora en comparación al anterior teniendo un rms de 0.0147142cm.

Finalmente en la figura 5.16 h), se crea una herramienta porosa utilizando las 16 brocas anteriores y agregando 2 brocas de radio menor, éstas últimas inexistentes en el mercado, pero que si existieran generarían una mejor aproximación en cuanto al desgaste simulado ya que este caso se obtendría un rms de 0.0061127cm, el cual ya es mejor que los anteriores, en el sentido de que es más cercano al de la herramienta original. Esto nos indica que existe una limitante física para realizar la herramienta porosa con una buena aproximación al desgaste deseado, a partir de nuestro modelo.

Para el caso convexo, la figura 5.17 b) muestra el desgaste que se desea obtener con la herramienta de pétalo. La figura 5.17 d) muestra el desgaste simulado con la herramienta porosa construida utilizando 14 brocas comerciales, como se observa en la gráfica utilizando esta herramienta no se obtiene una aproximación al desgaste que se quiere en la parte interna de la herramienta, se tiene un rms de 0.0370362cm, en cambio el desgaste que genera la herramienta de pétalo es de 0.0326613cm aunque visualmente no muy notoria la diferencia. Si se recuperan de la herramienta porosa los ángulos necesarios para crear la herramienta de pétalo se observa en las imágenes que casi se obtiene la herramienta de pétalo original.

En la figura 5.17 f), se crea una herramienta porosa utilizando las 16 brocas, de igual manera que en el caso cóncavo, se observa que el desgaste simulado es parecido al anterior teniendo un rms de 0.0363490cm. En la figura 5.17 h), Se consideran 18 brocas como en el caso anterior, dicha herramienta construida de esta manera generarían un desgaste simulado con un rms de 0.0334230cm. Debido a los resultados obtenidos observamos que hay una limitante física para realizar la herramienta porosa con una buena aproximación al desgaste deseado.

Tabla 5.12 Rms obtenido para diferentes herramientas porosas considerando 14,16 y 18 radios de brocas y utilizando 101 circunferencias de montaje y 101 circunferencias de evaluación.

Caso Cóncavo	RMS
Herramienta de pétalo	0.0023752
Herramienta porosa construida con 14 tamaños de broca distinta	0.0171142
Herramienta porosa construida con 16 tamaños de broca distinta	0.0147142
Herramienta porosa construida con 18 tamaños de broca distinta	0.0061127
Caso Convexo	
Herramienta de pétalo original	0.0326613
Herramienta porosa construida con 14 tamaños de broca distinta	0.0370362
Herramienta porosa utilizando 16 tamaños de broca distinta	0.0363490
Herramienta porosa utilizando 18 tamaños de broca distinta	0.0334230

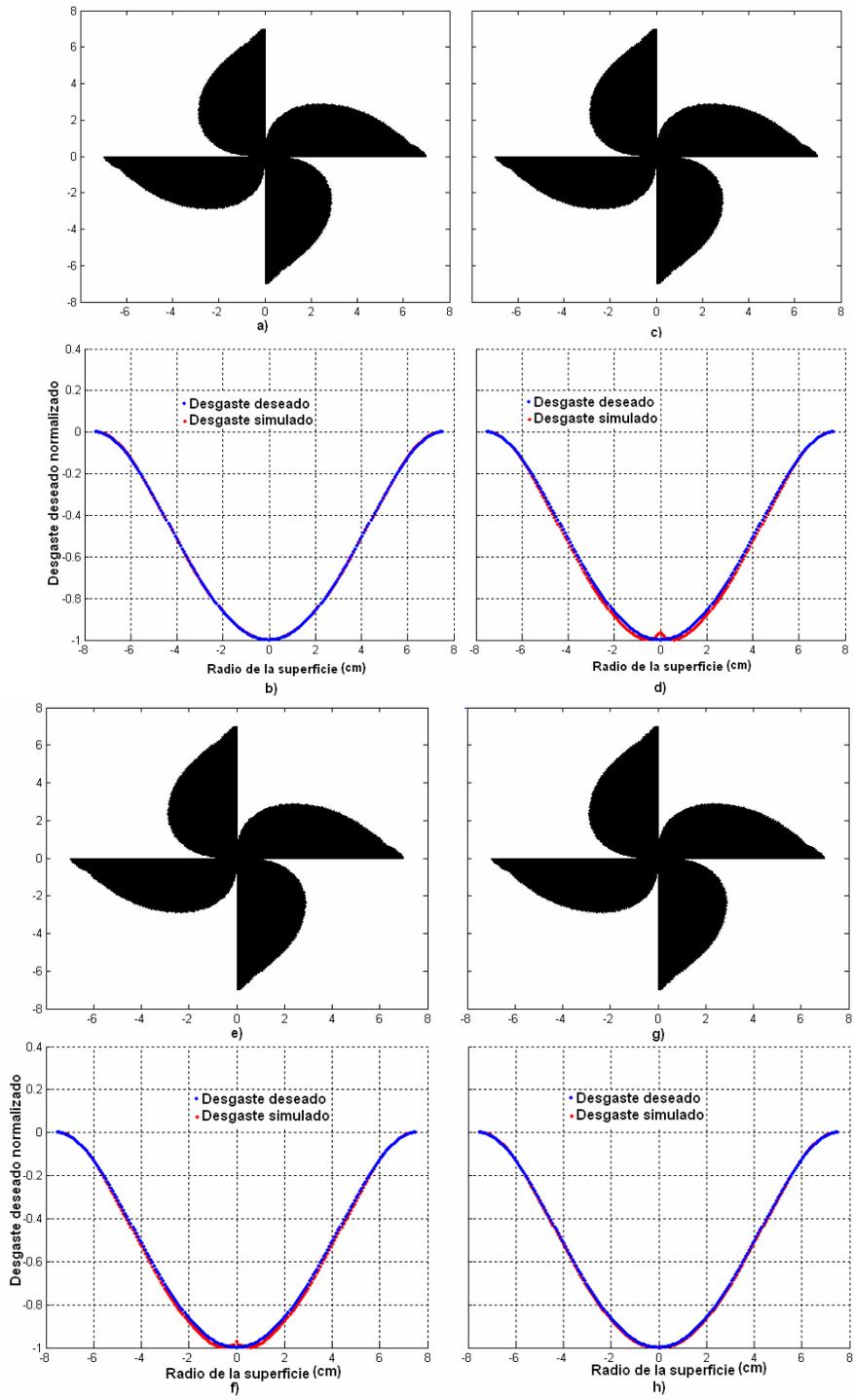


Figura 5.16. - Herramienta de pétalo para el caso cóncavo, b) Desgaste generado con la herramienta de pétalo, c) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 14 brocas, d) Desgaste generado con la herramienta porosa 14 brocas, e) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 16 brocas, f) Desgaste generado con la herramienta porosa de 16 brocas, g) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 18 brocas y h) Desgaste generado con la herramienta porosa de 18 brocas.

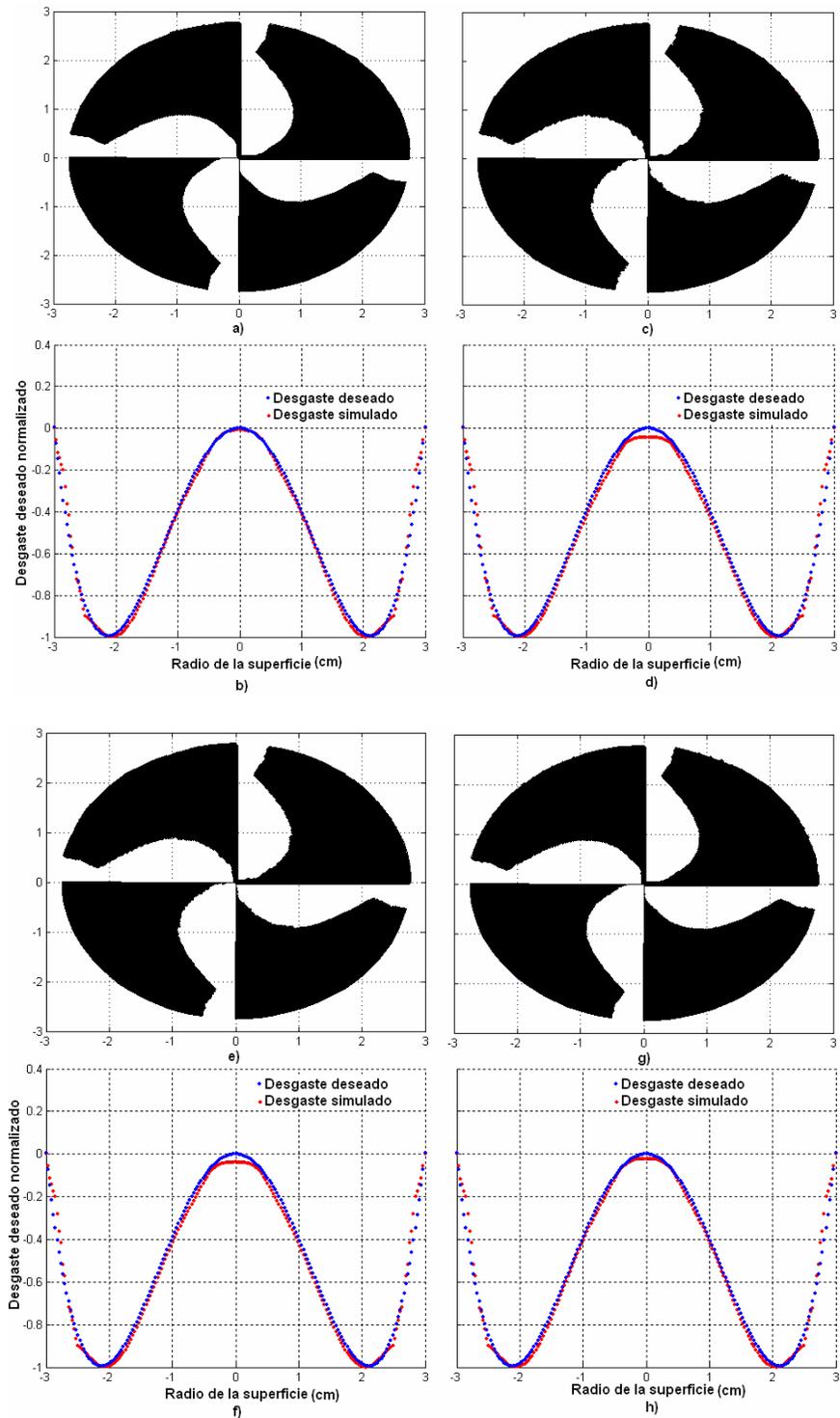


Figura 5.17. - Herramienta de pétalo para el caso convexo, b) Desgaste generado con la herramienta de pétalo, c) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 14 brocas, d) Desgaste generado con la herramienta porosa 14 brocas, e) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 16 brocas, f) Desgaste generado con la herramienta porosa 16 brocas, g) Herramienta de pétalo reconstruida con la herramienta porosa de 18 brocas y h) Desgaste generado con la herramienta porosa de 18 brocas.

CONCLUSIONES

(“Los problemas del mundo real son todos sucios, esto es correcto. Ningún modelo de estos es una aproximación a la realidad; esto no es realidad”.
George B. Dantzing)

En este trabajo de tesis se ha realizado una modelación matemática para desarrollar un nuevo tipo de herramienta de pulido aplicable al pulido clásico de superficies.

Como se estudió en el primer capítulo de este trabajo el pulido de las superficies ópticas es fundamental para la obtención de una buena imagen y por ello el interés de diseñar una nueva herramienta como una opción más para este proceso. En este mismo capítulo se han delineado las ideas rectoras en el diseño de la nueva herramienta.

En el segundo capítulo se abordó el estudio de las bases de la Teoría de Aproximación, pues como se vio mas adelante nuestro problema puede considerarse como un problema particular de aproximación. Además, como se pudo observar en este trabajo, los splines, particularmente los splines cúbicos paramétricos de interpolación, son una buena herramienta para encontrar una función que aproxime a una curva dada, en nuestro caso para encontrar la función que describe el perfil de la herramienta de pétalo. Antes de considerar splines para realizar tal aproximación se pretendía hacerla por medio de un solo polinomio, el cual se determinaría con un programa lineal, pero debido a que no se lograba un buen ajuste se optó por los splines.

En la segunda parte del trabajo, se estudió la parte correspondiente a la programación lineal, la cual ha contribuido en el desarrollo de diversas áreas del quehacer humano. El método símplex es hasta nuestros días, uno de los métodos de solución más socorridos para resolver programas lineales, y es con éste método con el cual le damos solución al programa lineal que planteamos.

En el capítulo cuarto se han integrado los elementos presentados en los capítulos anteriores para realizar el modelado del problema y resolverlo. Sin embargo, la motivación práctica no ha sido la única en este trabajo, como ha podido observarse, en esta tesis se ha modelado el problema del diseño de la

herramienta porosa haciendo un planteamiento inicial sobre la colocación de los poros y la evaluación del efecto de los mismo sobre el pulido. A partir de esto se ha creado un método iterativo para el proceso de diseño, donde en cada iteración se resuelve un programa lineal. La realización de este trabajo ha supuesto por lo tanto el manejo de herramientas teóricas, pero sobre todo adentrarse en el problema físico para modelarlo adecuadamente desde el punto de vista matemático.

Como se observa en los ejemplos, se logran diferentes herramientas porosas que teóricamente aproximan el desempeño de una misma herramienta de pétalo, es importante tener en cuenta que dependiendo del numero de circunferencias de montaje y evaluación, así como también de los radios de los poros que se den al momento de ejecutar el programa que calcula el número requerido de circunferencias de perforación (o postes) , cambiara el error de aproximación que se tendrá entre la herramienta de pétalo y la nueva herramienta porosa; se ofrecen así diferentes opciones para los talleres, para que escojan un diseño que satisfaga sus requerimientos de pulido y cuya construcción sea viable. Para poder hacer una comparación más fiable y completa, resta hacer las pruebas prácticas en un taller de pulido, lo cual sin ser parte de este trabajo de tesis, esperamos poder ver pronto realizado gracias al trabajo conjunto que se ha desarrollado con el Taller de Óptica de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

APÉNDICE A

Teorema A.1. Si a y b están en \mathfrak{R} y si $a < b$, entonces $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.

Dem. Como $a < b$ se sigue que $2a < a + b$ y también que $a + b < 2b$. Por lo tanto se tiene

$$a < \frac{1}{2}(a + b) < b. \blacksquare$$

Corolario A.2 Si $b \in \mathfrak{R}$ y $b > 0$, entonces $0 < \frac{1}{2}b < b$.

Dem. Se hace $a = 0$ en teorema A.1. ■

Teorema A.3 Si $a \in \mathfrak{R}$ es tal que $0 \leq a \leq \varepsilon$ para todo número positivo ε , entonces $a = 0$.

Dem. Supóngase por el contrario que $a > 0$. Entonces del corolario A.2. se deduce $0 < \frac{1}{2}a < a$.

Ahora bien, si se hace $\varepsilon_0 := \frac{1}{2}a$, entonces se tiene que $0 < \varepsilon_0 < a$. Por lo tanto, es falso que $a < \varepsilon$ para toda $\varepsilon > 0$. Se concluye que $a=0$. ■

Propiedad de los intervalos anidados. Si $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathfrak{N}$, es una sucesión anidada de intervalos acotados y cerrados con la propiedad de que $\{b_n - a_n : n \in \mathfrak{N}\} = 0$, entonces existe un único número $\xi \in \mathfrak{R}$ tal que $\xi \in I_n$ para toda $n \in \mathfrak{N}$.¹⁵

Dem. Como los intervalos están anidados, se tiene $I_n \subseteq I_1$ para toda $n \in \mathfrak{N}$, por lo que $a_n \leq b_n$ para toda $n \in \mathfrak{N}$. Por lo tanto, el conjunto no vacío $\{a_n : n \in \mathfrak{N}\}$ está acotado por arriba y sea ξ su supremo. Evidentemente, $a_n \leq \xi$ para toda $n \in \mathfrak{N}$.

Se afirma asimismo que $\xi \leq b_n$ para toda n . Esto se establece demostrando que para cualquier n particular, el número b_n es una cota superior del conjunto $\{a_k : k \in \mathfrak{N}\}$. Se consideran dos casos.

- i) Si $n \leq k$, entonces, como $I_n \supseteq I_k$, se tiene $a_k \leq b_k \leq b_n$.
- ii) Si $k < n$, entonces, como $I_k \supseteq I_n$, se tiene $a_k \leq a_n \leq b_n$ (ver figura 1). Por tanto, se concluye que $a_k \leq b_n$ para toda k , por lo que b_n es una cota superior del conjunto $\{a_k : k \in \mathfrak{N}\}$. En consecuencia, $\xi \leq b_n$ para cada $n \in \mathfrak{N}$. Puesto que $a_n \leq \xi \leq b_n$ para toda n , se tiene $\xi \in I_n$ para toda $n \in \mathfrak{N}$.

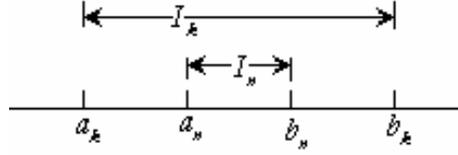


Figura 1. - Si $k < n$, entonces $I_n \subseteq I_k$.

Falta por demostrar que ξ es único.

Sea $\eta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, utilizando un razonamiento similar al anterior podemos probar que $a_n \leq \eta$ para toda n y, por consiguiente, que $\xi \leq \eta$. Como se tiene que $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \eta - \xi \leq b_m - a_m < \varepsilon$. Como esto se cumple para toda $\varepsilon > 0$, por el teorema **A.3.** se deduce que $\eta - \xi = 0$, luego $\xi = \eta$ es el único punto que pertenece a I_n para toda $n \in \mathbb{N}$. ■

Teorema A.4. Toda matriz A diagonalmente dominante es no singular.

Dem. Consideremos el sistema lineal $Ax = 0$ y supongamos que este tiene una solución $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ diferente de cero. Sea k tal que $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, claramente $|x_k| > 0$.

Dado que $Ax = 0$ entonces $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$, $i = 1, \dots, n$, en particular para $i = k$

$$a_{kk}x_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_j,$$

de aquí que

$$|a_{kk}| |x_k| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| |x_j|,$$

luego

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{|a_{kj}| |x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|.$$

Lo cual contradice el hecho de que A es una matriz diagonalmente dominante, por lo que la única solución al sistema $Ax = 0$ es la solución trivial, y esta es una condición necesario y suficiente para la no singularidad de A . ■

APÉNDICE B

CODIGO DE LOS PROGRAMAS EN MATLAB

```
clear all
deh=input('De el radio externo de la herramienta deh= ');
dvi=input('De el radio del vidrio dvi=');
cnc=input('El perfil a obtener es 1) concavo o 2) convexo cnc= ');
archivo=input('De la dirección del archivo donde se encuentran los angulos: ');
mx=load(archivo);
c=linspace(1,size(mx,1),size(mx,1))*deh/size(mx,1);
puntos=[c.*cos(mx*pi/180) c'.*sin(mx*pi/180)];
[radeva,radmon,rm,re,rp,f,C,C1,t]=final(puntos,cnc);
I=identidad(C,C1,t);
RI=sqrt(2)*I;
cortar=cortes(rm,radmon,RI);
cortareva=cortes(re,radeva,RI);
[numper,sol,epsilon]=repeticion(rp(1),pi/2*radeva-abs(f),radmon,radeva,rm,re);
[numper1,sol1,epsilon1]=repeticion(rp(1),abs(f),radmon,radeva,rm,re);
A(1,:)=floor(numper);
A1(1,:)=floor(numper1);
tamcp=size(rp,2);
for i=2:tamcp
    KK=calaux(radeva,radmon,rp(i-1),re,rm,floor(numper));
    KK1=calaux(radeva,radmon,rp(i-1),re,rm,floor(numper1));
    sol=sol(1,1:re)-sum(KK,2)';
    sol1=sol1(1,1:re)-sum(KK1,2)';
    [numper,sol,epsilon]=repeticion(rp(i),sol,radmon,radeva,rm,re);
    [numper1,sol1,epsilon1]=repeticion(rp(i),sol1,radmon,radeva,rm,re);
    A(i,:)=floor(numper);
    A1(i,:)=floor(numper1);
end
for k=1:re
    posN=calculando(radeva(k),radmon,rp,rm,A);
    posN1=calculando(radeva(k),radmon,rp,rm,A1);
    N(k,:)=posN;
    N1(k,:)=posN1;
end
sss=pi/2*radeva-abs(f)-sum(N,2)';
sss1=abs(f)-sum(N1,2)';
if cnc==1
    maxidif=max(sss(1:cortareva))
    maxidif1=max(sss1(cortareva+1:end))
else
    maxidif=max(sss1(1:cortareva))
    maxidif1=max(sss(cortareva+1:end))
end
```

```

function [radeva,radmon,rm,re,rp,f,C,C1,t]=final(puntos,cnc)
if cnc==1
    rv=puntos(end,1);
else
    rv=puntos(end,2);
end
re=input('Cuantos radios de evaluacion: ');
rm=input('Cuantos radios de montaje: ');
rp=[0.33734 0.3175 0.29766 0.27781 0.25797 0.21828 0.19844 0.17859 0.15875 0.13891 0.11906
0.099219 0.079375];
radeva=linspace(1,re,rv)/rv;
radmon=linspace(1,rm,rm)*rv/rm;
[C C1 t]=perfil(puntos(:,1),puntos(:,2));
P(:,1)=C(:,1).^2+C1(:,1).^2;
P(:,2)=2*(C(:,1).*C(:,2)+C1(:,1).*C1(:,2));
P(:,3)=2*C(:,1).*C(:,3)+C(:,2).^2+2*C1(:,1).*C1(:,3)+C1(:,2).^2;
P(:,4)=2*(C(:,4).*C(:,1)+C(:,3).*C(:,2)+C1(:,4).*C1(:,1)+C1(:,3).*C1(:,2));
P(:,5)=2*C(:,4).*C(:,2)+C(:,3).^2+2*C1(:,4).*C1(:,2)+C1(:,3).^2;
P(:,6)=2*(C(:,4).*C(:,3)+C1(:,4).*C1(:,3));
P(:,7)=C(:,4).^2+C1(:,4).^2;
angulos=interparametricageneral(P,radeva,re,t,C,C1);
f=radeva.*angulos;

```

```

function [C C1 b1]=perfil(x,y)
m=size(x,1);
d(1)=2;
for i=1:m-1
    d(i)=sqrt((x(i+1)-x(i)).^2+(y(i+1)-y(i)).^2);
end
t(1)=0;
for i=1:m-1
    t(i+1)=t(i)+d(i);
end
pp1=spline(t,x);
pp2=spline(t,y);
[b1,c1,l1,k1,d1] = unmkpp(pp1);
[b2,c2,l2,k2,d2] = unmkpp(pp2);
c1(m,:)=c1(1,:);
c2(m,:)=c2(1,:);
C=[c1(:,1) (c1(:,2)-3*c1(:,1).*t') 3*c1(:,1).*t'.^2-2*c1(:,2).*t'+c1(:,3) -c1(:,1).*t'.^3+c1(:,2).*t'.^2-
c1(:,3).*t'+c1(:,4)];
C1=[c2(:,1) (c2(:,2)-3*c2(:,1).*t') 3*c2(:,1).*t'.^2-2*c2(:,2).*t'+c2(:,3) -c2(:,1).*t'.^3+c2(:,2).*t'.^2-
c2(:,3).*t'+c2(:,4)];

```

```

function angulos=interparametricageneral(P,radeva,re,t,C,C1)
clear xxx yyy
s=[];
fil=[];

```

```

radcir=[];
for i=1:re
    P1=mezcla(P,radeva(i));
    clear guar
    for j=1:size(P,1)-1
        raiz=roots(P1(j,:));
        [guar ll]=quitando(raiz);
        for k=1:ll
            if t(j)<= guar(k) & guar(k)<=t(j+1)
                s=[guar(k) s];
                fil=[j fil];
                radcir=[i radcir];
                break
            end
        end
    end
end
end
s=invertir(s);
fil=invertir(fil);
radcir=invertir(radcir);
angulos=atan(yyy./xxx);

```

```

function P=mezcla(P,rad)
P(:,7)=P(:,7)-rad.^2;

```

```

function P=invertir(P)
P=P(size(P,2):-1:1);

```

```

function [guar s]=quitando(raiz)
guar=0;
s=1;
for k=1:size(raiz,1)
    if isreal(raiz(k))==1 & raiz(k)>0
        guar(s)=raiz(k);
        s=s+1;
    end
end
end
s=s-1;

```

```

function IDE=identidad(C,C1,t)
for j=1:size(C,1)-1
    raiz=roots([C(j,1)-C1(j,1) C(j,2)-C1(j,2) C(j,3)-C1(j,3) C(j,4)-C1(j,4)]);
    guar=raizcorrecta(raiz,t(j),t(j+1));
    if guar~=0
        IDE=polyval(C(j,:),guar);
        break
    end
end
end

```

```
function guar=raizcorrecta(raiz,ti,tf)
```

```
guar=0;
for k=1:size(raiz,1)
    if isreal(raiz(k))==1
        if ti<=raiz(k) & raiz(k)<=tf
            guar=raiz(k);
        end
    end
end
end
```

```
function cortar=cortes(rm,radmon,RADIDEN)
```

```
for i=1:rm-1
    if radmon(i)<=RADIDEN & RADIDEN<=radmon(i+1)
        cortar=i;
        break
    end
end
end
```

```
function [numper,sol,epsilon]=repeticion(rp,sol,radmon,radeva,rm,re)
```

```
clear xxx UB
for k=1:re
    posN=calculos(radeva(k),radmon,rp,rm);
    N(k,:)=posN;
end
[fil,col]=size(N);
z=[zeros(1,rm) zeros(1,re) 1];
UB=ones(1,size(z,2))*inf;
options=optimset('LargeScale','off','Simplex','on');
xxx=linprog(z,[zeros(fil,col) eye(re) -ones(re,1)],zeros(1,re),[N eye(re)
zeros(re,1)],sol,zeros(1,size(z,2)),UB);
numper=xxx(1:rm)';
epsilon=xxx(rm+1:end)';
```

```
function N=calculos(radeva,radmon,rp,rm)
```

```
for i=1:rm
    c=auxiliar(radeva,radmon(i),rp);
    N(i)=2*radeva*c;
end
end
```

```
function c=auxiliar(radeva,radmon,rp)
```

```
c=0;
ff=(radeva.^2+(radmon).^2-rp.^2)/(2*(radeva*radmon));
if abs(ff)<=1
    c=acos(ff);
end
end
```

```

function letreros(re,rm,numper,epsilon,rp,cortar,op)
s=1;
for j=1:size(rp,2)
    for i=1:rm
        if i<=cortar
            if op==1
                fprintf('\n %d perforaciones para el circulo y%d de radio %f ',floor( numper(s))*4,i,rp(j));
            else
                fprintf('\n %d postes para el circulo y%d de radio %f ',floor( numper(s))*4,i,rp(j));
            end
        else
            if op==1
                fprintf('\n %d postes para el circulo y%d de radio %f ',floor( numper(s))*4,i,rp(j));
            else
                fprintf('\n %d perforaciones para el circulo y%d de radio %f ',floor( numper(s))*4,i,rp(j));
            end
        end
        s=s+1;
    end
end

```

```

function N=calaux(radeva,radmon,rp,re,rm,numper)
clear N
for j=1:re
    for i=1:rm
        c=auxiliar(radeva(j),radmon(i),rp);
        posN(i)=2*numper(i)*radeva(j)*c;
    end
    N(j,:)=posN;
end

```

```

function N=calculando(radeva,radmon,rp,rm,A)
s=1;
for j=1:size(rp,2)
    for i=1:rm
        c=auxiliar(radeva,radmon(i),rp(j));
        N(s)=2*A(j,i)*radeva*c;
        s=s+1;
    end
end

```

REFERENCIAS

- [1] Jorge González García, Erika Vera Díaz, Agustín Santiago Alvarado, Abril Hernández Velasco, Alberto Cordero Dávila, *“Desarrollo de un Software para la simulación del pulido clásico”*, 3er Congreso Nacional de Computación, **1**, 183-187 (2005).
- [2] Jorge González García, Alberto Cordero Dávila y Ludwig Barcelos Mendoza, *“Diseño de nuevas formas de herramientas para obtener el desgaste deseado en el pulido clásico de superficies”*, in Program of the 48th Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **19**, 114 (2005).
- [3] Jorge González García, Erika Vera Díaz, Agustín Santiago Alvarado, Abril Hernández Velasco, Alberto Cordero Dávila, Irce Leal Cabrera, Carlos Ignacio Robledo Sánchez y Victor Hugo Cabrera Peláez, *“Simulación de desgastes en el pulido clásico y diseño de herramientas de pétalo utilizando algoritmos genéticos”*, in Program of the 48th Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **19**, 150-151 (2005).
- [4] Abril Hernández Velasco, *“Software de simulación de pulido de superficies ópticas utilizando el método clásico”*, UTM, Tesis Licenciatura, Asesores Dr. Jorge González García, M.C.C. Erika Vera Díaz y Dr. Agustín Santiago Alvarado (15 de Diciembre de 2005).
- [5] F. W. Preston, *“The theory and design of plate glass polishing machines”*, J. Soc. Glass Technol. **11**, 214-256 (1927).
- [6] L. S. Tsesnek *“Mechanics and Microphysics of Optical-Surface”*, Sov. J. Opt. Technol. **37**, 545-554 (1970).
- [7] A. Parra-Flores, A. Cordero-Dávila, J. Cuautle Cortés, C. Robledo Sánchez, J. González-García y V. Cabrera-Peláez, *“Simulación de desgastes en el pulido de superficies con la ecuación de Preston”*, in Program of the 46th Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **49**, 138 (2003).
- [8] I. Leal Cabrera, A. Cordero-Dávila, J. González-García, A. Santiago-Alvarado y V. Cabrera-Peláez, *“Aesferización de superficies ópticas usando herramientas sólidas pequeñas”*, in Program of the 47th Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **18**, 53 (2004).
- [9] O. D. Macías Bautista y A. Cordero-Dávila, *“Pulido de superficies convexas con herramientas de pétalo”*, in Program of the 47th Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **18**, 96-97 (2004).
- [10] Irce Leal Cabrera, Alberto Cordero Dávila y Jorge González García, *“Problema Inverso en el Pulido de Superficies Ópticas”*, in Program of the 48th Congreso Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **19**, 150 (2005).
- [11] A. Cordero-Dávila, V. Cabrera-Peláez, J. Cuautle-Cortés, J. González-García, C. Robledo-Sánchez y N. Bautista-Elivar, *“Experimental results and wear predictions of petal tools that freely rotate”*, Appl. Opt. **44**, 1434-1441 (2005).
- [12] Jorge González-García, Alberto Cordero-Dávila, Irce Leal-Cabrera, Carlos Ignacio Robledo-Sánchez y Agustín Santiago-Alvarado, *“Calculating petal tools using genetic algorithms”*, Appl. Opt. **45**, 6126-6136 (2006).
- [13] Jorge González-García, Alberto Cordero-Dávila, Irce Leal-Cabrera, Carlos Ignacio Robledo-Sánchez, Graciela Castro-González, Agustín Santiago-Alvarado y Liliana Jeanett Manzano-Sumano, *“Design of petal tools based on the dwell-times of annular tools to generate convex surfaces”*, in Program of the 49th Congreso

- Nacional de Física de la Sociedad Mexicana de Física, Bull. Soc. Mex. Fis. Suppl. **20**, 126 (2006).
- [14] E. W. Cheney, *“Introduction to Approximation Theory”*, Mc Graw-Hill Book Company, USA, pág. 3-27 (1966).
- [15] Robert G. Bartle y Donald R. Sherbert, *“Introducción al Análisis Matemático de una variable”*, 2da. Edición, Limusa Wiley, México 2004, pág. 44-71.
- [16] Kolmogorov A. N. y Fomin S. V., *“Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional”*, Editorial Mir, Moscú, 1975, pág. 152.
- [17] José Luis López Zapata, *“Análisis funcional para teoría de optimización”*, Facultad de Matemáticas de la Universidad Veracruzana, Tesis Licenciatura, Asesor Dr. José Rigoberto Gabriel Argüelles, (Septiembre 2001), pág. 24.
- [18] Shikin Eugene V. *“Handbook on Splines for the user ”*, USA, 1995.
- [19] Pablo Barrera Sánchez, Victoria Hernández Mederos y Claudia Durán Sánchez, *“El abc de los splines”*, Sociedad Matemática Mexicana, Aportaciones Matemáticas. 75, 83-115 (1996).
- [20] Mokhtar S. Bazaraa, John J. Jarvis y Hanif D. Sherali, *“Programación lineal y flujo en redes”*, Editorial Limusa, México 1998, 1-144.
- [21] Taha Hamdy A. *“Investigación de operaciones, una introducción”*, Prentice Hall. México 67-82.
- [22] <http://mathworld.wolfram.com/Root-Mean-Square.html>.

GLOSARIO DE TERMINOS

Definición. Un **métrico** en un conjunto S es una función $d : S \times S \rightarrow \mathfrak{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $d(x, y) \geq 0$ para toda $x, y \in S$;
- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;
- $d(x, y) = d(y, x)$ para toda $x, y \in S$;
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para toda $x, y, z \in S$.

Definición. Un **espacio métrico** (S, d) es un conjunto S junto con un métrico d en S .

Definición. Sea S un subconjunto de \mathfrak{R} .

- Se dice que un número $w \in \mathfrak{R}$ es una **cota inferior** de S si $w \leq s$ para toda $s \in S$.
- Si S está acotado por abajo, entonces se dice que una cota inferior w es un **ínfimo** (o una máxima cota inferior) de S si ningún número mayor que w es cota inferior de S .

Definición. Un conjunto S es **convexo** siempre que $x, y \in S$ y $\theta \in [0, 1]$, se tenga que $\theta x + (1 - \theta)y \in S$.

Definición. Una sucesión de intervalos I_n , $n \in \mathbb{N}$, donde \mathbb{N} es el conjunto de número naturales, está *anidada* si cumple la siguiente cadena de inclusiones

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

Definición. Una matriz A se llama tridiagonal si $a_{ij} = 0$ para toda i, j tal que $|i - j| > 1$. Esto es, todas las entradas de A son cero excepto posiblemente en las diagonales inferiores, superiores y principal, es decir:

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

Definición. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalmente dominante si:

$$|a_{i,i}| > |a_{i,1}| + |a_{i,2}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{i,n}| = \sum_{\substack{j=i \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}|$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.