



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Coeficiente de Deformación de la Convexidad Métrica de  
Curvas y Superficies en Teoremas tipo Korovkin

TESIS

Para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

Presenta

LETICIA FELIPE HERRERA

Director de Tesis

M.C. VULFRANO TOCHIHUITL BUENO

Huajuapán de León, Oaxaca. Septiembre, 2007

# Índice general

Dedicatoria	III
Introducción	IV
1. Conceptos básicos de teoría de aproximación	1
2. Curvas rectificables en espacios métricos	14
3. Aproximación de funciones por medio de operadores lineales	24
3.1. Métodos lineales de aproximación . . . . .	24
3.2. Teoremas tipo Korovkin . . . . .	26
3.3. Operadores de Bernstein . . . . .	26
4. Coeficiente de deformación de la convexidad métrica de curvas	35
5. Coeficiente de deformación de la convexidad métrica de superficies	44
5.1. Superficies simples o abiertas . . . . .	44
5.2. Superficies cerradas . . . . .	52
Conclusiones	55
Notación	57
Bibliografía	58

# Dedicatoria

*Dedico esta tesis en primer lugar a Dios y a mis padres. A Dios por permitirme vivir todo este tiempo y sobre todo por darme la fuerza necesaria para lograr mis objetivos.*

*A mis padres: Lázaro Felipe Gutiérrez y Aurelia Herrera Dávila por haberme apoyado en cada momento, por haber tenido confianza en mí y por que siempre han sido unos buenos padres que me han conducido al camino del bien a través de sus consejos y sobre todo por el gran esfuerzo que hicieron para que yo terminara mis estudios de licenciatura.*

*A mi hermano Jorge por brindarme su confianza y su apoyo económico sobre todo en los últimos años de la carrera.*

*A mis hermanas Anahi y Lucero para que sigan adelante con sus estudios y en el futuro sean mejores profesionistas que yo.*

*A mis amigas Juanita, Adriana, Bety, Liliana y Norma por haber compartido momentos agradables y difíciles conmigo durante la carrera.*

*A mis amigos y compañeros que siempre me escucharon y me dieron un buen consejo cuando lo necesitaba.*

*Un agradecimiento especial a mi asesor M.C. Vulfrano Tochiuitl Bueno por aceptarme como su tesista y sobre todo por su paciencia para la realización de esta tesis, por todos sus consejos, mil gracias.*

*A mis sinodales: M.C. José Margarito Hernández Morales y M.C. Tirso Miguel Ángel Ramírez Solano por haber revisado esta tesis y por sus comentarios para el mejoramiento de la misma.*

*A la M.C. Luz del Carmen Álvarez Marín por haber contribuido en la revisión de tesis. Gracias por sus sugerencias.*

*Al M.C. Juan Carlos Mendoza Santos por haberme apoyado tanto académicamente como moralmente a lo largo de la carrera.*

*A todos mis profesores que me enseñaron lo bonito de las matemáticas durante todo este tiempo, nunca los olvidaré.*

*Y por último a la Universidad Tecnológica de la Mixteca por haberme abierto las puertas para realizar mis estudios de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas.*

# Introducción

Como bien se puede concebir, la estética y la matemática no están completamente divorciadas en el ámbito de la teoría de aproximación. En general, la teoría de aproximación es una disciplina matemática sumamente amplia, cuyas fronteras se confunden, como es de esperarse, con los dominios de otras disciplinas. El punto de partida en esta teoría es el concepto de *mejor aproximación* que tiene cabida en un espacio métrico arbitrario. Definamos este importante concepto.

Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  y  $x \in X$ . Definimos y denotamos la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A$  mediante

$$E(x, A) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}.$$

De la definición, puede suceder que exista  $a_0 \in A$  tal que

$$E(x, A) = d(x, a_0);$$

en tal caso, a  $a_0$  le llamaremos un elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A$ .

Si para cada  $x \in X$  existe un elemento de la mejor aproximación sobre  $A$ , diremos que  $A$  es un conjunto de existencia del elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A$ . Si además este elemento es único, entonces diremos que  $A$  es un conjunto de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A$ .

En el primer capítulo de esta tesis, se analizan las condiciones necesarias y suficientes (sobre  $A$  o sobre  $X$ ) que garantizan la existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A$ .

No es de extrañarse, dadas las propiedades del ínfimo que: si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión creciente de subconjuntos de  $X$ , entonces  $E(x, A_n)$  es una sucesión decreciente de números reales. Nuestro interés se centra en la convergencia de  $E(x, A_n)$  hacia cero.

Para  $X$  espacio métrico normado y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión creciente de subespacios, figura el siguiente resultado

$$E(x, A_n) \downarrow 0 \text{ si y sólo si } \cup A_n \text{ es denso en } X.$$

Consideramos  $X$  un espacio métrico normado y  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de subespacios de  $X$ , que individualmente son conjuntos de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación. Luego para determinar la convergencia de  $E(x, A_n)$  hacia cero, debemos de una u otra forma encontrar el elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A_n$ , digamos  $a_n^0$  y calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, a_n^0)$ .

De las hipótesis sobre los  $A_n$ , podemos definir una sucesión de funciones

$$T_n : X \rightarrow X,$$

de tal manera que  $T_n(x)$  sea igual al elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A_n$ .

En la mayoría de las veces, encontrar  $T_n(x)$  es extremadamente complicado, por fortuna, en algunas ocasiones podemos encontrar una sucesión de operadores lineales  $L_n : X \rightarrow X$  tal que  $\|L_n(x) - T_n(x)\| \rightarrow 0$ . Si este es el caso, tenemos que

$$E(x, A_n) \rightarrow 0 \text{ si y sólo si } \|L_n(x) - x\| \rightarrow 0.$$

Resumiendo,  $L_n(x)$  no necesariamente es igual al elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $A_n$ , pero es un elemento cercano y quizás susceptible de ser calculado. En tal caso,  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se llama *proceso (método) lineal de aproximación*.

En 1953 el ruso P.P. Korovkin estableció un teorema que con el tiempo se haría célebre. Su simplicidad y al mismo tiempo su poder ha despertado el interés de muchos matemáticos. Se trata de un criterio que permite decidir si dada una sucesión de operadores lineales y positivos  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definidos en  $X = C_{[a,b]}$  con la norma uniforme, se verifica que  $L_n(f)$  converge uniformemente a  $f$  en  $[a, b]$  para toda función  $f \in X$ . Tal resultado es el siguiente.

**Teorema (de Korovkin).** Sea  $L_n : C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}$  una sucesión de operadores lineales y positivos. Entonces  $L_n(f)$  converge uniformemente a  $f$  si y sólo si se observa la convergencia en las tres funciones de prueba  $c_0(x) = 1$ ,  $c_1(x) = x$  y  $c_2(x) = x^2$ . Si en calidad de  $C_{[a,b]}$  se sustituye por  $C_{2\pi}$ , se toma en calidad de funciones de prueba a  $c_0(x) = 1$ ,  $c_1(x) = \cos x$  y  $c_2(x) = \sin x$ .

Como se puede observar, el teorema de Korovkin es de tipo cualitativo, es decir, se asegura la convergencia de  $L_n(f)$  a  $f$  sin medir el orden (velocidad) de convergencia. Un teorema en el cual se ponga de manifiesto la velocidad de convergencia de  $L_n(f)$  a  $f$ , se llama teorema cuantitativo de tipo Korovkin.

La parte cuantitativa al teorema de Korovkin fue iniciada por Mamedov en 1959 y continuada por Freud en 1968. Shisha y Mond publican en 1968 los resultados de Mamedov en cierta forma más general (pero siempre en  $C_{[a,b]}$  o  $C_{2\pi}$ ). En 1971, Censor extiende tales resultados al espacio  $C_A$  con  $A$  compacto y convexo de  $\mathbb{R}^m$  con las funciones de prueba  $1, x_i, x_i^2$  (las funciones coordenadas)  $i = 1, 2, \dots, m$ . Es decir, conociendo la velocidad de convergencia de  $L_n(x_i^j)$  hacia  $x_i^j$ ;  $j = 0, 1, 2$ , se estima la velocidad de convergencia de  $L_n(f)$  a  $f$ .

Del teorema de Korovkin y los resultados desde Mamedov hasta Censor, surgen varias interrogantes: ¿existen otras funciones de prueba?, ¿cuál es el número mínimo de funciones de prueba?, ¿se puede demostrar un tal teorema para otra clase de operadores, otros espacios?, etc. El conjunto de estos resultados que dan respuesta a las preguntas formuladas es a lo que se ha denominado *Teoremas tipo Korovkin*.

Retornando, si bien es cierto que Censor generaliza los resultados de Shisha y Mond, en sus resultados trabaja con las funciones de prueba  $1, x_i, x_i^2$  (las funciones coordenadas).

La manera de obtener teoremas cuantitativos con estas y otras funciones de prueba fue logrado por Miguel Antonio Jiménez Pozo en 1974. Para lograr su objetivo, cambia la métrica del espacio de la manera siguiente: si  $d$  es la métrica original sobre  $A$  y  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  un conjunto de funciones reales y separantes, define para cada  $x, y \in A$

$$d_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(y))^2},$$

y demuestra que  $(A, d)$  y  $(A, d_F)$  son homeomorfos, con lo cual  $C_{(A,d)}$  y  $C_{(A,d_F)}$  coinciden. Entonces trabaja el problema con esta nueva función distancia.

Si bien es cierto que con Jiménez se resuelve el problema de trabajar con otras funciones de prueba, en sus resultados cuantitativos, como en los de Mamedov hasta Censor, la parte fundamental son las propiedades de la función módulo de continuidad  $w(f, \cdot)$  asociada a toda función real o compleja definida sobre un espacio métrico.

Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y  $f$  una función real o compleja definida sobre  $X \subseteq \mathbb{R}^m$ , la función módulo de continuidad asociada a  $f$  es  $w(f, \cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$w(f, \alpha) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ d(x, y) \leq \alpha}} |f(x) - f(y)|$$

para  $\alpha > 0$ . Se define  $w(f, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} w(f, \alpha)$ .

Las propiedades fundamentales del módulo de continuidad utilizadas en los teoremas cuantitativos de tipo Korovkin, desde Mamedov hasta Jiménez son

- 1)  $w(f, \cdot)$  es creciente.
- 2)  $w(f, n\alpha) \leq nw(f, \alpha)$ .
- 3)  $w(f, \lambda\alpha) \leq [\lambda + 1]w(f, \alpha)$ .

La propiedad 1) es fácil de demostrar al concebir las propiedades del supremo; las propiedades 2) y 3) se deben a que para  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe  $z \in X$  tal que  $z \neq x, z \neq y$  y  $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ .

Luego, un espacio métrico  $(X, d)$  se llamará métricamente convexo si para todo  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe  $z \in X - \{x, y\}$  tal que  $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ . Claro que todo subconjunto convexo de un normado es métricamente convexo, pero aún en espacios normados, no todo subconjunto (subespacio) métricamente convexo es convexo en el sentido usual.

Resumiendo, las propiedades del módulo de continuidad enunciadas anteriormente se satisfacen en un espacio métricamente convexo y si bien con esta definición se alcanza un alto grado de generalidad, ello no modifica la situación de  $\mathbb{R}^m$ , en donde se observa que convexo y métricamente convexo son conceptos equivalentes. Para generalizar los resultados de tipo Korovkin en espacios no convexos o no métricamente convexos Jiménez Pozo introdujo un número positivo o infinito  $\rho(X)$  asociado a todo espacio métrico no vacío, al cual denominó coeficiente de deformación de la convexidad métrica, cuya definición es la siguiente:

Sea  $(X, d)$  un espacio métrico arco-conexo no vacío. El coeficiente de deformación de la convexidad métrica se denota y se define mediante

$$\rho(X) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \inf_{\Gamma_{xy} \in \mathcal{C}_{xy}} \frac{\ell(\Gamma_{xy})}{d(x, y)}$$

donde el supremo se toma sobre todos los  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  y el ínfimo se toma sobre todas las curvas que conectan a  $x$  con  $y$ , y  $\ell(\Gamma_{xy})$  es la longitud de la curva  $\Gamma_{xy}$ .

Con esta definición Jiménez Pozo demuestra que si  $(X, d)$  es arco-conexo, compacto y no vacío, entonces  $X$  es métricamente convexo si y sólo si  $\rho(X) = 1$ . También establece que si  $\rho(X) < \infty$ , entonces

$$w(f, \lambda\alpha) \leq [\rho(X) \lambda + 1]w(f, \alpha),$$

el cual utiliza para demostrar un teorema cuantitativo preciso de tipo Korovkin.

Como la definición de  $\rho(X)$  está dada por ínfimos, supremos y longitud de arco, es menester nuestro hacer un análisis del concepto y propiedades de curva y longitud de arco en un espacio métrico en general como se verá en el capítulo 2.

En el capítulo 3 se comenta la importancia de utilizar procesos lineales de aproximación, se enuncian algunos teoremas de tipo Korovkin haciendo comentarios acerca de ellos, también se hace mención del teorema cuantitativo tipo Korovkin de Jiménez.

Y finalmente en los capítulos 4 y 5 se obtienen las condiciones suficientes bajo las cuales se asegura que el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de curvas y superficies es finito para poder aplicarlo al teorema cuantitativo de Jiménez Pozo.

# Capítulo 1

## Conceptos básicos de teoría de aproximación

En este capítulo se definen varios conceptos de teoría de aproximación, entre ellos el más importante el concepto de mejor aproximación en un espacio métrico no vacío. Además se analizan las condiciones necesarias y suficientes sobre un espacio métrico  $X$  para garantizar la existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación.

Comencemos mencionando algunos problemas de teoría de aproximación.

1. Determinar un polinomio  $p$  de grado mínimo tal que en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  se cumpla

$$|p(x) - \operatorname{sen} x| \leq 10^{-5}.$$

2. De manera más general, dada una función  $f$  y un número positivo  $\epsilon$ , determinar un polinomio  $p$  tal que  $|p(x) - f(x)| \leq \epsilon$ , en algún intervalo dado  $[a, b]$ .
3. Determinar un polinomio  $p$  de grado menor o igual a 7, tal que en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  se cumpla  $|p(x) - \operatorname{sen} x| \leq \epsilon \operatorname{sen} x$ , con un  $\epsilon$  mínimo.
4. Determinar dos polinomios  $p$  y  $q$  cuya suma de grados sea mínima, tal que en el intervalo  $[0, 1]$  se cumpla

$$\left| \frac{p(x)}{q(x)} - \arctan x \right| \leq 10^{-15}.$$

5. Determinar un vector  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , el cual sea una solución de mejor aproximación, en el sentido de mínimos cuadrados, a un sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, m.$$

Esto es, determinar  $x$  que minimice la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right)^2.$$

6. Como una variante de (5), se requiere que  $x$  minimice la expresión

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i \right|.$$

7. Otra variante de (2), requiere que  $\int_a^b |p(x) - f(x)|^2 dx < \epsilon$ .

Muchas preguntas más profundas de interés matemático surgen de manera natural de los problemas mencionados. Por ejemplo: ¿puede encontrarse siempre un polinomio para resolver el problema (1)?, ¿cuál es exactamente la clase de funciones  $f$  para las cuales el problema (2) puede ser siempre resuelto? Para una función fija  $f$  en el problema (2), ¿cómo crece el grado del polinomio cuando  $\epsilon$  tiende a cero?, ¿qué relación existe entre los polinomios que resuelven los problemas (2) y (3)?, ¿otras familias de funciones poseen las ventajas de los polinomios para los propósitos de aproximación? Estas preguntas teóricas pueden ser resueltas mediante la teoría de aproximación.

Un ejemplo simple de un problema de aproximación consiste en dibujar una línea recta que se ajuste mejor a la curva dada en la figura 1.1.

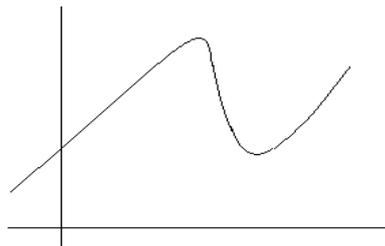


Figura 1.1: Una función para ser aproximada.

Alternativamente se requiere una línea recta que ajuste los datos mostrados en la figura 1.2.

Existen tres posibles ajustes para dichos datos, los cuales se pueden observar en la figura 1.3.

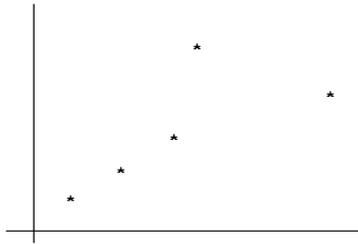


Figura 1.2: Algunos datos para ser aproximados.

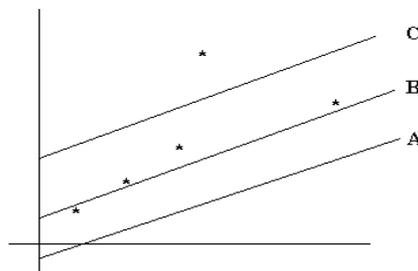


Figura 1.3: Líneas ajustadas a los datos.

Las líneas  $B$  y  $C$  se ajustan mejor a los datos que la línea  $A$ . Este ejemplo muestra que los tres principales ingredientes de un cálculo de aproximación son los siguientes:

1. Una función, algunos datos, o de manera más general, un miembro de un conjunto para ser aproximado.
2. Un conjunto de aproximaciones.
3. Una forma de seleccionar la mejor aproximación.

**Definición 1.1.** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \neq B \subseteq X$  y  $x \in X$ . Se define y se denota la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$  de la siguiente manera

$$E(x, B) := \inf \{d(x, b) : b \in B\}.$$

**Definición 1.2.** Se dice que  $b^* \in B$  es un elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$  si se cumple la siguiente condición:

$$E(x, B) = d(x, b^*).$$

Obsérvese el empleo del artículo *un* en la definición; puesto que más adelante tendremos la oportunidad de ver que puede haber dos elementos de mejor aproximación.

**Ejemplo 1.1.** Sea  $X$  el conjunto de todos los números reales y  $B$  el intervalo abierto  $(a, b)$ . Supongamos que  $x \notin B$ . Por definición

$$E(x, B) = \inf \{d(x, b) : b \in B\}.$$

Si  $x \leq a$ ,  $E(x, B) = |x - a|$ . No existe  $z \in B$  tal que  $|x - z| = E(x, B) = |x - a|$ , por lo tanto no existe el elemento de la mejor aproximación. De manera análoga se verifica para los  $x \geq b$ .

**Ejemplo 1.2.** Sea  $X$  el conjunto de todos los números reales y  $B$  el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Supongamos que  $x \notin B$ . Por definición

$$E(x, B) = \inf \{d(x, b) : b \in B\}.$$

Si  $x < a$ ,  $E(x, B) = |x - a|$ . Existe  $z \in B$  tal que  $|x - z| = E(x, B) = |x - a|$ , por lo tanto existe el elemento de la mejor aproximación. De igual manera se puede observar para los  $x > b$ .

**Ejemplo 1.3.** Sea  $X$  el espacio euclideo  $\mathbb{R}^2$  y  $B$  el conjunto de puntos que están estrictamente adentro del círculo unitario. No hay elementos de la mejor aproximación de cualquier punto de  $\mathbb{R}^2$  que esté fuera o en el círculo unitario hacia el conjunto  $B$ .

**Ejemplo 1.4.** Sea  $X = \mathbb{R}^2$  con la métrica usual y  $B = \{b \in \mathbb{R}^2 : \|b\| = 1\}$ . Sea  $x = (0, 0)$ , entonces cualquier elemento  $b \in B$  es elemento de mejor aproximación de  $x$  hacia  $B$ .

De los ejemplos citados y como parte de los problemas que enfrenta la teoría de aproximación, es conveniente, analizar los siguientes puntos:

1. Determinar si existe un elemento de la mejor aproximación. Si para cada  $x \in X$  existe un elemento de mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ , entonces se dice que  $B$  es un conjunto de existencia.
2. Determinar si el elemento de la mejor aproximación (en caso de que exista) es único. Si en  $B$  ocurre que este elemento es siempre único en función de  $x$ , se dice que  $B$  es un conjunto de unicidad. Los conjuntos más interesantes son los conjuntos de existencia y unicidad.

3. Caracterizar de alguna manera los elementos de mejor aproximación.

En la práctica, los casos más frecuentes y estudiados, son aquellos en los cuales  $X$  es un espacio de funciones y  $B$  son los conjuntos de polinomios  $\wp_n$ , de fracciones racionales  $\mathfrak{R}_n$  o de funciones splines  $S_n$ .

Luego, es menester nuestro, dar condiciones suficientes que garanticen la existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación. Comencemos con la siguiente definición, la cual es una condición importante para cuestiones de existencia.

**Definición 1.3.** Un subconjunto  $K$  de un espacio métrico  $X$  es compacto si toda sucesión de puntos en  $K$  tiene una subsucesión convergente a un punto de  $K$ .

El siguiente teorema muestra la existencia del elemento de la mejor aproximación.

**Teorema 1.1.** (*Existencia del elemento de la mejor aproximación*) Si  $B$  es un conjunto compacto en un espacio métrico  $X$ , entonces para todo  $x \in X$  existe un elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ .

*Demostración.* Sea  $\delta = \inf \{d(x, b) : b \in B\}$ . De la definición de ínfimo, podemos encontrar una sucesión de puntos  $b_1, b_2, b_3, \dots$  en  $B$  con la siguiente propiedad

$$d(x, b_n) \rightarrow \delta \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por la compacidad de  $B$ , podemos suponer que  $b_n$  converge a un punto  $b^*$  de  $B$ . Afirmamos que  $b^*$  es un elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ . En efecto, por la desigualdad del triángulo para la métrica se tiene:

$$d(x, b^*) \leq d(x, b_n) + d(b_n, b^*).$$

El miembro izquierdo de esta desigualdad es independiente de  $n$ , y el miembro derecho se aproxima a  $\delta$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $d(x, b^*) \leq \delta$ . Por otra parte, como  $b^* \in B$ ,  $d(x, b^*) \geq \delta$ . Luego  $d(x, b^*) = \delta$ , es decir,  $b^*$  es un elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ .  $\square$

En el teorema anterior se puede observar que la condición de compacidad es de suma importancia para probar la existencia del elemento de la mejor aproximación.

Cuando  $B$  no es compacto los ejemplos 1.1 y 1.3 muestran que el elemento de la mejor aproximación puede no existir.

Otro de los resultados que pone de manifiesto la existencia de un elemento de la mejor aproximación es:

**Teorema 1.2.** (*Existencia del elemento de la mejor aproximación*) *Todo subespacio lineal  $B$  de dimensión finita de un espacio lineal normado  $X$  es un conjunto de existencia del elemento de la mejor aproximación.*

*Demostración.* Sea  $f \in X$  arbitrario. Por definición de la mejor aproximación de  $f$  sobre  $B$ , se tiene

$$E(f, B) = \inf \{ \|f - b\| : b \in B \}.$$

También se cumple que  $E(f, B) \leq \|f - b\|$  para todo  $b \in B$ . Si  $f \in B$  nada hay que probar.

Supongamos que  $f \notin B$ . Sea  $K = \{g \in B : \|g - f\| \leq \|f\|\}$ , como se puede observar en la figura 1.4. Se tiene que  $K$  es compacto pues es un conjunto cerrado y acotado en un espacio de dimensión finita.

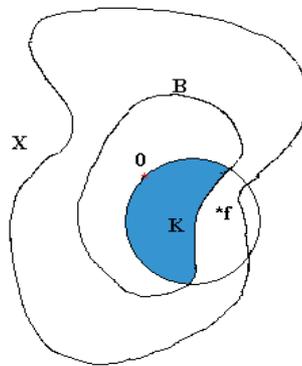


Figura 1.4: El conjunto  $K$  es compacto.

Por el teorema 1.1, se asegura la existencia de un elemento de la mejor aproximación de  $f$  sobre  $K$ , es decir, existe  $g \in K \subseteq B$  tal que se cumple la siguiente igualdad

$$E(f, K) = \|f - g\|.$$

Sea  $h \in B$ , entonces,

(a) Si  $h \in K$ ,  $\|f - g\| = E(f, K) \leq \|f - h\|$ .

(b) Si  $h \notin K$ ,  $\|f - h\| > \|f\| \geq \|f - z\|$  para toda  $z \in K$ .

$$\|f - h\| > \|f - g\| = E(f, K), \text{ para el } g \in K \text{ seleccionado.}$$

Así,  $E(f, K) \leq \|f - h\|$  para toda  $h \in B$ .

$$E(f, K) \leq E(f, B)$$

$$E(f, B) \leq d(f, g) = E(f, K) \leq E(f, B).$$

Por lo tanto

$$E(f, B) = E(f, K) = \|f - g\|, \quad g \in B.$$

□

De este teorema surge una pregunta natural. ¿Es realmente necesaria la hipótesis de que el subespacio sea de dimensión finita?

La importancia de dicha hipótesis se puede observar en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 1.5.** Consideremos el espacio  $(c_0)$  de sucesiones infinitas  $b = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  tales que  $\xi_n \rightarrow 0$ . Con la norma  $\|b\| = \max |\xi_n|$ , esto llega a ser un espacio de Banach. En el espacio  $(c_0)$ , el subespacio  $B$  de puntos  $b$  para los cuales

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \xi_k = 0,$$

no contiene el elemento de la mejor aproximación hacia algún punto externo.

*Demostración.* Sea  $x = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  algún punto de  $(c_0)$  el cual no está en  $B$ . Entonces el número

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \eta_k \neq 0.$$

Probaremos primero que la distancia de  $x$  a  $B$  es menor o igual que  $|\lambda|$ . En efecto, los siguientes puntos pertenecen a  $B$

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{2}{1}(\lambda, 0, 0, \dots) + x \\ b_2 &= -\frac{4}{3}(\lambda, \lambda, 0, 0, \dots) + x \\ b_3 &= -\frac{8}{7}(\lambda, \lambda, \lambda, 0, 0, \dots) + x, \text{ etc.} \end{aligned}$$

como puede ser fácilmente verificado.

$$\|b_n - x\| = \left[ \frac{2^n}{2^n - 1} \right] |\lambda| \rightarrow |\lambda|.$$

Ahora probaremos que ningún punto de  $x$  hacia  $B$  tiene distancia menor o igual que  $|\lambda|$ .

Si  $b = (\xi_1, \xi_2, \dots)$  es un punto arbitrario de  $B$ , elijamos  $n$  tal que

$$|\xi_k - \eta_k| < \frac{1}{2} |\lambda|$$

siempre que  $k \geq n$ . Esto es posible, ya que los elementos de  $(c_0)$  son sucesiones convergentes a cero. Supongamos que

$$\|x - b\| \leq |\lambda|.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left| \sum 2^{-k} \eta_k \right| &= \left| \sum 2^{-k} (\eta_k - \xi_k) \right| \leq \sum 2^{-k} |\eta_k - \xi_k| \\ &\leq |\lambda| \sum_{k < n} 2^{-k} + \frac{1}{2} |\lambda| \sum_{k \geq n} 2^{-k} < |\lambda|, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. □

**Ejemplo 1.6.** Sea  $X = C[0, \frac{1}{2}]$ . Consideremos  $\|f\| =$  norma uniforme.  $A = \{p(x) \in X : p(x) \text{ es un polinomio}\}$ . Claramente  $\dim A = \infty$ . Sea  $f(x) = \frac{1}{1-x} \in X$ . Supóngase que  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$  es un elemento de mejor aproximación de  $f$  sobre  $A$ .

$$E(f, A) = \|f - g\| \leq \|f - h\| \text{ para cada } h \in A.$$

Sea  $h_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ .  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ ; luego, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $N_n \in \mathbb{N}$  tal que  $\|f - h_{N_n}\| < \frac{1}{n}$ . Esto indica que  $\|f - g\| = 0$  y  $f = g$ , lo cual no puede ser, por lo tanto, no existe elemento de la mejor aproximación de  $f$  sobre  $A$ .

El elemento de la mejor aproximación con respecto a una función distancia apropiada puede ser conveniente, pero algunas veces pueden existir varios elementos de la mejor aproximación.

En general el punto cuya existencia es garantizada por el teorema 1.1 no es único. Es fácil dar un ejemplo en  $\mathbb{R}^2$  donde ocurre tal hecho. En efecto, si usamos la norma

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}, \text{ donde } x = (x_1, x_2)$$

y consideramos  $B$  el subespacio de puntos de la forma  $(x_1, 0)$  y  $x$  el punto  $(0, 1)$ , entonces la distancia de  $x$  a  $B$  es 1 y es la misma distancia que se obtiene tomando cualquier punto de la forma  $(x^*, 0)$  con  $|x^*| \leq 1$ .

En este ejemplo, el espacio normado es tal que en su bola unitaria  $\bar{B}(0, 1)$  existen  $f, g \in \bar{B}(0, 1)$  con  $\|f\| = \|g\| = 1$ ,  $\|\frac{f+g}{2}\| = 1$  y  $f \neq g$ .

Este ejemplo sugiere que la curvatura de la esfera unitaria tiene relación con la unicidad.

**Definición 1.4.** Un subconjunto  $X$  de un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  es convexo si para todo  $x, y \in X$  se cumple

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in X, \text{ para } \alpha \in [0, 1].$$

**Ejemplo 1.7.** Sea el espacio  $X$  un espacio Hilbert y  $A$  convexo, cerrado y no vacío. Por el teorema de la norma mínima se asegura la existencia de un elemento  $x \in A$  y sólo uno tal que  $\|x\| = \min\{\|y\| : y \in A\}$ .

Resulta entonces que  $A$  es conjunto de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación, pues si  $f \in X$ , el conjunto  $f - A = \{f - a : a \in A\}$  es también convexo, cerrado y no vacío.

De los ejemplos anteriores resulta lógico buscar criterios para la existencia y unicidad en espacios normados cuyas bolas unitarias tengan una estructura geométrica que en algo se parezca a la de la bola unitaria de los Hilbertianos. Esto da pauta a la siguiente definición.

**Definición 1.5.** Un espacio normado  $X$ , se llamará estrictamente convexo si y sólo si la combinación convexa de  $f$  y  $g$  sobre la esfera unitaria (es decir,  $\|f\| = \|g\| = 1$ ), tiene norma menor que 1 (a menos que sean iguales).

Como ejemplos de espacios estrictamente convexos, podemos mencionar a  $\mathbb{R}^n$  con la norma usual y a todos los espacios  $L^p(\mu)$ ,  $1 < p < \infty$ , donde  $\mu$  es una medida positiva.

$L^1(\mu)$  y  $L^\infty(\mu)$  no son estrictamente convexos, excepto para medidas muy sencillas como la delta de Dirac.

Otra característica que se le puede pedir a un espacio normado es la convexidad uniforme, la cual se dá en la siguiente definición.

**Definición 1.6.** Un espacio lineal normado es uniformemente convexo si para cada  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$ , tal que  $\|f - g\| < \epsilon$  siempre que  $\|f\| = \|g\| = 1$  y  $\|\frac{1}{2}(f + g)\| > 1 - \delta$ .

Como ejemplos citamos nuevamente todos los  $\mathbb{R}^n$  con la norma usual y en general, cualquier espacio normado tal que la norma cumpla con la ley del paralelogramo

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2.$$

Luego, dado el  $\epsilon > 0$ , basta tomar  $\delta = \frac{2 - \sqrt{4 - \epsilon^2}}{2}$ .

**Teorema 1.3.** (*Unicidad del elemento de la mejor aproximación*) Sea  $B$  un conjunto compacto y convexo en un espacio lineal normado  $X$  estrictamente convexo. Entonces para cada  $x \in X$ , existe un único elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ .

*Demostración.* El teorema 1.1 muestra la existencia del elemento de la mejor aproximación. Se probará la unicidad. Sea  $x \in X$  y  $b_1, b_2$  dos elementos de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ . Por definición del elemento de la mejor aproximación se tiene

$$\|x - b_1\| = d(x, b_1) = E(x, B) = d(x, b_2) = \|x - b_2\|.$$

Si  $E(x, B) = 0$  nada hay que probar, inmediatamente se tiene que  $b_1 = b_2$ .

Supongamos que  $E(x, B) \neq 0$ . Definamos

$$f = \frac{x - b_1}{E(x, B)} \text{ y } g = \frac{x - b_2}{E(x, B)}$$

claramente se observa que  $\|f\| = \|g\| = 1$ . Sabemos que

$$\|x - b_1\| + \|x - b_2\| = 2E(x, B),$$

de donde

$$\frac{1}{2} \|x - b_1\| + \frac{1}{2} \|x - b_2\| = E(x, B).$$

Ahora, por la desigualdad del triángulo para normas, se cumple lo siguiente:

$$\left\| x - \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \right\| \leq \frac{1}{2} \|x - b_1\| + \frac{1}{2} \|x - b_2\| = E(x, B).$$

Por otra parte, como  $\frac{1}{2}(b_1 + b_2) \in B$  por ser  $B$  convexo, se tiene

$$E(x, B) \leq \left\| x - \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \right\|.$$

Por lo tanto

$$E(x, B) = \left\| x - \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \right\|,$$

es decir,

$$1 = \left\| \frac{1}{2} \frac{(x - b_1)}{E(x, B)} + \frac{1}{2} \frac{(x - b_2)}{E(x, B)} \right\| = \left\| \frac{1}{2} (f + g) \right\|.$$

Como el espacio en el que se está trabajando es estrictamente convexo;  $f = g$  y en consecuencia  $b_1 = b_2$ .  $\square$

**Teorema 1.4.** (*Unicidad del elemento de la mejor aproximación*) *Todo subespacio lineal  $B$  de dimensión finita de un espacio  $X$  estrictamente convexo es conjunto de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación.*

*Demostración.* Por el teorema 1.2 todo subespacio de dimensión finita es conjunto de existencia. Sean ahora  $b_1, b_2 \in B$  tales que:

$$\|x - b_1\| = E(x, B) = \|x - b_2\|.$$

Si  $E(x, B) = 0$ , no hay nada que probar, inmediatamente se tiene que  $x = b_1 = b_2$ . Por otra parte si  $E(x, B) \neq 0$ , nuevamente se tiene que  $\left\| x - \frac{b_1 + b_2}{2} \right\| = E(x, B)$ . Si definimos  $X = \frac{x - b_1}{E(x, B)}$  y  $Y = \frac{x - b_2}{E(x, B)}$  tenemos lo siguiente

$$\left\| \frac{1}{2}(X + Y) \right\| = 1$$

lo cual implica que  $X = Y$  y en consecuencia  $b_1 = b_2$ . Por lo tanto el elemento de la mejor aproximación es único.  $\square$

**Teorema 1.5.** *Todo conjunto cerrado y convexo en un espacio uniformemente convexo de Banach es conjunto de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación.*

*Demostración.* Sea pues  $C$  un conjunto cerrado y convexo en un espacio uniformemente convexo de Banach. Luego para cualquier  $f$  en el espacio, el conjunto  $\frac{f}{r} - \frac{C}{r}$  es convexo y cerrado para cualquier  $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

Sea  $f$  en el espacio y  $s = E(f, C)$ . Si  $s = 0$ , entonces existe una sucesión en  $f - C$ ,  $\{f - f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que  $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Pero esto indica que  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ . Por la cerradura de  $C$ ,  $f \in C$ .

Supongamos ahora que  $s \neq 0$ . Luego

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{E(f, C)}{s} = \frac{1}{s} \inf \{ \|f - g\| : g \in C \} \\ &= \inf \left\{ \left\| \frac{f}{s} - \frac{g}{s} \right\| : g \in C \right\}. \end{aligned}$$

Luego, existe una sucesión  $\left\{ \frac{f}{s} - \frac{f_n}{s} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\frac{f}{s} - \frac{C}{s}$  tal que

$$\left\| \frac{f}{s} - \frac{f_n}{s} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Dado  $\epsilon > 0$ . Sea  $\delta > 0$  tal que  $\|l - k\| < \epsilon$  siempre que  $\|l\| = \|k\| = 1$  y  $\left\| \frac{1}{2}(l + k) \right\| > 1 - \delta$ . Si definimos  $g_n = \frac{f}{s} - \frac{f_n}{s}$ . Para el  $\delta > 0$  (anterior) existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\|g_n\| - 1 < \delta$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \geq N$ . Como  $s \neq 0$ ,  $\|g_n\| \neq 0$ . Sea  $\lambda_n = \|g_n\|^{-1}$ , entonces para  $n, m \geq N$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\lambda_n g_n + \lambda_m g_m\| &= \frac{1}{2} \|(g_n + g_m) - [(1 - \lambda_n)g_n + (1 - \lambda_m)g_m]\| \\ &\geq \frac{1}{2} [\|g_n + g_m\| - \|(1 - \lambda_n)g_n + (1 - \lambda_m)g_m\|] \\ &\geq \frac{1}{2} \|g_n + g_m\| - \frac{1}{2}(1 - \lambda_n) \|g_n\| - \frac{1}{2}(1 - \lambda_m) \|g_m\| \\ &> 1 - \delta, \end{aligned}$$

pues  $\frac{1}{2} \|g_n + g_m\| \geq 1$  y  $-\frac{1}{2}(1 - \lambda_n) \|g_n\| > -\frac{\delta}{2}$ .

Luego  $\|\lambda_n g_n - \lambda_m g_m\| < \epsilon$ , es decir,  $\lambda_n g_n$  es de Cauchy. Por la completitud del espacio,  $\lambda_n g_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g^*$ . Además

$$0 \leq \|g_n - g^*\| \leq \|g_n - \lambda_n g_n\| + \|\lambda_n g_n - g^*\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$g_n \rightarrow g^*$  por la cerradura de  $\frac{1}{s}f - \frac{C}{s}$ ,  $g^* \in \frac{f}{s} - \frac{C}{s}$ . Como  $\|\lambda_n g_n\| = 1$ , entonces  $\|g^*\| = 1$ . Esto implica que  $1 = \frac{1}{s} \|f - g\|$  para algún  $g \in C$ . Luego  $C$  es de existencia.

Para probar la unicidad supongamos que  $s = E(f, C) \neq 0$ .

$$\left\| \frac{f - g_1}{E(f, C)} \right\| = \left\| \frac{f - g_2}{E(f, C)} \right\| = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 &= E\left(\frac{f}{s}, \frac{C}{s}\right) = \frac{1}{2} \frac{\|f - g_1\|}{s} + \frac{1}{2} \frac{\|f - g_2\|}{s} \\ &\geq \frac{1}{s} \left\| f - \frac{g_1 + g_2}{2} \right\| \geq \frac{s}{s} = 1. \end{aligned}$$

De donde

$$\left\| \frac{1}{2} \left( \frac{f}{s} - \frac{g_1}{s} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{f}{s} - \frac{g_2}{s} \right) \right\| = 1 > 1 - \delta,$$

para todo  $\delta > 0$ . Obteniéndose así

$$\left\| \frac{1}{2} \left( \frac{f}{s} - \frac{g_2}{s} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{f}{s} - \frac{g_1}{s} \right) \right\| < \epsilon,$$

para todo  $\epsilon > 0$ , lo cual implica que  $g_1 = g_2$ .  $\square$

**Teorema 1.6.** *Todo espacio lineal normado  $X$  uniformemente convexo es estrictamente convexo.*

*Demostración.* Sean  $f, g \in X$  tales que  $\|f\| = \|g\| = \left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\| = 1$ . Claramente

$$\left\| \frac{1}{2}(f + g) \right\| = 1 > 1 - \delta \text{ para todo } \delta > 0.$$

Dado que  $X$  es uniformemente convexo se tiene

$$\|f - g\| < \epsilon, \text{ para cualquier } \epsilon > 0.$$

Por lo tanto  $f = g$ .  $\square$

**Teorema 1.7.** *Todo espacio  $X$  de dimensión finita estrictamente convexo es uniformemente convexo.*

*Demostración.* Sea  $\epsilon > 0$  y  $S$  el conjunto de pares  $(f, g)$  tales que

$$\|f\| = \|g\| = 1 \text{ y } \|f - g\| \geq \epsilon.$$

$S$  es un conjunto cerrado y acotado y como está en un espacio de dimensión finita se tiene que  $S$  es compacto. Por otra parte

$$1 - \frac{1}{2} \|f + g\|,$$

es continua y positiva por la convexidad estricta de  $X$ . Luego este conjunto tiene un ínfimo, el cual denotaremos por  $\delta$ . Así, para las parejas  $(f, g)$  con

$$\|f\| = \|g\| = 1,$$

se cumple

$$\|f - g\| \geq \epsilon \implies 1 - \frac{1}{2} \|f + g\| \geq \delta,$$

o bien

$$\|f - g\| \geq \epsilon \implies \frac{1}{2} \|f + g\| \leq 1 - \delta,$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{1}{2} \|f + g\| > 1 - \delta \implies \|f - g\| < \epsilon.$$

Por lo tanto  $X$  es uniformemente convexo. □

**Teorema 1.8.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subseteq X$  compacto tal que  $K$  es conjunto de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación. Entonces la función  $T : X \rightarrow X$  tal que  $T(x)$  es igual al elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $K$  es continua.*

*Demostración.* Recordar que una función  $h : Z \rightarrow Y$  entre espacios métricos es continua en  $x$  si y sólo si  $h(x_n) \rightarrow h(x)$  para cada sucesión  $(x_n)$  en  $Z$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

Sea pues  $x \in X$  arbitrario y  $(x_n)$  una sucesión en  $X$  con  $x_n \rightarrow x$ . Entonces  $(T(x_n))$  es una sucesión en  $K$ . Por la compacidad de  $K$  podemos suponer que  $T(x_n) \rightarrow g \in K$ .

$$\begin{aligned} d(x, g) &\leq d(x, T(x_n)) + d(T(x_n), g) \\ &\leq d(x, x_n) + d(x_n, T(x_n)) + d(T(x_n), g). \\ d(x_n, T(x_n)) &\leq d(x_n, T(x)) \leq d(x, T(x)) + d(x, x_n). \\ d(x, g) &\leq 2d(x, x_n) + d(T(x_n), g) + d(x, T(x)) \rightarrow d(x, T(x)) \\ d(x, g) &\leq d(x, T(x)) = E(x, K). \end{aligned}$$

Pero  $E(x, K) \leq d(x, y)$ . Por lo tanto  $d(x, g) = E(x, K) = d(x, T(x))$ .

Luego  $T(x) = g = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n)$ ; es decir,  $T(x_n) \rightarrow T(x)$ . De esta manera  $T$  es continua. □

## Capítulo 2

# Curvas rectificables en espacios métricos

Para escribir este capítulo nos hemos inspirado en la definición del coeficiente de deformación de la convexidad métrica de un espacio métrico de Jiménez Pozo, es por ello que se ha dedicado este capítulo para hacer un estudio detallado sobre curvas y longitud de arco en un espacio métrico. Para ordenar y desarrollar el tema nos basamos en el texto de Apostol. Comencemos con algunas definiciones y observaciones.

**Definición 2.1.** Sea  $[a, b]$  un intervalo cerrado y acotado de números reales. Por una partición de orden  $n$  de este intervalo, entenderemos un conjunto de  $n + 1$  números reales

$$P := \{x_0 = a < x_1, \dots, < x_n = b\}.$$

El intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  se llama el  $k$ -ésimo subintervalo de  $P$  y  $\Delta_{x_k} := x_k - x_{k-1}$  denotará la longitud de este subintervalo.

$\wp[a, b]$  denotará la colección de todas las posibles particiones de  $[a, b]$  de cualquier orden. En todo este capítulo,  $(X, d)$  denotará siempre un espacio métrico no vacío.

**Definición 2.2.** Se dice que  $\zeta \subseteq X$  es una curva en  $X$  o simplemente una curva, si existe una función continua  $f : [a, b] \rightarrow X$ , tal que

$$\zeta = \{f(t) : t \in [a, b]\},$$

es decir,  $\zeta$  es la imagen continua de  $[a, b]$  bajo  $f$ .

Diremos que  $\zeta$  es una curva descrita por  $f$ . A la función  $f$  se le conoce como un camino o una parametrización de  $\zeta$ .

### Observaciones:

1. Toda curva en  $X$ , es un conjunto compacto y conexo, dado que es la imagen continua de un compacto y conexo.

2. Si  $f$  es una parametrización de  $\zeta$ , también lo es la composición  $f \circ \varphi$ ; donde  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  es una función biyectiva y continua.
3. Es a veces útil imaginarse una curva como trazada por una partícula móvil, en donde, el intervalo  $[a, b]$  puede ser interpretado como un intervalo de tiempo y el punto  $f(t)$  determina el lugar donde se encuentra la partícula en el instante  $t$ . En esta interpretación  $f$  se llama un movimiento.
4. Caminos distintos pueden definir la misma curva. Por ejemplo cuando  $X = \mathbb{R}^2$ , con  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidos como

$$f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \text{ y } g(t) := (\cos 2\pi t, -\sin 2\pi t)$$

ambas funciones describen el círculo unidad  $x^2 + y^2 = 1$ , pero los puntos son recorridos en sentidos opuestos.

A continuación se introducirá el concepto de longitud de arco de una curva. La idea consiste en aproximar la curva por medio de particiones en la curva asociada a  $f$ , técnica aprendida de los antiguos geómetras. Nuestra intuición nos asegura que la longitud de cualquier partición en la curva asociada a  $f$  no excederá a la de la curva (después de dar la definición de partición en una curva asociada a  $f$ ), luego la longitud de la curva deberá ser una cota superior de las longitudes de todas las particiones en la curva asociadas a  $f$ . Por consiguiente parece natural definir la longitud de una curva, como el extremo superior de las longitudes de todas las posibles particiones en la curva. Para la mayoría de las curvas que se encuentran en la práctica (en el caso de  $\mathbb{R}^n$ ), esto proporciona una definición útil de longitud de arco. Sin embargo, como se verá enseguida, existen curvas para las cuales el extremo superior de las longitudes de las particiones en la curva no existe. Por tanto es necesario clasificar las curvas en dos categorías: las que tienen longitud finita y las que no. Las primeras se denominan rectificables y las segundas no rectificables.

De las observaciones enlistadas anteriormente, se puede ver en (4) dos caminos inyectivos distintos describiendo la misma curva, a éstos se les llamará caminos equivalentes, como se observa en la siguiente definición.

**Definición 2.3.** Sean  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $g : [c, d] \rightarrow X$ , dos caminos. Los caminos  $f$  y  $g$  se llamarán caminos equivalentes si y sólo si, existe

$$h : [c, d] \rightarrow [a, b]$$

función sobreyectiva y estrictamente monótona (por tanto continua), tal que

$$g = f \circ h.$$

Se dice que las funciones  $f$  y  $g$  proveen representaciones paramétricas distintas de la misma curva. A la función  $h$  se le llama un cambio de parámetro.

**Proposición 2.1.** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $g : [c, d] \rightarrow X$ , son caminos inyectivos que describen la misma curva, entonces son equivalentes.

*Demostración.* Como  $f$  es inyectiva, existe  $f^{-1} : \zeta \rightarrow [a, b]$ , la cual es biyectiva y continua, pues siendo  $[a, b]$  compacto y de Hausdorff,  $f$  inyectiva y continua, resulta ser un homeomorfismo. Sea ahora  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , definida como

$$h(t) := (f^{-1} \circ g)(t).$$

Luego,  $h$  es continua y biyectiva, pero toda función continua y biyectiva entre dos intervalos es estrictamente monótona. Así  $g = f \circ h$ . Por lo tanto  $f$  y  $g$  son equivalentes.  $\square$

**Proposición 2.2.** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $g : [c, d] \rightarrow X$ , son dos caminos equivalentes, entonces describen la misma curva.

*Demostración.* Sean  $\zeta_f$  y  $\zeta_g$ , las curvas descritas por  $f$  y  $g$  respectivamente. Se probará que estas dos curvas son iguales mediante igualdad de conjuntos. Como  $f$  y  $g$  son equivalentes, existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  sobreyectiva, continua y estrictamente monótona, tal que  $g = f \circ h$ . Sea  $x \in \zeta_g$  arbitrario, existe  $t \in [c, d]$  tal que

$$x = g(t) = (f \circ h)(t) = f(h(t)) \in \zeta_f.$$

Así

$$\zeta_g \subseteq \zeta_f.$$

Sea ahora  $y \in \zeta_f$ , existe  $t \in [a, b]$  tal que  $y = f(t)$  y existe  $r \in [c, d]$  tal que  $t = h(r)$ , entonces  $y = (f \circ h)(r) = g(r) \in \zeta_g$ . Así

$$\zeta_f \subseteq \zeta_g.$$

Luego, utilizando ambas inclusiones, se tiene  $\zeta_f = \zeta_g$ .  $\square$

**Definición 2.4.** Sea  $\zeta$  una curva en  $X$ , descrita por  $f : [a, b] \rightarrow X$  y sea  $P \in \wp[a, b]$  de orden  $n$ . Una partición en la curva asociada a  $f$  y a  $P$ , es el conjunto ordenado de puntos

$$P_f := \{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))\}.$$

La longitud de esta partición la designaremos por  $\wedge P_f := \sum_{k=1}^n d(f(x_k), f(x_{k-1}))$ .

Cabe mencionar que cuando  $f$  es inyectiva se cumple que  $f(x_i) \neq f(x_j)$  si  $i \neq j$ . Luego,  $P_f$  puede identificarse con el conjunto de puntos en  $\zeta$  dado por

$$\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

Este es el caso que más nos interesará en este trabajo o a lo sumo cuando  $f(x) \neq f(y)$  para  $x \neq y$ , excepto en un número finito de puntos  $x$  y  $y$ . Este último

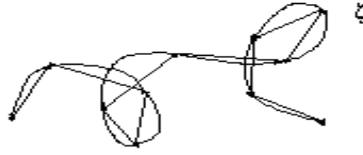


Figura 2.1: Partición en la curva.

caso cubre algunas curvas importantes; por ejemplo, curvas cerradas, sin embargo, la definición 2.4 es la más general. Por ejemplo, si el círculo  $x^2 + y^2 = 1$  del plano complejo se parametriza mediante  $(\cos 2t, \text{sen } 2t)$ , para  $t \in [0, 2\pi]$ , entonces su longitud mediante esta parametrización es  $4\pi$ .

**Definición 2.5.** Sea  $\zeta$  una curva en  $X$ , descrita por  $f : [a, b] \rightarrow X$ , si el conjunto  $\{\wedge P_f : P \in \wp[a, b]\}$  esta acotado, entonces se dice que  $f$  es un camino rectificable o que  $f$  tiene longitud de arco finita, el cual se define y se denota por:

$$\wedge f(a, b) := \sup \{\wedge P_f : P \in \wp[a, b]\}.$$

Si el conjunto  $\{\wedge P_f : P \in \wp[a, b]\}$  no es acotado, se dice que  $f$  es un camino no rectificable o que  $f$  no es rectificable.

En lo que sigue, se asociará a una curva  $\zeta$  una función  $f$  que la describe; con este criterio,  $\zeta$  es rectificable si y sólo si  $f$  lo es.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $x_0 \in X$ , se tiene que  $\zeta = \{x_0\}$  es una curva, la función que lo describe es  $f : [a, b] \rightarrow X$ , dado por

$$f(t) = x_0, \text{ para todo } t \in [a, b].$$

$\zeta$  es rectificable y su longitud es cero.

**Definición 2.6.** Sea  $f$  una función real definida en  $[a, b]$ . Si  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$ , escribiremos  $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Si existe un número positivo  $M$  tal que

$$\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M$$

para toda partición de  $[a, b]$ , entonces se dice que  $f$  es de variación acotada en  $[a, b]$ .

**Observaciones:**

1. Cuando  $X$  es el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ ;  $f$  es rectificable si y sólo si  $f$  es de variación acotada, ver [6].
2. Cuando  $X = \mathbb{R}^n$  se tiene la definición natural de curva en el espacio  $n$  dimensional  $\mathbb{R}^n$  y rectificación de la misma. Pero es importante destacar que cuando  $f : [a, b] \rightarrow X$ , es de variación acotada y, por tanto, rectificable, la longitud de la curva en términos del análisis matemático usual, no se refiere a la longitud de  $f$  propiamente, sino a la de la curva  $t \sim (t, f(t)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Teniendo esto presente, todas las definiciones son consistentes con la teoría usual.

$F_X^{[a,b]}$  denotará al conjunto de todas las funciones continuas con valores en  $X$  y definidas en  $[a, b]$ , las cuales son rectificables, es decir,

$$F_X^{[a,b]} := \{f : [a, b] \rightarrow X \mid f \text{ es continua y rectificable}\}.$$

**Proposición 2.3.** *Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $f \in F_X^{[a,b]}$ , entonces  $f$  es acotada.*

*Demostración.* La demostración es sencilla, recordemos que  $f$  es acotada, si el conjunto

$$f([a, b]) := \{f(t) : t \in [a, b]\}$$

es acotado, lo cual es equivalente a que exista  $x_0 \in X$  y  $r > 0$ , tal que

$$f([a, b]) \subseteq B(x_0, r).$$

Como  $f$  es rectificable, existe  $M > 0$ , tal que para cada partición

$$P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$$

se tiene  $\sum_{k=1}^n d(f(y_k), f(y_{k-1})) \leq M$ . En particular,  $d(f(a), f(b)) \leq M$  y si  $x \in (a, b)$ , como  $\{a, x, b\} \in \wp[a, b]$ , se tiene

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(a), f(x)) + d(f(x), f(b)) \leq M.$$

Luego para toda  $x \in [a, b]$ , se tiene  $f(x) \in B(f(a), M)$ . Por lo tanto  $f$  es acotada.  $\square$

Recordemos que si  $X$  es un espacio vectorial sobre los reales y  $N := \|\cdot\|$  es una norma sobre  $X$ , entonces  $(X, N)$  es un espacio métrico, llamado espacio métrico normado. Cuando  $N$  es degenerada, es decir, cuando  $N(x) = 0$  para algún  $x \neq 0$ , pero es subaditiva y positivamente homogénea, es decir,

$$\begin{aligned} N(\lambda x) &= |\lambda| N(x) \\ N(x + y) &\leq N(x) + N(y), \end{aligned}$$

entonces  $N$  es llamada una seminorma y se puede pasar a un espacio normado mediante el cociente de  $X$  con el núcleo de  $N$  (digamos  $K$ ), que es un subespacio de  $X$ , así  $(\frac{X}{K}, N)$  es un espacio normado.

Es claro que si  $f \in F_X^{[a,b]}$ , entonces  $0 \leq \wedge f(a, b) < \infty$ .

**Proposición 2.4.** *Sea  $(X, N)$  un espacio métrico normado sobre los números reales, entonces  $F_X^{[a,b]}$  es un espacio vectorial sobre los reales con las operaciones definidas mediante:*

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x)\end{aligned}$$

para  $f, g \in F_X^{[a,b]}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

La función  $\wedge : F_X^{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$\wedge(f) = \wedge f(a, b)$$

es una seminorma finita, cuyo núcleo (kernel), es el subespacio de las funciones constantes.

*Demostración.* Se probará que si  $f, g \in F_X^{[a,b]}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces no solamente  $f + g, \alpha f \in F_X^{[a,b]}$ , sino que también las propiedades que definen la seminorma.

Sean pues,  $f, g \in F_X^{[a,b]}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $P \in \wp[a, b]$ , luego

i)

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^n N(f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})) \\ & \leq \sum_{k=1}^n N(f(x_k) - f(x_{k-1})) + \sum_{k=1}^n N(g(x_k) - g(x_{k-1})) \\ & \leq \wedge f(a, b) + \wedge g(a, b).\end{aligned}$$

Tomando supremo a la izquierda, resulta

$$\wedge(f + g)(a, b) \leq \wedge f(a, b) + \wedge g(a, b).$$

Luego,  $f + g \in F_X^{[a,b]}$  y  $\wedge$  es subaditiva.

ii)

$$\sum_{k=1}^n N(\alpha f(x_k) - \alpha f(x_{k-1})) = |\alpha| \sum_{k=1}^n N(f(x_k) - f(x_{k-1})).$$

Tomando supremo a la izquierda, resulta

$$\wedge \alpha f(a, b) = |\alpha| \wedge f(a, b).$$

Así,  $\alpha f \in F_X^{[a,b]}$  y  $\wedge$  es una seminorma. □

**Proposición 2.5.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $f \in F_X^{[a,b]}$ , entonces para cualquier  $c \in (a, b)$  se tiene que,  $f \in F_X^{[a,c]}$ ,  $f \in F_X^{[c,b]}$  y además

$$\wedge f(a, b) = \wedge f(a, c) + \wedge f(c, b).$$

*Demostración.* Sean  $P \in \wp[a, c]$  y  $Q \in \wp[c, b]$  particiones arbitrarias de  $[a, c]$  y  $[c, b]$  respectivamente, así  $V = P \cup Q$  es una partición de  $[a, b]$ . Luego

$$\wedge P_f \leq \wedge P_f + \wedge Q_f = \wedge V_f \leq \wedge f(a, b).$$

Por lo tanto,  $f \in F_X^{[a,c]}$ . De manera similar se tiene

$$\wedge Q_f \leq \wedge f(a, b).$$

Por lo tanto,  $f \in F_X^{[c,b]}$ . Como  $\wedge P_f + \wedge Q_f \leq \wedge f(a, b)$  se tiene, tomando supremo sobre los  $P$ s y luego sobre los  $Q$ s, que

$$\wedge f(a, c) + \wedge f(c, b) \leq \wedge f(a, b).$$

Sea ahora  $P \in \wp[a, c]$  una partición arbitraria. Si  $c \in P$ , entonces  $R = P \cap [a, c]$  y  $S = P \cap [c, b]$  son particiones de  $[a, c]$  y  $[c, b]$  respectivamente. Así

$$\wedge P_f = \wedge R_f + \wedge S_f \leq \wedge f(a, c) + \wedge f(c, b).$$

Si  $c \notin P$ . Sea  $P^* = P \cup \{c\}$ . Supongamos que  $c \in (x_{k-1}, x_k)$ , entonces

$$d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq d(f(x_{k-1}), f(c)) + d(f(c), f(x_k))$$

con lo cual, haciendo nuevamente  $R = P^* \cap [a, c]$  y  $S = P^* \cap [c, b]$  tenemos

$$\wedge P_f \leq \wedge R_f + \wedge S_f \leq \wedge f(a, c) + \wedge f(c, b).$$

Tomando supremo sobre los  $P$ s, se tiene

$$\wedge f(a, b) \leq \wedge f(a, c) + \wedge f(c, b)$$

luego, de ambas desigualdades, resulta

$$\wedge f(a, b) = \wedge f(a, c) + \wedge f(c, b).$$

□

**Definición 2.7.** Sea  $f \in F_X^{[a,b]}$  y  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definida de la siguiente manera

$$s(x) := \wedge f(a, x) \text{ si } x \neq a \text{ y } s(a) := 0.$$

A  $s$  le llamaremos función longitud de arco asociada a  $f$ .

**Proposición 2.6.** Si  $f \in F_X^{[a,b]}$  y  $s$  la función longitud de arco asociada a  $f$ , entonces

(i)  $s$  es creciente.

(ii) Si  $f$  no es constante en ningún subintervalo de  $[a, b]$ ,  $s$  es estrictamente creciente.

*Demostración.* (i) Según la definición de  $s$  se tiene que para toda  $x \in [a, b]$ ,  $s(x) \geq 0$ . Sean ahora  $x, y \in [a, b]$  arbitrarios con  $x < y$ . Si  $x = a$ , no hay nada que probar, pues trivialmente  $s(x) \leq s(y)$ . Supongamos ahora que  $a < x < y$ . Por la proposición anterior, se tiene

$$\begin{aligned} s(y) &= \wedge f(a, y) = \wedge f(a, x) + \wedge f(x, y) \\ &= s(x) + \wedge f(x, y), \end{aligned}$$

entonces

$$s(y) - s(x) = \wedge f(x, y) \geq 0$$

luego,  $s(y) \geq s(x)$ . Por lo tanto  $s$  es creciente.

(ii) Sea ahora  $a \leq x < y \leq b$ , por (i) se tiene que  $s(x) \leq s(y)$ . Si  $s(x) = s(y)$ , entonces

$$\wedge f(a, y) - \wedge f(a, x) = 0.$$

Pero

$$\wedge f(a, y) - \wedge f(a, x) = \wedge f(x, y).$$

Así  $f$  es constante en  $[x, y]$ , lo cual es una contradicción con la hipótesis, luego  $s(x) < s(y)$  y de esta manera se tiene que  $s$  es estrictamente creciente.  $\square$

**Proposición 2.7.** Si  $f \in F_X^{[a,b]}$ , entonces la función longitud de arco  $s$  asociada a  $f$ , es continua.

*Demostración.* Sea  $x^* \in (a, b)$  arbitrario. Para demostrar que  $s$  es continua se probarán las continuidades laterales.

Sea  $\epsilon > 0$  y  $(x_m)$  una sucesión en  $(x^*, b]$ , tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x^*$ . Como  $f$  es continua en  $x^*$ , existe  $M_1 \in \mathbb{N}$ , tal que

$$d(f(x_m), f(x^*)) < \frac{\epsilon}{2}$$

siempre que  $m \geq M_1$  y además existe  $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \in \wp[a, b]$  tal que

$$\wedge f(x^*, b) - \frac{\epsilon}{2} < \wedge P_f.$$

Como  $x_m$  converge a  $x^*$ , existe  $M_2 \in \mathbb{N}$ , tal que  $x_m < y_1$ , siempre que  $m \geq M_2$ . Sea  $M = \max\{M_1, M_2\}$ , entonces

$$P_m = P \cup \{x_m\} \in \wp[x^*, b]$$

siempre que  $m \geq M$ .

$$\begin{aligned} \wedge f(x^*, b) - \frac{\epsilon}{2} &\leq \wedge P_f \leq \wedge P_{m_f} \\ &\leq d(f(x_m), f(x^*)) + \wedge f(x_m, b) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \wedge f(x_m, b). \end{aligned}$$

Así

$$\wedge f(x^*, b) - \wedge f(x_m, b) < \epsilon.$$

Ahora, veamos que

$$\begin{aligned} |s(x_m) - s(x^*)| &= s(x_m) - s(x^*) \\ &= \wedge f(a, x_m) - \wedge f(a, x^*) = \wedge f(x^*, x_m) \\ &= \wedge f(x^*, b) - \wedge f(x_m, b) < \epsilon. \end{aligned}$$

Luego,  $s$  es continua por la derecha. Sea  $\epsilon > 0$  y  $(x_n)$  una sucesión en  $[a, x^*)$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ . Como  $f$  es continua en  $x^*$ , existe  $M_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$d(f(x_m), f(x^*)) < \frac{\epsilon}{2}$$

siempre que  $m \geq M_1$ . También existe una partición  $P = \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \in \wp[a, x^*]$  con la propiedad

$$\wedge f(a, x^*) - \frac{\epsilon}{2} < \wedge P_f.$$

Como  $x_m \rightarrow x^*$ , existe  $M_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $x_m > y_{n-1}$ , siempre que  $m \geq M_2$ . Sea  $M = \max\{M_1, M_2\}$ , entonces

$$P_m = P \cup \{x_m\} \in \wp[a, x^*]$$

siempre que  $m \geq M$  y además

$$\begin{aligned} \wedge f(a, x^*) &\leq \wedge P_f \leq \wedge P_{m_f} \\ &\leq \wedge f(a, x_m) + d(f(x_m), f(x^*)) \\ &< \wedge f(a, x_m) + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Así

$$\wedge f(a, x^*) - \wedge f(a, x_m) < \epsilon,$$

y

$$s(x^*) - s(x_m) = \wedge f(a, x^*) - \wedge f(a, x_m) < \epsilon.$$

Por lo tanto  $s$  es continua por la izquierda.

Cuando  $x^* = a$ , basta mostrar que es continua por la derecha y cuando  $x^* = b$ , basta probar que es continua por la izquierda. En ambos casos el procedimiento se realiza de manera análoga a lo anterior.  $\square$

**Proposición 2.8.** Si  $f : [a, b] \rightarrow X$  y  $g : [c, d] \rightarrow X$  son caminos equivalentes, entonces  $g \in F_X^{[c,d]}$  si y sólo si  $f \in F_X^{[a,b]}$ , además

$$\wedge g(c, d) = \wedge f(a, b).$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $f \in F_X^{[a,b]}$ . Como  $f$  y  $g$  son caminos equivalentes, existe  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$  continua, sobreyectiva y estrictamente monótona, tal que  $g = f \circ h$ . Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \wp[c, d]$ , entonces

$$Q = \{h(x_0), h(x_1), \dots, h(x_n)\} \in \wp[a, b].$$

Para todo  $0 \leq k \leq n$ ,  $g(x_k) = (f \circ h)(x_k) = f(y_k)$ , y por tanto

$$\wedge P_g = \sum_{k=1}^n d(g(x_k), g(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n d(f(y_k), f(y_{k-1})) \leq \wedge f(a, b).$$

Luego el conjunto

$$\{\wedge P_g : P \in \wp[c, d]\}$$

es acotado. Así  $g \in F_X^{[c,d]}$ .

Supongamos ahora que  $g \in F_X^{[c,d]}$ . Como  $g = f \circ h$ , se tiene  $f = g \circ h^{-1}$ ; pero  $h^{-1}$  es continua, sobreyectiva y estrictamente monótona, entonces procediendo de manera análoga que en la primera parte de la demostración, se tiene

$$\wedge P_f \leq \wedge g(c, d),$$

para cada  $P \in \wp[a, b]$ . Así  $f \in F_X^{[a,b]}$ . Tomando supremo a la izquierda de las desigualdades definidas, se tiene

$$\wedge f(a, b) = \wedge g(c, d).$$

□

# Capítulo 3

## Aproximación de funciones por medio de operadores lineales

En este capítulo se analiza la importancia de utilizar procesos lineales de aproximación, se menciona el teorema cualitativo de Korovkin haciendo algunos comentarios al respecto y se hace un breve resumen acerca de la manera en que se fueron obteniendo teoremas cuantitativos de tipo Korovkin hasta llegar al teorema importante de esta tesis llamado teorema cuantitativo tipo Korovkin de Jiménez.

### 3.1. Métodos lineales de aproximación

Sea  $F$  un espacio normado y  $(F_n)$  una sucesión creciente de subespacios lineales cuya unión es densa en  $F$  y que individualmente son conjuntos de existencia y unicidad.

Definamos la sucesión de funciones

$$T_n : F \rightarrow F$$

donde  $T_n(f)$  es el elemento de la mejor aproximación de  $f$  en  $F_n$ . Naturalmente,  $T_n$  toma imágenes en  $F_n$  y  $\|T_n f - f\| = E_n(f, F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Observemos que para  $\alpha \neq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \|\alpha f - T_n(\alpha f)\| &= E(\alpha f, F_n) \\ &= \inf \{\|\alpha f - P_n\| : P_n \in F_n\} \\ &= \inf \left\{ |\alpha| \left\| f - \frac{P_n}{\alpha} \right\| : P_n \in F_n \right\} \\ &= |\alpha| \inf \{\|f - P_n\| : P_n \in F_n\} \\ &= |\alpha| E(f, F_n) = |\alpha| \|f - T_n(f)\| \\ &= \|\alpha f - \alpha T_n(f)\|. \end{aligned}$$

Por unicidad del elemento de la mejor aproximación  $\alpha T_n(f) = T_n(\alpha f)$ . Lo cual también es cierto si  $\alpha = 0$ . Sin embargo,  $T_n$  no siempre es un operador lineal, pues podría darse que

$$T_n(f + g) \neq T_n(f) + T_n(g).$$

**Ejemplo 3.1.** Sean  $\mathbb{R}^2$  un espacio normado,  $B = [1, 2] \times [1, 2]$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . Definamos la siguiente función

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

donde a  $T(x)$  le asigna el elemento de la mejor aproximación de  $x$  sobre  $B$ .

Sean  $a = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  y  $b = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , se tiene que

$$\begin{aligned} T(a + b) &= T(2, 2) = (2, 2), \\ T(a) &= T\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 1\right), \\ T(b) &= T\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right), \\ T(a) + T(b) &= \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Luego

$$T(a + b) \neq T(a) + T(b).$$

Supongamos ahora que  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de subespacios del espacio normado  $F$  y que individualmente son conjuntos de existencia y unicidad del elemento de la mejor aproximación de  $f$  en  $F_n$ . Para determinar que  $E(f, F_n) \rightarrow 0$ , tendríamos que calcular  $T_n(f)$  y ver la convergencia o no convergencia de  $\|f - T_n(f)\|$  hacia cero. Desafortunadamente (en la mayoría de los casos) encontrar  $T_n(f)$  es sumamente difícil (si no es que imposible). Afortunadamente, en muchas ocasiones somos capaces de definir una sucesión de operadores lineales

$$L_n : F \rightarrow F$$

tales que, para cada  $n$ , el rango de  $L_n$  se encuentre en  $F_n$  y para cada  $f \in F$  se cumpla

$$\|L_n f - T_n f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

lo cual es equivalente a

$$\|L_n f - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Se observa que esta última expresión todavía tendría sentido aunque  $F_n$  no fuera un subespacio de existencia y unicidad y, por tanto,  $T_n$  no podría ser definido. Por tanto, de la desigualdad

$$E(f, F_n) = \|f - T_n(f)\| \leq \|f - L_n(f)\| + \|L_n(f) - T_n(f)\|,$$

se tendría la convergencia de  $E(f, F_n)$  hacia cero.

$L_n f$  no necesariamente es el elemento de la mejor aproximación a  $f$ ; pero sí es un elemento muy cercano a  $f$  y quizás susceptible de ser calculado. Se dice entonces que  $(L_n)$  es un método o proceso lineal de aproximación.

## 3.2. Teoremas tipo Korovkin

En 1953, el matemático ruso P.P. Korovkin estableció un resultado que con el tiempo se haría célebre. Su simplicidad y al mismo tiempo su poder han despertado el interés de muchos matemáticos. Se trata de un criterio que permite decidir si dada una sucesión de operadores lineales positivos  $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ , se verifica la convergencia uniforme de  $L_n f$  a  $f$  (es decir,  $\|L_n f - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ) en  $[a, b]$  para toda función  $f \in C[a, b]$ .

$$\|L_n f - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.1)$$

Pasemos revista en su forma original a este resultado sorprendente, que a veces también llaman de Bohman-Korovkin, a partir de los resultados del primero. Aunque si de antecedentes se trata, algunos autores consideran ciertos trabajos de T. Popoviciu y aquí podríamos añadir la propia demostración de Serge N. Bernstein sobre la convergencia de los operadores que llevan su nombre.

**Teorema 3.1.** (TIPO KOROVKIN) Sea  $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  una sucesión de operadores lineales y positivos. Para que  $\|L_n f - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  se satisfaga en todo  $C[a, b]$ , es necesario y suficiente que se satisfaga para las tres funciones de prueba  $f(x) = 1, x$  y  $x^2$ . Si  $C[a, b]$  se sustituye por  $C_{2\pi}$ , se pueden tomar en calidad de funciones de prueba a  $f(x) = 1, \cos x$  y  $\sin x$ .

**Nota 3.1.**  $L_n$  positivo significa que  $L_n f \geq 0$ , siempre que  $f \geq 0$ .

## 3.3. Operadores de Bernstein

Como se mencionaba en el preámbulo al teorema de Korovkin, Bernstein había demostrado que los operadores  $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ , dados por

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

son tales que  $B_n f \rightarrow f$  uniformemente, ver [9]. Apoyándonos en el teorema de Korovkin y algunos argumentos probabilísticos, se prueba que efectivamente  $B_n f \rightarrow f$  en  $[0, 1]$ .

De entre las demostraciones más conocidas sobre operadores lineales destacamos, la que en 1913 dió Bernstein en el cual probó la convergencia uniforme de  $B_n f$  a  $f$  en  $[0, 1]$ , ver [9].

Para esto, recordemos que si  $X$  es una variable aleatoria, entonces el valor esperado de  $X$  es

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x_k p(X = x_k) & X \text{ discreta,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & X \text{ continua.} \end{cases}$$

Si  $X$  tiene una distribución binomial con parámetros  $n$  y  $p$ , su función de probabilidad está dada de la siguiente manera:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

para  $x = 0, 1, \dots, n$  y  $0 < p < 1$ . Luego,

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = 1.$$

Además, el valor esperado de  $X$  es

$$E(X) = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = np,$$

y la varianza de  $X$  es

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = np(1-p),$$

de donde, se obtiene

$$E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = np(1-p) + (np)^2.$$

Estos resultados serán de mucha utilidad para probar que los operadores de Bernstein en las funciones de prueba  $1, x$  y  $x^2$  convergen uniformemente a  $1, x$  y  $x^2$  respectivamente y en general para probar la convergencia uniforme, es decir

$$\|B_n f - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sea  $F = C[0, 1]$  y  $(F_n)$  la sucesión de subespacios constituidos por los polinomios algebraicos de grado no mayores que  $n$ . Definimos para toda  $f \in F$  y  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

$B_n(f, x)$  es el polinomio de Bernstein de  $f$  de grado  $n$ . A  $B_n$  se le conoce como operador de Bernstein de grado  $n$ .

Los polinomios anteriores, llamados de Bernstein, tienen dos características muy importantes:

- a) Son lineales, esto es,  $B_n(\alpha f + g) = \alpha B_n f + B_n g$ .
- b)  $B_n f \geq 0$  siempre que  $f \geq 0$ .

Es decir, son lineales y respetan positividad. A continuación verificamos que se cumple la convergencia uniforme para las tres funciones de prueba.

$$\begin{aligned}
 a) \quad B_n(1, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1. \\
 b) \quad B_n(x, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n} (nx) = x. \\
 c) \quad B_n(x^2, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n^2} E(X^2) = \frac{1}{n^2} (V(X) + (E(X))^2) \\
 &= \frac{1}{n^2} (nx - nx^2 + n^2 x^2) = \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} + x^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2.
 \end{aligned}$$

Luego,  $B_n(f)$  converge uniformemente a  $f$ . La demostración original puede verse en [9]. Otras variantes de los operadores de Bernstein que sirven para ilustrar la aplicación del teorema de Korovkin vienen dados de la siguiente forma:

### 1. Operadores Bernstein-Stancu.

Para  $0 \leq \alpha \leq \beta$ ,  $B_{n,\alpha,\beta}(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) x^k (1-x)^{n-k}$ .

$$\begin{aligned}
 a) \quad B_{n,\alpha,\beta}(1, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1. \\
 b) \quad B_{n,\alpha,\beta}(x, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n+\beta} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+\alpha) x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n+\beta} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} + \alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\
 &= \frac{1}{n+\beta} [nx + \alpha] = \frac{nx+\alpha}{n+\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) B_{n,\alpha,\beta}(x^2, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k+\alpha)^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{(n+\beta)^2} \left[ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} + 2\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k \right. \\
 &\quad \left. (1-x)^{n-k} + \alpha^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right] \\
 &= \frac{1}{(n+\beta)^2} [nx - nx^2 + n^2 x^2 + 2\alpha(nx) + \alpha^2] \\
 &= \frac{nx(1+2\alpha)}{(n+\beta)^2} + \frac{nx^2(n-1)}{(n+\beta)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x^2.
 \end{aligned}$$

2. Operadores  $p$  Bernstein-Stancu.

$B_{n,\alpha,\beta}^p(f, x)$  : Composición de  $B_{n,\alpha,\beta}$   $p$  - veces.

Por inducción se prueba que:

$$\begin{aligned}
 a) B_{n,\alpha,\beta}^p(1, x) &= 1. \\
 b) B_{n,\alpha,\beta}^p(x, x) &= x. \\
 c) B_{n,\alpha,\beta}^p(x^2, x) &= \left(\frac{n(n-1)}{(n+\beta)^2}\right)^p x^2 + \left(\frac{2\alpha+1}{\beta+1}\right) \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^p \left(1 - \left(\frac{n-1}{n+\beta}\right)^p\right) x + \\
 &\quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(1 - \left(\frac{1+2\beta}{1+\beta}\right) \left(\frac{n}{n+\beta}\right)^p + \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) \left(\frac{n(n-1)}{(n+\beta)^2}\right)^p\right).
 \end{aligned}$$

3.  $B_{n,b_n}(f, x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n x^k (1-x)^{n-k}$ , donde  $b_n \geq 0, b_n \downarrow 1$  ó  $b_n \uparrow 1$ .

$$\begin{aligned}
 a) B_{n,b_n}(1, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_n x^k (1-x)^{n-k} = b_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \\
 b) B_{n,b_n}(x, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right) b_n x^k (1-x)^{n-k} = \frac{b_n}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{b_n}{n} (nx) = b_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x. \\
 c) B_{n,b_n}(x^2, x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^2 b_n x^k (1-x)^{n-k} = \frac{b_n}{n^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{b_n}{n^2} (nx - nx^2 + n^2 x^2) \\
 &= b_n \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} + x^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1(x^2) = x^2.
 \end{aligned}$$

$$4. B_{n,b_n}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} f\left(\frac{kb_n}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \text{ donde } b_n \geq 0, b_n \uparrow 1.$$

$$a) B_{n,b_n}(1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

$$b) B_{n,b_n}(x, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{kb_n}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = \frac{b_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n}{n} (nx) = b_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x.$$

$$c) B_{n,b_n}(x^2, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{kb_n}{n}\right)^2 x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \frac{b_n^2}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} k^2 x^k (1-x)^{n-k} = b_n^2 \left(\frac{nx - nx^2 + n^2 x^2}{n^2}\right)$$

$$= b_n^2 \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} + x^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1(x^2) = x^2.$$

Luego, para toda  $f \in C[0, 1]$ , se tiene que  $B_n f$  converge uniformemente a  $f$ .

Si  $L : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  es un operador lineal y positivo, tal que

$$L1 = 1, \quad Lx = x \quad y \quad Lx^2 = x^2, \tag{3.2}$$

entonces  $L$  es necesariamente el operador identidad  $I$ .

En efecto, si  $L \neq I$ , se puede definir la sucesión constante  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la cual negaría el teorema 3.1. Ahora la siguiente pregunta es obvia :

¿Por qué la identidad queda caracterizada tan simplemente?

Siendo  $L$  lineal, de (3.2) se sigue que  $L$  coincide con la identidad  $I$  en todo el espacio tridimensional generado por las funciones de prueba. O sea,

$$L(ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + c; \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

resultan ser sólo tres funciones.

Ahora analicemos la positividad de  $L$ ; pues siendo  $L$  un operador lineal y positivo resulta ser monótono. Esto es,

$$g \geq f \implies L(g) \geq L(f). \tag{3.4}$$

Luego se puede meter dentro de un *sandwich* cualquier función del espacio con las funciones de prueba.

Dada  $f \in C[a, b]$  y fijemos arbitrariamente un punto  $t \in [a, b]$  y un número  $\epsilon > 0$ . Sea  $\delta > 0$ , tal que si  $x \in [a, b]$  y  $|x - t| < \delta$ , se cumple que

$$|f(x) - f(t)| < \epsilon.$$

Construimos las funciones

$$g(x) := 2 \|f\| \frac{(x - t)^2}{\delta^2} + f(t) + \epsilon \quad (3.5)$$

$$h(x) := -2 \|f\| \frac{(x - t)^2}{\delta^2} + f(t) - \epsilon \quad (3.6)$$

se tiene entonces el *sandwich*

$$h \leq f \leq g. \quad (3.7)$$

Debido a (3.3), resulta

$$\begin{aligned} L(g, t) &= g(t) = f(t) + \epsilon \\ L(h, t) &= h(t) = f(t) - \epsilon. \end{aligned}$$

Por otra parte de (3.4) y (3.7) se tiene

$$Lh \leq Lf \leq Lg.$$

Así, de estas tres últimas expresiones, se obtiene

$$|L(f, t) - f(t)| \leq \epsilon.$$

El análisis que se ha presentado es importante porque la experiencia ha demostrado que las técnicas desarrolladas por diferentes autores para el tratamiento de teoremas tipo Korovkin, están de una u otra manera muy relacionados con la técnica utilizada en este análisis.

Del teorema de Korovkin surgen varias preguntas:

1. ¿Existen otras funciones de prueba?
2. ¿Cuál es el número mínimo de funciones prueba?
3. ¿Se puede demostrar este teorema para otra clase de operadores?
4. ¿Se puede demostrar este teorema para otros espacios?, etc.

El conjunto de estos resultados que dan respuesta a las preguntas formuladas es lo que se ha denominado teoremas tipo Korovkin.

Claramente, como se puede observar, el teorema tipo Korovkin es de tipo cualitativo; es decir, asegura la convergencia de  $L_n(f)$  a  $f$ , sin medir la velocidad u orden de la convergencia (resultado cuantitativo).

La parte cuantitativa de la teoría fue iniciada por Mamedov en 1953 y continuada por Freud en 1968. Shisha y Mond publicaron tales resultados para los casos  $C_{[a,b]}$  y  $C_{2\pi}$ , relativos a operadores positivos y las funciones de prueba  $1, x, x^2$  y  $1, \sin x, \cos x$ , respectivamente. Posteriormente Censor (1971) extiende tales resultados para  $C(X)$  con  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  convexo y compacto y  $\{1, x_i, x_i^2\}_{1 \leq i \leq m}$  como funciones de prueba, aquí  $x_i$  denota la función coordenada  $i$ -ésima.

Por la década de los 70 se sabía que si  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  es una familia de funciones reales separantes en  $X$  (es decir, para  $x \neq y$  en  $X$ , existe  $i$  tal que  $f_i(x) \neq f_i(y)$ ) y  $L_n : C(X) \rightarrow C(X)$  operadores lineales y positivos, entonces las funciones  $1, f_i$  y  $f_i^2$  podían ser utilizadas como funciones de prueba para un teorema cualitativo de tipo Korovkin (Shashkin).

La manera de obtener resultados cuantitativos de tipo Korovkin con estas y otras funciones de prueba fue lograda por Jiménez Pozo en 1974. Para lograr su objetivo cambia la métrica del espacio de la siguiente manera; si  $d$  es la métrica original sobre  $X$ , define

$$d_F(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - f_i(y))^2} \text{ para todo } x, y \in X,$$

y demuestra que  $(X, d)$  y  $(X, d_F)$  son homeomorfos, con lo cual  $C(X, d)$  y  $C(X, d_F)$  coinciden. Por lo que trabajó el problema con esta nueva métrica.

**Definición 3.1.** Un espacio métrico  $(X, d)$  se llamará métricamente convexo si para todo  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ , existe  $z \in X - \{x, y\}$  tal que  $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ .

En todos estos resultados, desde Mamedov hasta Jiménez Pozo, la característica fuerte es utilizar las propiedades del módulo de continuidad de una función real o compleja definida en el espacio  $X$ . Tal característica es que en el caso de  $X \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $X$  sea convexo y en el caso general se exige que  $X$  sea métricamente convexo. El módulo de continuidad de una tal función  $f$  mide la suavidad de la función.

**Definición 3.2.** Sea  $f$  una función real o compleja definida sobre un espacio métrico  $X$ . La función  $w(f, \cdot) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$w(f, \alpha) := \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in X, d(x, y) \leq \alpha\}$$

para  $\alpha > 0$  y  $w(f, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} w(f, \alpha)$ , es llamada módulo de continuidad de  $f$  en  $\alpha$ .

Se tiene que  $w(f, 0) = 0$  si y sólo si  $f$  es continua.

Las propiedades del módulo de continuidad para  $X$  al menos métricamente convexo son:

- 1)  $w(f, \cdot)$  es creciente.
- 2)  $w(f, n\alpha) \leq nw(f, \alpha)$  para todo  $\alpha > 0$  y  $n \in \mathbb{N}$ .
- 3)  $w(f, \lambda\alpha) \leq [\lambda + 1]w(f, \alpha)$  para toda  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$ .

**Nota 3.2.**  $[\lambda + 1]$  denota la parte entera de  $\lambda + 1$ .

$w(f, \alpha)$  es creciente independientemente de la convexidad o metricidad convexa de  $X$ .

*Demostración.* Las propiedades 2) y 3) se deben a que para  $x, y \in X$  con  $x \neq y$ , existe  $z \in X$  tal que  $z \neq x, z \neq y$  y  $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$ , dado que el espacio en el que se esta trabajando es métricamente convexo.

La demostración para el caso particular  $X = [a, b]$  es la siguiente:

2) Sin pérdida de generalidad supongamos que  $0 < y - x \leq n\alpha$ . Existe una partición  $P = \{x = z_0 < z_1 < \dots < z_n = y\}$  del intervalo  $[x, y]$  tal que

$$z_{i+1} - z_i \leq \alpha.$$

Luego

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(z_{i+1}) - f(z_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} w(f, \alpha) \leq nw(f, \alpha).$$

Tomando supremo sobre  $x, y$  tenemos lo que deseabamos

$$w(f, n\alpha) := \sup \{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |y - x| \leq n\alpha\} \leq nw(f, \alpha).$$

3) Dado que se cumple la siguiente relación  $\lambda \leq [\lambda + 1]$  y por la propiedad b) se tiene

$$w(f, \alpha\lambda) \leq w(f, \alpha[\lambda + 1]) \leq [\lambda + 1]w(f, \alpha).$$

El caso métricamente convexo es similar.  $\square$

Inmediatamente a los resultados cuantitativos de Jiménez Pozo se preguntaba ¿qué pasa cuando el espacio no es métricamente convexo? La respuesta la dió nuevamente Jiménez al introducir el concepto de coeficiente de deformación de la convexidad métrica asociado a todo espacio métrico. Tal coeficiente mide el grado de no convexidad del espacio. Demos pues tal definición.

**Definición 3.3.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico arco-conexo en  $\mathbb{R}^m$ . Se denota y se define el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de  $X$  por

$$1 \leq \rho(X) := \rho := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \inf_{\Gamma_{xy} \in \mathcal{C}_{xy}} \frac{\ell(\Gamma_{xy})}{d(x, y)},$$

donde,

$\Gamma_{xy}$  es la curva que une a  $x$  con  $y$ ,

$\mathcal{C}_{xy} := \{\Gamma_{xy} : \Gamma_{xy} \text{ es la curva que une a } x \text{ con } y\}$ ,

$\ell(\Gamma_{xy})$  es la longitud de la curva  $\Gamma_{xy}$  y  $d(x, y)$  es la distancia de  $x$  a  $y$ .

Si  $\rho(X) < \infty$  diremos que  $X$  tiene un coeficiente de deformación finito; en caso contrario se dice que tal coeficiente es infinito.

Jiménez extiende esta definición a espacios métricos en general y demuestra que si  $X$  es compacto distinto del vacío,  $\rho = 1$  si y sólo si  $X$  es métricamente convexo. También demuestra que

$$w(f, \lambda\alpha) \leq [\rho\lambda + 1] w(f, \alpha).$$

Sea  $X \neq \emptyset$  compacto de  $\mathbb{R}^m$  y  $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  una familia de funciones reales, continuas y separantes definidas sobre  $X$ .

Definamos la siguiente métrica

$$d_F(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^k (f_i(x) - f_i(y))^2}.$$

La función identidad

$$I_X : (X, d) \rightarrow (X, d_F),$$

es continua, pues las  $f_i$  lo son. Siendo  $(X, d)$  compacto, resulta que  $I_X$  es un homeomorfismo, luego la topología definida por  $d_F$  es la euclidea.

Sea  $B(X)$  el espacio de Banach de las funciones reales acotadas sobre  $X$  con  $\|\cdot\|_X$  la norma del supremo y  $\|f\|_Z = \sup_{z \in Z} |f(z)|$ , para  $f \in B(X)$ ,  $Z \subseteq X$ ,  $Z \neq \emptyset$ . Sea  $E$  un subespacio de  $C(X)$  tal que

$$\{1, f_i, f_i^2 : 1 \leq i \leq k\} \subseteq E.$$

**Teorema 3.2.** (Tipo Korovkin de Jiménez) Si  $L_n : E \rightarrow B(X)$  es una sucesión de operadores positivos y  $\rho(X) < \infty$ , entonces para toda  $f \in E$  y  $v > 0$  se cumple

$$\|L_n f - f\|_Z \leq \|f\|_Z \|L_n 1 - 1\|_Z + w(f, \mu_n) \|L_n 1 + \rho v\|_Z$$

donde

$$\begin{aligned} \mu_n^2 &= v^{-1} \sup_{z \in Z} \{L_n(d_F(z, \cdot), z)\} \\ &\leq v^{-1} \sum_{i=1}^k (\|L_n f_i^2 - f_i^2\|_Z + 2\|f_i\|_Z \|L_n f_i - f_i\|_Z + \|f_i^2\|_Z \|L_n 1 - 1\|_Z). \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Coeficiente de deformación de la convexidad métrica de curvas

Este capítulo está dedicado al estudio del coeficiente de deformación de la convexidad métrica de curvas en  $\mathbb{R}^m$ . Iniciamos recordando algunas definiciones y en particular, la definición del coeficiente de deformación de la convexidad métrica.

Analizaremos primero el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de un grafo de funciones reales de variable real definidas en un intervalo  $[a, b]$ , para posteriormente generalizar a curvas en  $\mathbb{R}^m$ .

Por el grafo de  $f$  entenderemos el conjunto de puntos de  $\mathbb{R}^2$  definidos por la curva  $t \sim (t, f(t))$  para  $t \in [0, 1]$ .

**Definición 4.1.** El espacio métrico  $(X, d)$  se dice arco-conexo o conexo por arcos, si para cada  $x, y \in X$ , existe  $f : [0, 1] \rightarrow X$  continua, tal que

$$f(0) = x \text{ y } f(1) = y.$$

Es decir, existe una curva  $\Gamma_{xy}$  que conecta a  $x$  con  $y$ .

**Ejemplo 4.1.** Todo subconjunto convexo  $X$  de un espacio métrico normado sobre los reales es métricamente convexo.

La demostración es sencilla: Sean  $x, y \in X$  arbitrarios, entonces

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Además, para todo  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ , luego, si  $\|x - y\| = a + b$ , basta tomar  $\lambda = \frac{b}{a+b}$  para que se cumpla lo que se deseaba

$$\|x - z\| = a \text{ y } \|z - y\| = b.$$

Pueden existir conjuntos no convexos de un espacio normado, que sean métricamente convexos. Pero en  $\mathbb{R}^m$ , un conjunto es convexo si y sólo si es métricamente convexo.

Ahora sí podemos dar la definición de coeficiente de deformación de la convexidad métrica en un espacio métrico general.

**Definición 4.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico conexo por arcos y no vacío, definimos el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de  $(X, d)$  como el número finito o infinito

$$\rho(X) := \rho := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \inf_{\Gamma_{xy} \in \mathcal{C}_{xy}} \frac{\ell(\Gamma_{xy})}{d(x, y)}.$$

**Observación:**

Como  $d(x, y) \leq \ell(\Gamma_{xy})$ , se tiene que  $\rho \geq 1$ .

Consideremos ahora el siguiente problema:

Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y

$$G(f) := \{(t, f(t)) : t \in [0, 1]\}$$

el grafo de  $f$ . El problema es analizar bajo qué condiciones se tiene  $\rho(G(f)) < \infty$ .

Es claro que, si  $\rho(G(f)) < \infty$ , se tiene que la gráfica de  $f$  es rectificable. En efecto, observemos que en este caso, el camino  $(t, f(t)), t \in [0, 1]$ , por ser único salvo equivalencia, es el de longitud mínima (finita o infinita). Pero por definición de  $\rho$ , debe existir una curva rectificable que una  $(0, f(0))$  con  $(1, f(1))$ , luego el caso infinito no procede.

Analicemos algunos ejemplos para esclarecer aún más el problema que se ha planteado:

**Ejemplo 4.2.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

En este ejemplo  $f'$  existe en todo punto. En efecto, si  $x \in (0, 1]$ , se tiene

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}.$$

Mientras que  $f'(0)$  se calcula por definición

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x^2}}{x} = 0.$$

Pero  $\rho(G(f)) = \infty$ , pues no siendo  $f$  de variación acotada, su gráfica no es una curva rectificable. Notemos que  $f'$ , aunque existe en todo punto no está acotada alrededor del cero.

**Ejemplo 4.3.** Sea  $C$  el conjunto de Cantor. Definamos sucesivamente, en la clausura de los intervalos retirados (llamados intervalos contiguos), una función  $f$ , como sigue:  $f(x) = \frac{1}{2}$ , para  $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ,  $f(x) = \frac{1}{4}$ , para  $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ ,  $f(x) = \frac{3}{4}$ , para  $x \in [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ , etc.; es decir,

$$f(x) = \frac{k}{2^n}, \quad k = 1, 3, \dots, 2^n$$

para el  $k$  -ésimo intervalo contiguo incluyendo sus extremos, contándolos de izquierda a derecha, con longitud  $3^{-n}$ . De esta manera  $f$  queda definida en  $[0, 1]$ , excepto en los puntos del conjunto de Cantor que no son extremos de intervalos contiguos. Definimos ahora  $f$  por continuidad en los demás puntos. Se tiene así una función continua, creciente, con valores en  $[0, 1]$  que se llama la Escalera de Cantor. De esta manera,  $f$  es de variación acotada y por tanto rectificable, pero  $\rho(G(f)) = \infty$  pues la medida de Stieltjes asociada a la Escalera de Cantor tiene parte singular no nula respecto a la medida de Lebesgue.

**Proposición 4.1.** *Toda función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y con derivada uniformemente acotada, es rectificable. Además*

$$\wedge f(a, b) \leq (b - a) \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2},$$

donde,  $\|f'\|_\infty$  denota la norma uniforme de  $f'$  en  $[a, b]$ .

*Demostración.* Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \wp[a, b]$ , así

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k))^2 (x_k - x_{k-1})^2}, \text{ para algún } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k) \\ &= \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2} \\ &= (b - a) \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2}. \end{aligned}$$

De donde,  $\wedge f(a, b) \leq (b - a) \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2}$ . □

**Observación:**

La condición de diferenciabilidad en la proposición anterior, es una condición suficiente pero no necesaria. Para ver esto analicemos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.4.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Se tiene que  $f$  es rectificable a pesar de que  $f$  no es diferenciable en  $x = \frac{1}{2}$ .

**Corolario 4.1.** *Bajo las hipótesis de la proposición anterior, la función longitud de arco  $s$  asociada a  $f$ , está en  $Lip_\alpha [0, 1]$  para toda  $\alpha \in (0, 1]$ .*

*Demostración.* Como  $Lip_\beta \subseteq Lip_\alpha$  siempre que  $0 < \alpha \leq \beta < 1$ , basta analizar el caso  $\alpha = 1$ . Según la proposición anterior, para  $a \leq x < y \leq b$  se tiene

$$|s(y) - s(x)| = \wedge f(x, y) \leq |x - y| \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2}.$$

Entonces,  $s \in Lip_1 [0, 1]$ . □

**Teorema 4.1.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable, con derivada uniformemente acotada en todo el intervalo, entonces*

$$\rho(G(f)) \leq \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2} < \infty.$$

*Demostración.* Dos puntos arbitrarios en  $G(f)$  siempre se pueden conectar por un arco rectificable. Por otra parte si  $a \leq x < y \leq b$ , teniendo presente la proposición 4.1, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\wedge f(x, y)}{d((x, f(x)), (y, f(y)))} &\leq \frac{(y - x) \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2}}{\sqrt{(y - x)^2 + (f(y) - f(x))^2}} \\ &\leq \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2}. \end{aligned}$$

Tomando supremo a la izquierda, se tiene  $\rho(G(f)) \leq \sqrt{1 + \|f'\|_\infty^2} < \infty$ . □

El ejemplo 4.3 muestra que  $\rho(G(f))$  puede ser finito sin que  $f$  sea diferenciable. En el desarrollo de la teoría hemos logrado descubrir un bonito resultado que enunciamos a continuación.

**Proposición 4.2.** *Sea  $f \in F_{\mathbb{R}}^{[0,1]} \cap Lip_\alpha [0, 1]$ , con constante de Lipschitz  $k_{f_\alpha}$  para  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $\rho(G(f)) < \infty$  y  $s$  la función longitud de arco, entonces:*

- i)  $s \in Lip_\alpha [0, 1]$ .
- ii)  $k_{s_\alpha} \leq \rho(G(f)) (1 + k_{f_\alpha})$ .

Donde  $k_{s_\alpha}$  es la constante de Lipschitz de  $s$  con respecto a  $\alpha$ .

*Demostración.* Según la definición de  $\rho(G(f))$ , se tiene

$$\begin{aligned} i) \quad \rho(G(f)) &\geq \frac{\wedge f(x, y)}{\sqrt{(y-x)^2 + (f(y) - f(x))^2}} \text{ para todo } x \neq y \in [0, 1] \\ &\geq \frac{\wedge f(x, y)}{|x-y| + |f(x) - f(y)|} \\ &\geq \frac{\wedge f(x, y)}{|x-y| + k_{f_\alpha} |x-y|^\alpha} \geq \frac{\wedge f(x, y)}{|x-y|^\alpha (1 + k_{f_\alpha})}. \end{aligned}$$

Así  $|s(x) - s(y)| = \wedge f(x, y) \leq \rho(G(f)) |x-y|^\alpha (1 + k_{f_\alpha})$ , de donde  $s \in Lip_\alpha [0, 1]$ .

ii) Del inciso anterior tenemos:

$$\frac{|s(x) - s(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \rho(G(f)) (1 + k_{f_\alpha}) \text{ para } x \neq y \in [0, 1].$$

Tomando supremo a la izquierda de la desigualdad anterior, sobre los  $x \neq y \in [0, 1]$ , resulta

$$k_{s_\alpha} \leq \rho(G(f)) (1 + k_{f_\alpha}).$$

□

**Proposición 4.3.** *Sea  $\zeta$  una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$  tal que  $\rho(\zeta) < \infty$ . Entonces el coeficiente de deformación de la convexidad métrica para la región encerrada por esta curva sigue siendo finito.*

*Demostración.* Sea  $A$  la región encerrada por la curva de Jordan. Suponemos que el conjunto  $A$  no es convexo, pues si lo fuera claramente

$$\rho(A) = 1 < \infty.$$

Sean pues  $x, y \in A$  dos puntos arbitrarios distintos tales que no están en la parte

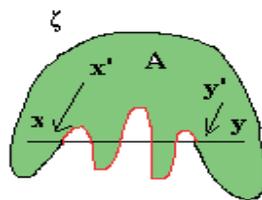


Figura 4.1: Región acotada por la curva de Jordan.

convexa de  $A$ , como se observa en la figura 4.1. Luego

$$\inf_{\Gamma_{xy}} \ell(\Gamma_{xy}) \leq \ell(\Gamma_{xx'}) + \ell(\Gamma_{x'y'}) + \ell(\Gamma_{y'y}); \text{ para } x', y' \in \zeta.$$

De donde,

$$\begin{aligned} \inf \frac{\ell(\Gamma_{xy})}{d(x, y)} &\leq \frac{\ell(\Gamma_{xx'})}{d(x, x')} + \frac{\ell(\Gamma_{x'y'})}{d(x', y')} + \frac{\ell(\Gamma_{y'y})}{d(y', y)} \\ &= 1 + \frac{\ell(\Gamma_{x'y'})}{d(x', y')} + 1. \end{aligned}$$

Tomando supremo, se tiene

$$\rho(A) \leq \rho(\zeta) + 2 < \infty.$$

□

Aplicando este resultado, se infiere que si  $S$  es una superficie plana con un contorno cerrado  $\zeta$  y  $\rho(\zeta) < \infty$ , entonces  $\rho(S) < \infty$ .

La hipótesis de que  $\rho(\zeta) < \infty$  es suficiente para que  $\rho(A) < \infty$ , pero no es necesaria, como se observa en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 4.5.** Sea  $A$  la región acotada por la curva como se muestra en la figura 4.2. Entonces  $\rho(A) < \infty$  y  $\rho(\zeta) = \infty$ , pues si  $t \in [0, 1]$ ,  $x = (-t, |t|^p)$ ,  $y = (t, |t|^p) \in \zeta$  se tiene que

$$\frac{\ell(\Gamma_{xy})}{d(x, y)} \geq \frac{2\sqrt{t^2 + t^{2p}}}{2t} = \sqrt{1 + \frac{1}{t^{2(1-p)}}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty.$$

Es decir,  $\rho(\zeta) = \infty$ .

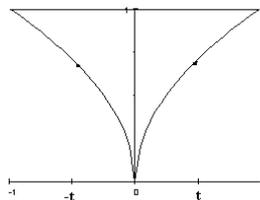


Figura 4.2: Región acotada por la curva  $f(x) = |x|^p$ ;  $0 < p < 1$  y el segmento de recta  $y = 1$ .

Para buscar condiciones que garanticen que el coeficiente de deformación de la convexidad métrica en superficies es finito, será un poco más complicado que en curvas por lo que se analizarán primero los siguientes resultados para después generalizarlos a superficies.

**Definición 4.3.** Sea  $\Gamma = \varphi([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^m$  una curva. Diremos que  $\Gamma$  tiene un coeficiente local de deformación de la convexidad métrica en  $\varphi(t)$  si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho(\varphi(B_r(t))) = \rho(\varphi(t)) < \infty.$$

Diremos que  $\Gamma$  tiene un coeficiente local de deformación de la convexidad métrica si  $\rho(\varphi(t)) < \infty$  para cada  $t \in [0, 1]$ .

**Teorema 4.2.** Sea  $\Gamma = \varphi([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^m$  una curva tal que es diferenciable en  $[0, 1]$ , con continuidad en  $t_0$  y  $\varphi'(t_0) \neq 0$ . Entonces

$$\rho(\varphi(t_0)) < \infty.$$

*Demostración.* Sean  $x, y \in B_r(t_0)$ , con  $0 \leq x < y \leq 1$ . Consideremos  $u, v \in \varphi(B_r(t_0))$  definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)); \\ v &= \varphi(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots, \varphi_m(y)). \end{aligned}$$

Calculando la longitud de arco de  $u$  a  $v$  se tiene

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_{uv}) &= s(\Gamma_{uv}) = \int_x^y \sqrt{(\varphi'(t))^2} dt \\ &= \int_x^y \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + (\varphi'_2(t))^2 + \dots + (\varphi'_m(t))^2} dt \\ &= \int_x^y \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(t))^2} dt \\ &= (y-x) \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(w))^2} \text{ para algún } w \in (x, y). \end{aligned}$$

Por otra parte  $d(u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi_i(y) - \varphi_i(x))^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi_i(z_i))^2} (y-x)$  para algunos  $z_i \in (x, y)$ . Luego

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} = \frac{(y-x) \sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(w))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(z_i))^2} (y-x)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(w))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(z_i))^2}}.$$

Como  $\varphi'$  es continua en  $[0, 1]$  y  $\varphi'(t) \neq 0$ , podemos tomar  $r > 0$  tal que  $\varphi'(t) \neq 0$  para cada  $t \in \bar{B}(t_0, r)$  y por tanto, existe  $i = 1, 2, \dots, m$  tal que  $m_i \leq |\varphi'(t)| \leq M_i$  con  $m_i > 0$ . Sea  $m = \min \{m_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ . Luego

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} &= \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(w))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (\varphi'_i(z_i))^2}} \leq \frac{\|\varphi'(w)\|}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (m_i)^2}} \\ &\leq \frac{\|\varphi'\|}{m} < \infty. \end{aligned}$$

Tomando supremo al lado izquierdo de la desigualdad se obtiene

$$\rho(\varphi(B_r(t_0))) \leq \frac{\|\varphi'\|}{m} < \infty,$$

y por lo tanto

$$\lim_{r \rightarrow 0} \rho(\varphi(B_r(t_0))) = \rho(\varphi(t_0)) < \infty.$$

□

**Corolario 4.2.** Sea  $\Gamma = \varphi([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^m$  una curva tal que es diferenciable con continuidad en  $[0, 1]$  y  $\varphi'(t) \neq 0$  para cada  $t \in [0, 1]$ . Entonces  $\Gamma$  tiene un coeficiente de deformación de la convexidad métrica local.

**Teorema 4.3.** Sea  $\Gamma$  una curva parametrizada por  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $\varphi$  es inyectiva,  $\Gamma$  rectificable y para todo  $t \in [0, 1]$ ;  $\rho(\varphi(t)) < \infty$ , entonces

$$\rho(\Gamma) < \infty.$$

*Demostración.* Sea  $t \in [0, 1]$  arbitrario. Como  $\rho(\varphi(t)) = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(\varphi(B_r(t)))$ , entonces para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta(\epsilon, t) = \delta$  tal que

$$|\rho(\varphi(B_r(t))) - \rho(\varphi(t))| < \epsilon,$$

para cada  $r$  tal que  $r < \delta$ . Luego, para cada  $t \in [0, 1]$ , existe  $r_t > 0$  tal que

$$\rho(\varphi(B_{r_t}(t))) < \rho(\varphi(t)) + \epsilon.$$

Se tiene así que  $\{B_{r_t}(t) : t \in [0, 1]\}$  es una cubierta abierta del compacto  $[0, 1]$ . Luego, podemos seleccionar una subcubierta finita

$$\{B_{r_{t_1}}(t_1), B_{r_{t_2}}(t_2), \dots, B_{r_{t_n}}(t_n)\}$$

de  $[0, 1]$  tal que:

1.  $t_i < t_{i+1}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .
2.  $u_i = B_{r_{t_i}}(t_i) \cap B_{r_{t_{i+1}}}(t_{i+1}) \neq \emptyset$ ;  $i = 1, 2, \dots, n-1$  es un intervalo de longitud  $\delta_i$ .
3.  $B_{r_{t_i}}(t_i) \not\subseteq u_i$ ,  $B_{r_{t_{i+1}}}(t_{i+1}) \not\subseteq u_i$  y  $B_{r_{t_i}}(t_i) \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} B_{r_{t_j}}(t_j)$ .

Seleccionemos

$$\alpha = \min \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_n}\}.$$

Ahora, como  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  es inyectiva, se tiene que  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \Gamma$  es biyectiva y continua. Como  $[0, 1]$  es compacto y de Hausdorff,  $\varphi$  resulta ser un homeomorfismo.

De donde por el teorema de Cantor,  $\varphi$  es uniformemente continua en  $[0, 1]$ . Luego, existe  $\alpha_0 > 0$  tal que  $|t - h| < \alpha$  siempre que

$$d(\varphi(t), \varphi(h)) = \|\varphi(t) - \varphi(h)\| < \alpha_0$$

Luego, para  $h \neq t$  en  $[0, 1]$  se tienen dos alternativas:

a)  $\|\varphi(t) - \varphi(h)\| < \alpha_0$

b)  $\|\varphi(t) - \varphi(h)\| \geq \alpha_0$ .

Si  $\|\varphi(t) - \varphi(h)\| < \alpha_0$ , entonces  $|t - h| < \alpha$ , luego  $h, t \in B_{r_{t_i}}(t_i)$  para algún  $i$ . De esta manera

$$\frac{\ell(\Gamma_{\varphi(h), \varphi(t)})}{d(\varphi(h), \varphi(t))} < \rho(\varphi(t_i)) + \epsilon.$$

Si  $\|\varphi(t) - \varphi(h)\| \geq \alpha_0$ , entonces

$$\frac{\ell(\Gamma_{\varphi(h), \varphi(t)})}{d(\varphi(h), \varphi(t))} \leq \frac{\ell(\Gamma_{\varphi(0), \varphi(1)})}{\alpha_0}.$$

Sea

$$k = \max \left\{ \frac{\ell(\Gamma_{\varphi(0), \varphi(1)})}{\alpha_0}, \rho(\varphi(t_i)) + \epsilon; i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Así, para  $h \neq t$  en  $[0, 1]$ , se tiene

$$\frac{\ell(\Gamma_{\varphi(h), \varphi(t)})}{d(\varphi(h), \varphi(t))} \leq k < \infty.$$

De donde se infiere que  $\rho(\Gamma) < \infty$ . □

**Corolario 4.3.** Si  $\Gamma$  es de Jordan, entonces  $\rho(\Gamma) < \infty$ .

*Demostración.* Considerese la métrica  $d$  en  $[0, 1)$  dada mediante

$$d(t, h) = \min \{|t - h|, 1 - |t - h|\}.$$

Con esta distancia  $[0, 1)$  es compacto y como  $\varphi$  es continua, define a  $\Gamma$  y además es inyectiva, entonces procedemos al caso ya estudiado, utilizando el hecho de que la distancia  $d$  y la euclídeana coinciden para distancias menores que  $\frac{1}{2}$ . □

**Corolario 4.4.** Si  $\Gamma$  es una curva parametrizada mediante  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $\varphi$  inyectiva o  $\Gamma$  de Jordan,  $\varphi'$  continua y en todo  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi'(t) \neq 0$ ; entonces  $\rho(\Gamma) < \infty$ .

# Capítulo 5

## Coeficiente de deformación de la convexidad métrica de superficies

Habiendo encontrado condiciones suficientes para que una curva tenga un coeficiente de deformación de la convexidad métrica finito, parece razonable enfocarnos al caso de superficies, por tal motivo en este capítulo se generalizan algunos de los resultados obtenidos para curvas analizando detalladamente la definición del coeficiente de deformación de la convexidad métrica para una superficie, puesto que ahora acotar este número resulta un tanto complicado.

### 5.1. Superficies simples o abiertas

**Definición 5.1.** Un subconjunto  $S$  en  $\mathbb{R}^3$  se llamará una superficie si es la imagen de una función continua

$$\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

La función  $\psi$  se llama una parametrización de  $S$ . La superficie  $S$  se llamará continuamente diferenciable, si  $\psi$  es continuamente diferenciable (es decir, existe  $\psi'$  y es continua).

En este contexto, el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de una superficie se define y se denota como sigue

$$\rho(S) = \sup_{\substack{u, v \in S \\ u \neq v}} \inf_{\Gamma_{uv} \in \mathcal{C}_{uv}} \frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)},$$

con  $d$  la distancia euclidiana.

Nuevamente definimos el concepto de deformación local de la convexidad métrica.

**Definición 5.2.** Se dice que una superficie  $S$  tiene un coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica en  $u = \psi(x)$  si

$$\rho_x = \lim_{r \rightarrow 0^+} \rho(\psi(B(x, r))) < \infty.$$

En el caso de que  $\rho_x < \infty$  para cada  $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ , diremos que  $S$  tiene un coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica.

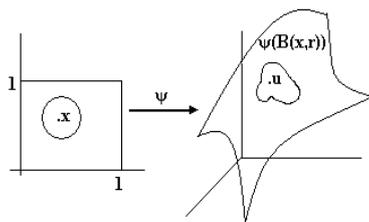


Figura 5.1: Imagen de  $B(x, r)$  bajo  $\psi$ .

De la definición de límite se tiene que dado  $\epsilon > 0$  existe  $r_0 > 0$  de tal manera que

$$|\rho(\psi(B(x, r))) - \rho_x| < \epsilon$$

para cada  $r > 0$  con  $0 < r < r_0$ . De donde si  $\rho_x < \infty$ , entonces dado  $\epsilon > 0$  existe  $r_0 > 0$  para el cual

$$\rho(\psi(B(x, r))) < \rho_x + \epsilon$$

para cada  $r$  tal que  $0 < r < r_0$ .

En lo que sigue (a menos que se especifique lo contrario)  $S$  será una superficie continuamente diferenciable parametrizada por la función

$$\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Sea  $S$  una superficie parametrizada por  $\psi$ . Para cada  $u, v \in S$  existen  $x, y \in [0, 1] \times [0, 1]$  tales que  $\psi(x) = u$  y  $\psi(y) = v$  con  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ .

El segmento de recta que une a  $x$  con  $y$  se parametriza mediante la siguiente función

$$\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

dada por

$$\begin{aligned} \chi(t) &= tx + (1-t)y = t(x_1, x_2) + (1-t)(y_1, y_2) \\ &= (tx_1, tx_2) + ((1-t)y_1, (1-t)y_2) \\ &= (tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2) \\ &= (\chi_1(t), \chi_2(t)). \end{aligned}$$

La composición  $\varphi = \psi \circ \chi$  es una función continua que define una curva  $\Gamma_{uv}^\varphi$  sobre

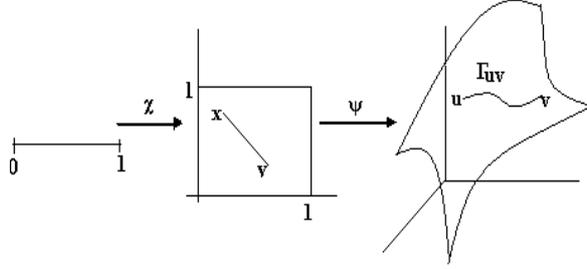


Figura 5.2: Curva generada por  $\varphi = \psi \circ \chi$ .

la superficie  $S$ . Además

$$\inf_{\Gamma_{uv} \in \mathcal{C}_{uv}} \frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq \frac{\ell(\Gamma_{uv}^\varphi)}{d(u, v)} \text{ y } \ell(\Gamma_{uv}^\varphi) < \infty,$$

puesto que  $\varphi$  es continuamente diferenciable (dado que la composición de funciones continuamente diferenciables es continuamente diferenciable).

Sea  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  y  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (\psi \circ \chi)(t) = \psi(\chi(t)) \\ &= (\psi_1(\chi(t)), \psi_2(\chi(t)), \psi_3(\chi(t))) \\ &= ((\psi_1 \circ \chi)(t), (\psi_2 \circ \chi)(t), (\psi_3 \circ \chi)(t)). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\varphi_i(t) = (\psi_i \circ \chi)(t)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \varphi'_i(t) &= D_1\psi_i(\chi(t)) \cdot (x_1 - y_1) + D_2\psi_i(\chi(t)) \cdot (x_2 - y_2) \\ &= \nabla\psi_i(\chi(t)) \cdot (x - y). \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \sqrt{(\varphi'_i(t))^2} &= |\varphi'_i(t)| = |\nabla\psi_i(\chi(t)) \cdot (x - y)| \\ &\leq \|\nabla(\psi_i \circ \chi)\|_\infty \|x - y\|_\infty \\ &\leq \sqrt{2} \|\nabla(\psi_i \circ \chi)\|_\infty \\ &= \sqrt{2} (\|D_1(\psi_i \circ \chi)\|_\infty + \|D_2(\psi_i \circ \chi)\|_\infty). \end{aligned}$$

De esta forma al aplicar el teorema del valor medio para integrales, se tiene

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_{uv}^\varphi) &= \int_0^1 \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + (\varphi'_2(t))^2 + (\varphi'_3(t))^2} dt \\ &= \sqrt{(\varphi'_1(\xi))^2 + (\varphi'_2(\xi))^2 + (\varphi'_3(\xi))^2}, \quad \xi \in (0, 1) \\ &\leq 3\sqrt{2}M = K, \end{aligned}$$

con

$$M = \text{máx} \{ \|D_1(\psi_i \circ \chi)\|_\infty + \|D_2(\psi_i \circ \chi)\|_\infty, i = 1, 2, 3 \}.$$

**Teorema 5.1.** *Si  $S$  es una superficie, entonces existe una constante  $K \geq 0$  de tal manera que para cada  $u, v \in S$ , existe una curva  $\Gamma_{uv}^*$  sobre la superficie con*

$$\ell(\Gamma_{uv}^*) \leq K.$$

*Demostración.* Seguir el preámbulo al teorema. □

Supongamos ahora que  $S$  es una superficie en la que  $\psi$  es inyectiva. Luego  $\psi$  es un homeomorfismo de  $[0, 1] \times [0, 1]$  en  $S$ , por tal motivo, para cada  $r > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $d(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) < \frac{r}{2}$  siempre que  $d(u, v) < \delta$ .

Sean ahora  $u, v \in S$  arbitrarios, pero  $u \neq v$ . Para estos dos puntos en particular pueden ocurrir dos casos:

1.  $d(u, v) \geq \delta$ .
2.  $d(u, v) < \delta$ .

Si  $d(u, v) \geq \delta$ , se tiene

$$\inf_{\Gamma_{uv} \in \mathfrak{L}_{uv}} \frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq \frac{\ell(\Gamma_{uv}^*)}{\delta} \leq \frac{K}{\delta}.$$

Por otra parte, si ocurre que  $d(u, v) < \delta$ , existe  $x \in [0, 1] \times [0, 1]$  tal que  $\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v) \in B(x, r)$ , es decir,  $u, v \in \psi(B(x, r))$ .

Si  $\rho(\psi(B(x, r))) < \infty$ , digamos  $\rho(\psi(B(x, r))) = M_r$ , entonces  $\frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq M_r$  para alguna curva  $\Gamma_{uv}$ , lo cual indica que estamos variando  $M_r$ . Para resolver esto demos primero la siguiente definición.

**Definición 5.3.** Sea  $S$  una superficie con un coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica. Diremos que el coeficiente local finito de la deformación de la convexidad métrica es uniforme, si existen  $M > 0, r > 0$  tal que para cada  $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ ,

$$\rho(\psi(B(x, r))) \leq M.$$

Luego, si  $r$  satisface la definición anterior, se cumple que  $\rho(\psi(B(x, r))) < M$ , de donde existe  $\Gamma_{uv}$  tal que

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq M,$$

luego, según la definición de  $\rho(S)$ , se tiene que

$$\rho(S) \leq \text{máx} \left\{ M, \frac{k}{\delta} \right\} < \infty.$$

De todo este análisis, se concluye el siguiente teorema.

**Teorema 5.2.** Si  $S$  es una superficie con  $\psi$  inyectiva y con coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica uniforme, entonces

$$\rho(S) < \infty.$$

*Demostración.* Sabemos que existe  $K > 0$  tal que para cada  $u, v \in S$ , existe  $\Gamma_{uv}^*$ , curva sobre la superficie, tal que  $\ell(\Gamma_{uv}^*) \leq K$ . Sean  $M$  y  $r$  que satisfacen la definición de uniformidad de coeficiente local finito de la convexidad métrica. Existe  $\delta > 0$  tal que

$$d(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) < \frac{r}{2}$$

siempre que  $d(u, v) < \delta$ .

Tomemos  $u, v \in S$  arbitrarios, pero  $u \neq v$ . Si  $d(u, v) \geq \delta$ , entonces

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv}^*)}{d(u, v)} \leq \frac{K}{\delta}.$$

Si  $d(u, v) < \delta$ , existe  $x \in [0, 1] \times [0, 1]$  tal que  $\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v) \in B(x, r)$  y se tiene que  $u, v \in \psi(B(x, r))$ .

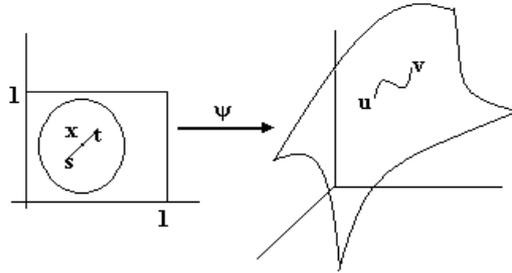


Figura 5.3:  $s = \psi^{-1}(u)$  y  $t = \psi^{-1}(v)$  están en  $B(x, r)$ .

Como  $\rho(\psi(B(x, r))) < M$ , existe una curva  $\Gamma_{uv}$  en  $\psi(B(x, r))$  tal que

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq M.$$

De donde, según definición de  $\rho(S)$ , se tiene

$$\rho(S) \leq \max \left\{ M, \frac{K}{\delta} \right\} < \infty.$$

□

Nuestra tarea ahora es encontrar condiciones suficientes para que la superficie  $S$  tenga coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica uniforme.

Mostraremos que si  $\psi$  es diferenciable con continuidad, entonces el coeficiente local finito de la convexidad métrica en  $S$  es uniforme. Para esto supongamos que  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  y que  $\psi$  está definida en una vecindad abierta  $V(\Omega)$ , en el cual es inyectiva y de clase  $C^1$  (diferenciable y con derivada continua).

Como  $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo, existe  $\epsilon > 0$  tal que

$$[-\epsilon, 1 + \epsilon] \times [-\epsilon, 1 + \epsilon] = \Omega_\epsilon \subseteq V(\Omega).$$

Obsérvese que

$$\frac{\partial \psi}{\partial (x_1, x_2)} = \frac{\partial (\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial (x_1, x_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_3}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Luego, si el rango de  $\frac{\partial \psi}{\partial (x_1, x_2)}$  es 2, digamos  $R = \text{rango } \frac{\partial (\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial (x_1, x_2)} = 2$ , entonces para cada  $\varsigma, x', y' \in \Omega_\epsilon$  con  $x' \neq y'$ , existe  $i, 1 \leq i \leq 3$  tal que

$$\psi'_i(\varsigma) = \nabla \psi_i(\varsigma) \cdot (y' - x') \neq 0.$$

En efecto, dado que  $R = 2$ , entonces

$$\dim \langle \nabla \psi_1(\varsigma), \nabla \psi_2(\varsigma), \nabla \psi_3(\varsigma) \rangle = 2$$

y por tanto, el vector no nulo  $y' - x' \in \mathbb{R}^2$  no puede ser ortogonal a los tres vectores simultáneamente.

Obsérvese que existe  $\delta > 0$  (ver figura 5.4) de tal manera que si  $x, y \in \Omega$ , existen únicos  $x', y' \in Fr(\Omega_\epsilon)$  tal que

1.  $x, y$  pertenecen a la combinación convexa de  $x'$  y  $y'$ .
2.  $d(x', y') = \|y' - x'\| \geq \delta$ .

De esta forma, la función

$$G(\varsigma, x', y') = \sum_{i=1}^3 (\nabla \psi_i(\varsigma) \cdot (y' - x'))^2 > 0$$

para cada  $(\varsigma, x', y') \in \Omega \times (Fr(\Omega_\epsilon) \times Fr(\Omega_\epsilon) \cap \{x', y' \in Fr(\Omega_\epsilon) : d(x', y') \geq \delta\}) = C$ .

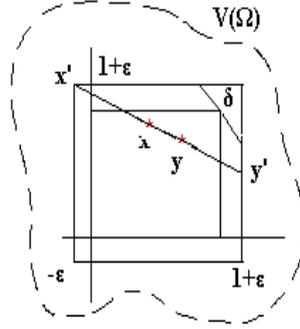


Figura 5.4: Vecindad de  $\Omega$ .

En virtud de que  $\psi'$  es continua en  $V(\Omega)$ , existe  $(\varsigma_0, x'_0, y'_0) \in C$ , tal que

$$m = G(\varsigma_0, x'_0, y'_0) = \min_{(\varsigma, x', y') \in C} G(\varsigma, x', y') > 0.$$

Nuevamente, de la continuidad de  $\psi'$  y la compacidad de  $C$ , existe  $r > 0$  tal que

$$|G(\varsigma, x', y') - G(\varsigma_1, x'_1, y'_1)| < m \text{ para } \|(\varsigma, x', y') - (\varsigma_1, x'_1, y'_1)\| < r,$$

pero esto implica que para cada  $w \in \Omega$ ,  $\varsigma, \varsigma_1 \in B(w, \frac{r}{2})$  y  $x', y' \in Fr(\Omega_\epsilon)$  con  $d(x', y') \geq \delta$  se cumple

$$\frac{G(\varsigma, x', y')}{G(\varsigma_1, x'_1, y'_1)} < 2.$$

Sea pues  $r$  que satisface lo anterior y sean  $u, v \in \psi(B(w, \frac{r}{2}))$  con  $u \neq v$ . Existen  $x, y \in B(w, \frac{r}{2})$  tal que  $u = \psi(x)$  y  $v = \psi(y)$ .

Para  $x, y \in B(w, \frac{r}{2})$ , existen únicos  $x', y' \in Fr(\Omega_\epsilon)$  tal que  $x, y$  pertenecen a la combinación convexa de  $x'$  y  $y'$ . Sea pues,

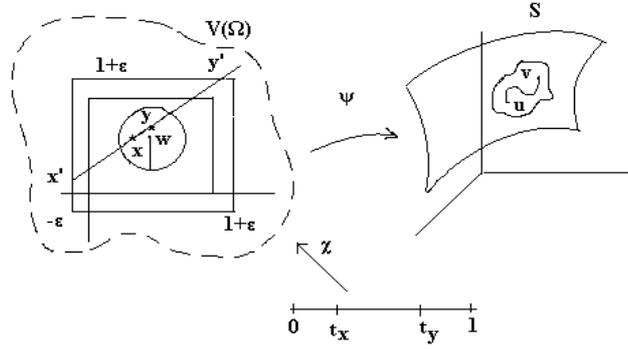
$$\chi(t) = (1-t)x' + ty',$$

definido sobre  $[0, 1]$ . Existen  $t_x, t_y$  con  $0 < t_x < t_y < 1$  tal que

$$\begin{aligned} x &= \chi(t_x) = (1-t_x)x' + (t_x)y' \\ y &= \chi(t_y) = (1-t_y)x' + (t_y)y'. \end{aligned}$$

La función  $\varphi(t) = (\psi \circ \chi)(t)$  restringida a  $[t_x, t_y]$  determina una curva rectificable sobre  $S$ , digamos  $\Gamma_{uv}$ . Además

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_{uv}) &= \int_{t_x}^{t_y} \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + (\varphi'_2(t))^2 + (\varphi'_3(t))^2} dt \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\varphi'_i(\xi))^2} (t_y - t_x), \text{ para algún } \xi \in (t_x, t_y), \end{aligned}$$


 Figura 5.5:  $\varphi(t) = (\psi \circ \chi)(t)$  en el intervalo  $[t_x, t_y]$ .

pero  $\varphi'_i(\xi) = \nabla \psi_i(\chi(\xi)) \cdot (y' - x')$ . De esta forma

$$\begin{aligned} \ell(\Gamma_{uv}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\nabla \psi_i(\chi(\xi)) \cdot (y' - x'))^2 (t_y - t_x)} \\ &= \sqrt{G(\chi(\xi), x', y')} (t_y - t_x). \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\varphi_i(t_y) - \varphi_i(t_x))^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\varphi'_i(h_i))^2 (t_y - t_x)} \text{ para algunos } t_x < h_i < t_y \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\nabla \psi_i(\chi(h_i)) \cdot (y' - x'))^2 (t_y - t_x)} \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\nabla \psi_i(\chi(h)) \cdot (y' - x'))^2 (t_y - t_x)} \text{ para algún } h \in (t_x, t_y) \\ &= \sqrt{G(\chi(h), x', y')} (t_y - t_x). \end{aligned}$$

De esta forma

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq \frac{\sqrt{G(\chi(\xi), x', y')} (t_y - t_x)}{\sqrt{G(\chi(h), x', y')} (t_y - t_x)} = \sqrt{\frac{G(\chi(\xi), x', y')}{G(\chi(h), x', y')}} < \sqrt{2} = M.$$

De donde

$$\rho(\psi(B(w, r))) \leq M + 1,$$

para cualquier  $w \in \Omega$ , y por lo tanto el coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica de  $S$  es uniforme.

## 5.2. Superficies cerradas

**Definición 5.4.** Sea  $S$  una superficie en  $\mathbb{R}^m$  parametrizada por la función  $\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Diremos que  $S$  es cerrada, si  $\psi$  es periódica y de periodo 1 en cada variable independiente. Es decir,  $S$  es cerrada si

$$\begin{aligned}\psi(x + 1, y) &= \psi(x, y) \\ \psi(x, y + 1) &= \psi(x, y)\end{aligned}$$

para  $x, y \in [0, 1]$ .

Identificaremos a  $S$  con  $\psi$ . Si  $\psi$  es cerrada, suponemos que  $\psi$  está definida sobre todo  $\mathbb{R}^2$ . Además suponemos que  $\psi \in C^1$  y que  $\psi$  es inyectiva en  $[0, 1) \times [0, 1)$  y que localmente se tiene

$$\text{rango} \left( \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)}{\partial(x_1, x_2)} \right) = 2.$$

$S$  se llamará semicerrada si es periódica y de periodo 1 en una sola de las variables independientes. Si  $S$  es semicerrada en la primera variable, es decir,

$$\psi(x + 1, y) = \psi(x, y),$$

supondremos que  $\psi$  está definida en  $\mathbb{R} \times (-\epsilon, 1 + \epsilon)$  y que  $\psi \in C^1$  es inyectiva en  $[0, 1) \times (-\epsilon, 1 + \epsilon)$  para algún  $\epsilon > 0$  fijo, en el cual se cumple (localmente)

$$\text{rango} \left( \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m)}{\partial(x_1, x_2)} \right) = 2.$$

**Teorema 5.3.** *Sea  $S$  una superficie semicerrada o cerrada, parametrizada por una función  $\psi$  que satisface las hipótesis establecidas anteriormente. Entonces*

$$\rho(S) < \infty.$$

*Demostración.* Supongamos que  $S$  es cerrada. Dividamos  $[0, 1] \times [0, 1]$  en cuatro cuadrados  $I^1, I^2, I^3, I^4$  de longitud  $\frac{1}{2}$ , como se observa en la figura 5.6.

$$\begin{aligned}I^1 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ I^2 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ I^3 &= \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ I^4 &= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right],\end{aligned}$$

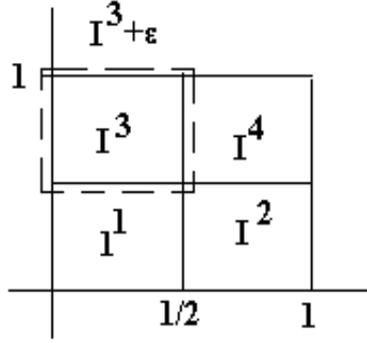


Figura 5.6: División de  $[0, 1] \times [0, 1]$  en cuadrados.

para cada  $1 \leq i \leq 4$ .

Haciendo

$$I_\epsilon^i = I^i + \epsilon = [a_i - \epsilon, b_i + \epsilon] \times [c_i - \epsilon, d_i + \epsilon]$$

siempre que  $I^i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$  y  $S_\epsilon^i = \psi(I^i + \epsilon)$ . Se obtiene,  $\rho(S_\epsilon^i) < \infty$ .

En  $X = [0, 1) \times [0, 1)$ , definamos la métrica

$$d_2(u, v) = \sqrt{(d_1(u_1, v_1))^2 + (d_1(u_2, v_2))^2}; u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$$

con  $d_1(a, b) = \min\{|b - a|, 1 - |b - a|\}$ . Ahora, el intervalo  $[0, 1)$  con la métrica  $d_1$  es isométrico a cualquier círculo de  $\mathbb{R}^2$  de perímetro 1, cuando la distancia de dos de sus puntos es la longitud del menor arco que los une. En tales círculos, la topología inducida por tal métrica coincide con la euclidiana. De todo esto, utilizando la compacidad de  $([0, 1), d_1)$  y el teorema de Tychonoff se concluye la compacidad de  $(X, d_2)$  y que  $\psi$  sea un homeomorfismo con su imagen  $S$ . Luego, existe  $r > 0$ , tal que, si  $u, v \in S$  y  $d(u, v) < r$ , entonces

$$d_2(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sean pues,  $u, v \in S$ ,  $u \neq v$  y  $x = \psi^{-1}(u), y = \psi^{-1}(v)$  y  $\epsilon > 0$  tomado desde el inicio. Luego, si  $d(u, v) \geq r$ , existe  $\Gamma_{uv}^*$  tal que

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv}^*)}{d(u, v)} \leq \frac{K}{r}.$$

Si  $d(u, v) < r$ ,  $d_2(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) < \frac{\epsilon}{2}$ . Esto implica que identificando en  $\mathbb{R}^2$  de módulo  $2\pi$  en cada coordenada, existe  $I_\epsilon^i$  en el cual  $\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)$  están unívocamente determinados y donde

$$d_2(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)) = d(\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)).$$

De esta manera, existe  $\Gamma_{uv}$  en  $S_\epsilon^i$ , tal que

$$\frac{\ell(\Gamma_{uv})}{d(u, v)} \leq \rho(S_\epsilon^i) + 1.$$

Por este último y recordando la definición de  $\rho(S)$ , se tiene

$$\rho(S) \leq \max \left\{ \frac{K}{r}, \rho(S_\epsilon^i) + 1; i = 1, 2, 3, 4 \right\}.$$

□

**Nota 5.1.** Cuando  $S$  es semicerrada, el esquema de la demostración es el mismo, basta dividir  $[0, 1] \times [0, 1]$  (o bien,  $[0, 1] \times [0, 1)$ ) en dos subrectángulos y que en  $X = [0, 1) \times [0, 1]$  se utilice la métrica

$$d_2(u, v) = \sqrt{(d_1(u_1, v_1))^2 + (d_1(u_2, v_2))^2}.$$

**Teorema 5.4.** Si  $S$  es una superficie cerrada simple (no se cruza) y  $\rho(S) < \infty$ , entonces  $\rho(X) < \infty$  donde  $X$  es la región acotada por la superficie  $S$ .

*Demostración.* Análoga al caso de la región acotada por una curva de Jordan con coeficiente de deformación de la convexidad métrica finito. □

# Conclusiones

Para la elaboración de esta tesis se introdujo el concepto de rectificación y longitud de arco de una curva en un espacio métrico arbitrario y se estudiaron sus propiedades. Se analizó primeramente el coeficiente de deformación de la convexidad métrica para el grafo  $G(f)$  de una función real  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  para posteriormente generalizar a curvas en  $\mathbb{R}^m$ . Se observó que si  $f$  es diferenciable con derivada uniformemente acotada, entonces  $\rho(G(f)) < \infty$ . También se analizó lo que pasaba con el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de la región acotada por una curva cerrada en  $\mathbb{R}^2$  cuyo coeficiente de deformación de la convexidad métrica es finito, obteniendo así que la hipótesis de que el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de la curva finito garantiza que el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de la región acotada sigue siendo finito. Sin embargo el recíproco no es cierto.

Dado que nuestro trabajo radicó especialmente en encontrar condiciones para la acotación del coeficiente de deformación de la convexidad métrica tanto en curvas como en superficies, fue necesario profundizar un poco más el análisis en curvas para generalizar posteriormente estos resultados a superficies, por ello, se introdujo el concepto de coeficiente local de deformación de la convexidad métrica y se buscaron condiciones mediante las cuales se puede garantizar que una curva tiene coeficiente local de deformación de la convexidad métrica finito, obteniendo así el siguiente resultado: si  $\Gamma = \varphi([0, 1]) \subseteq \mathbb{R}^m$  es una curva que es diferenciable con continuidad en  $[0, 1]$  y  $\varphi'(t) \neq 0$  para cada  $t \in [0, 1]$ , entonces  $\Gamma$  tiene un coeficiente local de deformación de la convexidad métrica finito. Teniendo presente este resultado y el hecho de que la función  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  que parametriza a  $\Gamma$  es inyectiva, además  $\Gamma$  rectificable, se concluye que el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de la curva es finito.

Para encontrar condiciones que garanticen que el coeficiente de deformación de la convexidad métrica de una superficie es finito, resulta sumamente complicado, puesto que ahora el concepto de coeficiente de deformación de la convexidad métrica es más complejo que en el caso de curvas, ya que por dos puntos sobre la superficie se pueden encontrar una infinidad de curvas que conectan a estos dos puntos. Luego, analizar cada una de estas curvas es difícil, por ello se estudió lo que pasaba a nivel local para después generalizarlo a toda la superficie.

Se probó que si  $S$  es una superficie cuya parametrización  $\psi : [0, 1] \times [0, 1]$  es continuamente diferenciable, entonces existe una constante  $k \geq 0$  de tal manera que para cada dos puntos en la superficie, existe al menos una curva sobre la superficie cuya longitud de arco es finita.

Al tratar de buscar condiciones para la acotación de  $\rho(S)$ , no fue suficiente la condición de que la superficie tuviera coeficiente local de deformación de la convexidad métrica finito como en el caso de curvas y fue necesario introducir un concepto más al cual llamamos coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica uniforme y finalmente se pudo concluir el siguiente resultado.

Si  $S$  es una superficie con  $\psi$  inyectiva (la función que parametriza a esta superficie) y  $S$  tiene coeficiente local finito de deformación de la convexidad métrica uniforme, entonces  $\rho(S) < \infty$ , obteniendo así lo que se deseaba.

# Notación

- $(X, d)$  : Espacio métrico distinto del vacío.  
 $E(x, B)$  : Mejor aproximación de  $x$  a  $B$ .  
 $P[a, b]$  : Partición del intervalo  $[a, b]$ .  
 $\Delta x_k$  : Longitud del subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$ .  
 $P_f$  : Partición en la curva asociada a  $f$  y a la partición  $P$ .  
 $\wedge P_f$  : Longitud de la partición  $P_f$ .  
 $\wedge f(a, b)$  : Longitud de arco de la función  $f : [a, b] \rightarrow X$ .  
 $F_X^{[a,b]}$  : Conjunto de todas las funciones continuas y rectificables.  
 $B_n f$  : Polinomio de Bernstein de  $f$  de grado  $n$ .  
 $B_{n,\alpha,\beta}(f, x)$  : Operadores de Bernstein- Stancu.  
 $B_{n,\alpha,\beta}^p(f, x)$  : Operadores  $p$  Bernstein-Stancu.  
 $\rho(X)$  : Coeficiente de deformación de la convexidad métrica de  $(X, d)$ .  
 $\Gamma_{xy}$  : Curva que une a  $x$  con  $y$ .  
 $\mathcal{C}_{xy}$  : Conjunto de curvas que unen a  $x$  con  $y$ .  
 $\ell(\Gamma_{xy})$  : Longitud de la curva  $\Gamma_{xy}$ .  
 $G(f)$  : Grafo de la función  $f$ .  
 $A_n \uparrow A$  : Sucesión creciente que converge a  $A$ .  
 $A_n \downarrow A$  : Sucesión decreciente que converge a  $A$ .  
 $C_{[a,b]}$  : Espacio de las funciones reales continuas definidas en el intervalo  $[a, b]$ .  
 $C_{2\pi}$  : Espacio de las funciones reales continuas de período  $2\pi$ .  
 $B(x, r)$  : Bola abierta con centro en  $x$  y radio  $r$ .  
 $B(X)$  : Espacio de Banach de las funciones reales acotadas en  $X$ .  
 $C(X)$  : Espacio de Banach de las funciones reales continuas y acotadas en  $X$ .  
 $\square$  : Fin de la demostración.

# Bibliografía

- [1] Francesco Altomare y Michele Campiti. *Korovkin-Type Approximation Theory and application*. Berlín; New York: de Gruyter, 1994.
- [2] James Dugundji. *Topology*. University of Southern California.
- [3] Jiménez Pozo, M. A. *Aproximación lineal y teoremas tipo Korovkin (breve curso)*. Laredo, 1992.
- [4] Jiménez Pozo, M. A. *Sobre la convergencia de operadores lineales y el método de funciones de prueba*. Centro Universitario Las Villas.
- [5] Theodore J. Rivlin. *An introduction to the approximation of functions*. Dover publication; New York.
- [6] Tom M. Apostol. *Análisis Matemático*. Segunda edición; editorial Reverte California Institute of Technology.
- [7] Cheney E. W. *Introduction to approximation theory*. Segunda edición. Chelsea; New York, 1982.
- [8] M.J.D. Powell. *An introduction to approximation theory*. Cambridge University Press; London New York Rochelle; Melbourne Sydney.
- [9] Robert G. Bartle. *Introducción al análisis matemático*. Limusa.