



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA MIXTECA

Espacios Topológicos Finitos y Estructuras Moleculares

TESIS

para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

MARÍA MAGDALENA HERNÁNDEZ GONZÁLEZ

Director de Tesis:

M.C. ADOLFO MACEDA MÉNDEZ

DR. ROLANDO JIMÉNEZ BENÍTEZ

Huajuapán de León, Oaxaca, a 30 de Julio de 2007.

Con cariño especial:

a mis padres,
Alfonso Marío Hernández L.
Silvia González L.;

a mis hermanos,
Fátima, Juan Antonio y Ariadna;

al recuerdo de mi amiga Caty y abuelos

y a Dios por ser mí fuerza.

Dedicatoria.

A mis padres por haberme apoyado en cada momento, por su confianza, cariño y soporte en tantos momentos difíciles; a mis hermanos por su comprensión durante estos cinco años de limitaciones y ausencia.

A mis tías Piedad y Josefina por ser las grandes madres para mi padre; a mis abuelos maternos por su amor incondicional, y al recuerdo de los que ya no están entre nosotros, y que tuve la oportunidad recibir su amor (María, Elena y Juan).

A mi familia en general, tíos y primos.

A mis amigos eternos y sus familias: Nataly, Maura, Areli A., Areli, Ana, Panty, Elvia, Paulo, Agustín, Pepe, Flavio, Erick, Jimmy, Román, Lety, y Caty que aunque ya no esta con nosotros físicamente por motivos que jamás lograré comprender, vivirá por siempre en mi corazón.

Y de manera especial a Roberto por soportar mis ocurrencias, y no dejar que el tiempo y la distancia cambie nuestra amistad y cariño mutuo; a Jazziel por ser siempre el consejero y apoyo en los momentos claves de mi vida desde hace tanto tiempo, entender cada una de mis decisiones, por darme tanto cariño en cada etapa de nuestra amistad y luchar juntos por no dejar que se pierda está; y por supuesto a Jorge porque durante estos cinco años fue cómplice de tantas locuras, por su cariño, amistad incondicional, apoyo en todos los momentos complicados y alegres que vivimos en la carrera, y por ser uno de motivadores para la realización de este trabajo y en buscar nuevos horizontes profesionalmente.

A mis amigos que he hecho durante mi estancia en Huajuapán por su cariño y a los que de alguna forma formaron parte de mi vida. A Cristian, Ale, Talis, Yoshi y Xavo por su amistad y complicidad en los últimos meses, ayudándome a encontrar la seguridad en mí nuevamente.

A todas las personas que han aportado algo en mi formación, y al profesor Gabriel por enseñarme y guiarme en una de mis grandes pasiones, la danza.

Introducción.

*Si simplemente hace girar la rueda es álgebra,
pero si contiene una idea es topología.
Solomon Lepschetz.*

En la historia de las matemáticas, los campos que han tenido los períodos largos en su gestación han resultado tener un impacto profundo en muchas áreas de esta, tal es el caso de la topología general y la teoría de conjuntos. La topología permite transformaciones no tan restringidas, transformaciones continuas, donde desaparece el concepto de distancia pero se preserva el de semejanza. Los espacios topológicos, pueden ser utilizados para investigar uno de los conceptos centrales en matemáticas: continuidad. Mapeos continuos (funciones) de un espacio en otro son las descripciones matemáticas de deformaciones espaciales. Las funciones continuas de ciertos tipos establecen una relación de equivalencia entre dos espacios. Cuando un mapeo es continuo y su función inversa es incluso continua, este es llamado un homeomorfismo. Tales homeomorfismos entre espacios topológicos son análogos a los isomorfismos entre espacios métricos.

Un espacio topológico abstracto finito no puede ser actualizado debido a la ausencia del acompañamiento de una métrica. Los químicos han utilizado conjuntos finitos con esto introdujeron fórmulas estructurales pictóricas. Tales modelos en la actualidad son conocidos como grafos matemáticos, y se procura estudiar la estructura química por el formalismo de la teoría de grafos que ha surgido. Espacios topológicos finitos como objetos matemáticos son el centro de interés, mientras que los grafos son un instrumento matemático subsidiario.

Esto no es tan inusual, para la teoría molecular orbital de un electrón y el análisis de simetría de teoría de grupos, representar moléculas como conjuntos finitos de sus orbitas atómicas particulares o átomos de si mismas. Probaremos un teorema estableciendo una correspondencia uno a uno entre una topología de un modelo molecular tridimensional y una topología finita conjunto-punto representando la molécula. Este teorema nos da la siguiente idea, un objeto (molécula) existe en \mathcal{R}^3 , y podemos hallar una topología de esos puntos de un espacio que son ocupados por el objeto en una forma que refleje su estructura. Más aún, la estructura molecular puede ser tomada como una representación finita de estos puntos. La construcción resultante puede ser pensada como una perturbación de una sección de \mathcal{R}^3 por la existencia de un objeto.

Ya que una topología para un espacio no contiene ningún elemento intrínseco de la teoría física, ¿Cómo podremos juzgar si un espacio topológico arbitrario es un modelo significativo para un sistema físico tal como una molécula? Necesitamos encontrar maneras de analizar una topología para que los elementos espaciales del espacio topológico puedan ser puestos dentro de una correspondencia

razonable con los elementos espaciales de la teoría física. Afortunadamente, el número de topologías en un espacio finito es finita, así nuestra búsqueda no será en vano. Un ejemplo podría ser el encontrar una topología en cuatro puntos acomodados en una línea cuyas propiedades se parezcan a la distribución π -*electrón* en el buteno. Como veremos mientras este problema no tenga solución única, el número de repuestas razonables físicas es pequeño.

Una estructura molecular puede ser escrita muy generalmente en términos de sus átomos constituyentes y sus relaciones entre ellos. Consideremos el objeto (X, Π) , donde X es el conjunto finito de átomos (puntos) y Π es una cubierta finita de X . Tal objeto tiene una semejanza formal al espacio topológico (X, \mathcal{T}) . Los elementos de Π pueden ser interpretados como el conjunto de "características" que son suficientes para caracterizar la estructura de X . (X, Π) describe el sistema de características de los objetos en X . Así, el elemento x posee característica S es equivalente a la inclusión $x \in S$ ($S \in \Pi$). Cuando x y y son más que adyacentes, entonces podemos decir, por ejemplo, que el conjunto S nos da la conexidad entre esos dos puntos.

¿Cómo formulamos una cubierta que refleje, por ejemplo, la estructura molecular?, ¿qué características son apropiadas para asociar con los átomos? En la descripción física de la estructura molecular, al menos dos características son necesarias: 1) La naturaleza química del átomo, y 2) la geometría de la estructura. Ambas características son naturalmente métricas y no se relacionan en una descripción topológica. El grafo asociado con tal estructura, sin embargo, usualmente ignora la característica 1), ya que todos los vértices son equivalentemente pesados y describe la característica 2) en términos del enlace covalente (arista). Tal grafo provee una descripción topológica general pero no contiene información suficiente para muchos propósitos. Así el objetivo principal del trabajo de tesis es investigar que tipos de relaciones son suficientes para describir las estructuras químicas y sus características mediante la construcción de espacios topológicos finitos.

Así el objetivo principal de este trabajo se enfocará a encontrar esta relación entre los espacios topológicos finitos y las estructuras moleculares, apoyándonos de los lattices y de la teoría de grafos, para hallar esta relación de manera mas clara y fácil para el manejo adecuado de las definiciones y resultados que se obtengan.

La estructura del trabajo es la siguiente. Se comienza por definir en el Capítulo 1, definiciones básicas de los espacios topológicos finitos, encontrando resultados verdaderamente importantes sobre las bases y sus elementos, que nos ayudaran a entender y construir de forma sencilla los resultados posteriores.

En el Capítulo 2 se estudia a los conjuntos parcialmente ordenados, de manera específica a los latices, sus características y variantes mas importantes, resaltando el teorema $M_3 - N_5$ sobre latices distributivos y modulares, en este capítulo también se introduce la forma de representación de las topologías a través de una latice.

En el Capítulo 3 se introduce la definición de grafo y dígrafo, además que se indica como se asocia un grafo a una topología.

En el Capítulo 4 se dan las definiciones de conexidad topológica y gráfica, y cuales son las características que hacen diferentes a los latices de los espacios conexos de los desconexos.

En el Capítulo 5 hablaremos de la forma en que podemos clasificar a los espacios topológicos, en espacios T_n y, espacios regulares y normales. Y como es su representación de manera gráfica de cada uno de los tipos de espacios.

Para el Capítulo 6 se estudiará la cardinalidad de los conjuntos conexos y el número existente de estos, en un espacio topológico; así como la construcción de sus funciones generadoras y la utilidad de su grafo asociado para ello.

A partir del Capítulo 7 se darán las definiciones y las relaciones preliminares entre un espacio topológico y una estructura molecular a la cual la llamaremos topología de enlace, apoyándonos de muchas de las características de los espacios topológicos estudiadas en los capítulos anteriores.

Finalmente en el capítulo 8 se tratará las relación existente entre una topología de enlace y el grafo asociado a tal topología llamándola topología gráfica; además de que se hallará una relación entre el modelo de Hückel con las propiedades combinatorias de alguna topología gráfica.

Aprovecho en esta parte para agradecerle de manera muy respetuosa a mis maestros por ser verdaderos guías en este camino, de manera particular al M.C. Juan Ramón Tijerina por su amistad, aliento, confianza y apoyo; al M.C. Vulfrano Tochihuitl Bueno y M.C. Gustavo Yáñez por sus magníficas clases. A mis sinodales M.C. Luz de Carmen Álvarez Marín, M.C. José Luis Carrasco Pacheco y a Dr. Virginia Berrón Lara, por su observaciones que fueron de gran utilidad para mejorar este trabajo a pesar del poco tiempo. Al Dr. Rolando Jiménez Benítez por su conocimientos, por a verme propuesto este trabajo que me a llenado de conocimientos y de satisfacciones, por el gran apoyo para que yo continuara con mis estudios y su comprensión durante mis estancias profesionales.

Y de manera especial, con la mayor gratitud que pueda ofrecer, a mi asesor el M.C. Adolfo Maceda Méndez por su apoyo, cariño, amistad incondicional que me brindo desde mi primer día en esta institución, por su acertadas palabras de aliento, comprensión y apoyo en cada uno de los momentos difíciles que viví, por siempre confiar y creer en mí, como estudiante. Por apoyarme en este proyecto que aunque no estamos tan familiarizados con el tema nunca me abandono en el camino y aunque yo si tuve momentos de desesperación siempre busco la manera de motivarme.

Índice general

Dedicatoria	I
Introducción	III
1. Espacios topológicos.	1
1.1. Definición de espacio topológico.	1
1.2. Conjuntos cerrados y la cotopología.	3
1.3. Bases irreducibles de una topología.	4
1.4. Clausura, coclausura, interior y frontera de un conjunto general.	7
1.5. Subespacios.	9
2. Topologías finitas y latices.	11
2.1. Conjuntos parcialmente ordenados y latices.	11
2.1.1. Diagramas.	13
2.1.2. Mapeos entre conjuntos parcialmente ordenados.	14
2.1.3. Latices.	18
2.2. Latices distributivos.	22
2.3. El teorema $M_3 - N_5$	24
2.4. Intervalos en latices distributivos.	27
2.5. Productos directos.	29
2.6. Reducibilidad	31
3. Topologías finitas y teoría de grafos	33
3.1. Topologías y grafos dirigidos.	33
3.2. Topologías y grafos	40
3.3. Subbases y grafos.	42
4. Conexidad.	45
4.1. Conexidad de espacios y subespaciostopológicos.	45
4.2. Conexidad en grafos	46
4.3. Latices de espacios conexos y desconexos.	49

5. Clasificación de Espacios Topológicos: Axiomas de Separación.	51
5.1. Espacios T_n .	51
5.2. Espacios regulares y normales.	56
6. Combinatoria.	61
6.1. Cardinalidad de una topología.	61
6.2. Cardinalidad de un subespacio.	67
6.3. Conjuntos Conexos.	70
6.4. Funciones Generadoras.	73
6.5. Funciones de correlación de dos puntos en espacios $T_{\frac{1}{2}}$.	77
6.5.1. Conjuntos abiertos que contienen un par dado.	77
6.5.2. Conjuntos abiertos y cerrados que contienen un par dado.	79
6.5.3. Conjuntos abiertos que contienen exactamente un miembro de un par.	79
7. Topología de Enlace.	81
7.1. Construcción de la Topología de Enlace	82
7.2. Estructura de la topología de enlace.	83
7.2.1. Estructura de grafo.	83
7.2.2. Estructura de Latices.	85
7.2.3. Clases Homeomorfas.	87
7.3. Propiedades combinatorias de la topología de enlace.	87
7.3.1. Funciones Generadoras.	87
7.3.2. Enlaces topológicos de pesos en un sistema π -electrón.	91
8. La topología gráfica.	95
8.1. La construcción de la topología gráfica.	95
8.2. Estructura de una topología gráfica	100
8.3. Propiedades Combinatorias de la Topología Gráfica	103
Conclusiones	106
Bibliografía	107

Capítulo 1

Espacios topológicos.

La espina desde que nace ya pincha
Proverbio Africano

En este capítulo se presentaran algunas definiciones básicas y resultados necesarios para la clara comprensión y familiarización con el texto, entre los que destaca la definición de espacio topológico y de base irreducible.

1.1. Definición de espacio topológico.

Definición 1.1. Un *espacio topológico* es un conjunto X con una *topología* \mathcal{T} , la cual es una colección de subconjuntos de X (llamados abiertos) que tiene las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío, \emptyset , y X son abiertos.
2. La unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierto.
3. La intersección finita de conjuntos abiertos es abierto.

Nota 1.1.

- i)* Es necesario aclarar que en este trabajo sólo se considera el caso en que X es finito.
- ii)* En adelante se representarán los conjuntos de la forma $\{1, 2, 3, \dots n\}$ como $123 \dots n$.

Ejemplo 1.1. Hay cuatro posibles topologías en un conjunto de dos elementos $X = \{1, 2\}$

1. $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$,
2. $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, 1, X\}$,

$$3. \mathcal{T}_3 = \{\emptyset, 2, X\},$$

$$4. \mathcal{T}_4 = \{\emptyset, 1, 2, X\},$$

y sus diagramas de Venn son:

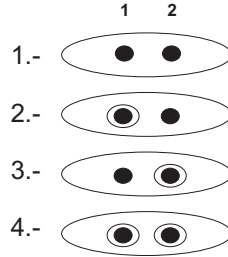


Figura 1.1: Ejemplo.

Definición 1.2. Sean (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) espacios topológicos, un *homeomorfismo* es una correspondencia biyectiva $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(U)$ es abierto ($f(U) \in \mathcal{T}_2$) si y sólo si, U es abierto ($U \in \mathcal{T}_1$). Dos espacio topológicos (X, \mathcal{T}_1) e (Y, \mathcal{T}_2) se dicen *homeomorfos* o *equivalentes*, si existe un homeomorfismo de X sobre Y .

Observación 1.1. Para cualquier conjunto X la topología $\{\emptyset, X\}$ es llamada la *topología indiscreta*, y la formada por todos los subconjuntos de X , es llamada la *topología discreta*. Para el ejemplo 1.1, (X, \mathcal{T}_2) y (X, \mathcal{T}_3) son topológicamente equivalentes, u *homeomorfos*, estas cuatro topologías pueden ser ordenadas parcialmente por inclusión.

En la siguiente tabla se muestra el número de topologías posibles que se pueden construir para algún espacio X , donde la columna de *etiquetado*^a nos muestra el número total de topologías y la columna de *no etiquetado* nos indica el número de clases de homeomorfismos.

Número de puntos.	Número de topologías.	
	Etiquetado ^a	No etiquetado
2	4	3
3	29	9
4	355	33
5	6,942	139
6	209,527	----
7	9,535,241	----

Cuadro 1.1: Número de topologías.

Ejemplo 1.2. En el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ hay 33 distintas topologías (no etiquetadas) como se puede ver en la tabla anterior.

Tres de estas posibles topologías son:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}, \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, 1, 12, 13, 14, 123, 124, 134, X\}, \\ \mathcal{T}_3 &= \{\emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, X\}\end{aligned}$$

Estos dos ejemplos ilustran varios puntos.

- Aún para conjuntos pequeños, es posible hallar un número de topologías grande.
- La cardinalidad de una topología aumenta rápidamente con el número de puntos en el espacio.

Entre las finalidades principales de la topología de conjuntos finitos está el desarrollo de técnicas para construir topologías; analizar sus estructuras, las cuales son una representación perfecta de sus características.

1.2. Conjuntos cerrados y la cotopología.

Definición 1.3. Un subconjunto A de un espacio topológico X es llamado *cerrado* si su complemento $A^c = X - A$ es abierto.

Definición 1.4. A la colección de subconjuntos cerrados de la topología de X se le llama *cotopología*.

Puesto que hay correspondencia uno a uno entre los conjuntos abiertos y cerrados, un espacio tiene el mismo número de los dos tipos de conjuntos.

Ejemplo 1.3. Consideremos las tres topologías para $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dado en el ejemplo 1.2, sus cotopologías correspondientes son:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \{\emptyset, 2, 4, 12, 24, 124, 234, X\}, \\ \zeta_2 &= \{\emptyset, 2, 3, 4, 23, 24, 34, 234, X\}, \\ \zeta_3 &= \{\emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, X\}.\end{aligned}$$

Estas se obtienen al calcular los complementos de los elementos de \mathcal{T}_i para $i = 1, 2, 3$.

En este caso se verifica que cada una de las colecciones de conjuntos cerrados de este ejemplo satisface las condiciones de una topología; ya que se observa que incluyen al \emptyset y X y son cerrados bajo la unión y la intersección.

Nota 1.2. Denotaremos a la cotopología de \mathcal{T} por \mathcal{T}^* .

Esto se cumple de manera general en un espacio finito, como se mencionará adelante:

Observación 1.2. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y X finito, entonces la cotopología \mathcal{T}^* correspondiente a la topología \mathcal{T} es también una topología de X .

Observación 1.3. Como consecuencia directa de la observación 1.2 tenemos que (X, \mathcal{T}^*) es un espacio topológico.

Observación 1.4. La relación de la topología-cotopología es simétrica, es decir, $\mathcal{T}^{**} = \mathcal{T}$. Observamos además que \mathcal{T} y \mathcal{T}^* no son necesariamente distintos.

Lo anterior se ilustrará en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.4. Consideremos a $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y su topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 12, 34, X\}$, al calcular los complementos de los elementos de la topología tenemos que, $\mathcal{T}^* = \{\emptyset, 12, 34, X\}$ y por tanto $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$

Ejemplo 1.5. Sean $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 12, 123, X\}$ y $\mathcal{T}^* = \{\emptyset, 4, 34, 234, X\}$. Claramente $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}^*$. Sin embargo \mathcal{T} y \mathcal{T}^* son homeomorfos ya que se transforman el uno al otro bajo la permutación $1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3$.

Observación 1.5. Finalmente, la topología-cotopología pueden ser topológicamente distintas. Esta última característica la ilustramos en el ejemplo 1.6.

Ejemplo 1.6. Finalmente para $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, X\}$ y $\mathcal{T}^* = \{\emptyset, 234, X\}$ son topológicamente distintos. Ya que no podemos hallar alguna permutación que nos transforme \mathcal{T} en \mathcal{T}^* o \mathcal{T}^* en \mathcal{T} .

Es necesario enfatizar que esta dualidad topología-cotopología es solamente una característica de espacios finitos; ya que los conjuntos cerrados de un espacio infinito, generalmente no satisface los axiomas de una topología. Esta es una de los más importantes diferencias entre espacios finitos e infinitos.

1.3. Bases irreducibles de una topología.

Antes de dar la definición de una base irreducible es necesario definir qué es una base y el por qué de la necesidad de construirla. Como hemos visto en el cuadro 1.1. el tamaño de una topología aumenta de manera exponencial dependiendo del número de puntos en el espacio. Sería deseable describir un espacio topológico en términos de un número de conjuntos mucho más pequeño.

Es necesario prestar total interés en la definición y construcción de una base irreducible ya que será de gran utilidad en lo que resta del trabajo.

Definición 1.5. En un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se dice que una colección \mathfrak{B} de elementos de \mathcal{T} , es una *base* de la topología \mathcal{T} , si todo elemento de \mathcal{T} , es decir, si todo abierto de la topología \mathcal{T} , es expresable como unión de elementos de \mathfrak{B} .

Ejemplo 1.7. Sean $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}$ como en el ejemplo 1.2. La colección $\mathfrak{B}_1 = \{1, 3, 34, 123\}$ es una base para \mathcal{T}_1 , ya que todos los elementos de la topología pueden ser expresados como unión de elementos de \mathfrak{B}_1 , esto es:

$$\begin{aligned} 13 &= 1 \cup 3, \\ 134 &= 1 \cup 34, \\ X &= 123 \cup 34. \end{aligned}$$

Los elementos 1, 3, 34, 123 son expresados como un único elemento, mientras que \emptyset es generado por la unión vacía de elementos de \mathfrak{B}_1 .

Nota 1.3. Incluso, cualquier colección de los conjuntos abiertos restantes de \mathcal{T}_1 , puede ser adjuntada a \mathfrak{B}_1 , y el resultado sería otra base para \mathcal{T}_1 .

Observación 1.6. En general una topología tiene muchas bases.

Definición 1.6. Una *cubierta abierta* de $A \subseteq X$ es una colección C de abiertos tales que cada punto de A pertenece a uno de los abiertos en C .

Definición 1.7. La cubierta es *finita* si consiste de un número finito de abiertos.

Definición 1.8. Una cubierta D es *más fina* que otra cubierta C si cada abierto de C contiene un abierto de D .

Definición 1.9. El *orden* de una cubierta finita C de X es el máximo número de abiertos de C que tienen una intersección no vacía.

Teorema 1.1. Sea un espacio topológico X , dada una colección \mathfrak{B} de subconjuntos de X las siguientes condiciones son equivalentes:

1. \mathfrak{B} es un base para una topología sobre X .
2. \mathfrak{B} cumple:
 - i) Los elementos de \mathfrak{B} forman una cubierta para X .
 - ii) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x , tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Una colección \mathcal{S} de subconjuntos que satisfacen el criterio *i)* es llamado *subbase* para la topología de X . De manera más formal definimos una subbase como.

Definición 1.10. Sea X un conjunto. Una *subbase* \mathcal{S} para una topología \mathcal{T} sobre X es una colección de subconjuntos de X cuya unión es igual a X .

Teorema 1.2. Si \mathcal{S} es una subbase para una topología en un conjunto X entonces la colección \mathcal{T} de todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de \mathcal{S} es una topología en X llamada la topología generada por la subbase \mathcal{S} .

La base para la topología generada por \mathcal{S} es la colección de todas las intersecciones de los elementos \mathcal{S} . Es claro que esta es cerrada bajo la intersección y de este modo satisface el criterio *ii)*.

Definición 1.11. Una *base irreducible* de un espacio topológico finito es una base, donde ninguno de sus elementos puede ser expresado como una unión de otros elementos de la base.

Observación 1.7. De la definición anterior se observa que una base irreducible es no vacía.

Consideremos la colección de conjuntos, para cada punto en el espacio:

Definición 1.12. Definimos;

i)

$$\mathcal{B}_p = \bigcap \{ \mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T} \},$$

ii)

$$\mathcal{B}_{p^*} = \bigcap \{ \mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}^* \},$$

Observación 1.8.

- \mathcal{B}_p es el conjunto abierto más pequeño que contiene a p .
- \mathcal{B}_p^* es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a p .

Proposición 1.1. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) . La colección de conjuntos

$$\mathfrak{B} = \{ \mathcal{B}_p \mid p \in X \}$$

es una base irreducible para la topología \mathcal{T} .

Demostración. Para cualquier conjunto abierto $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$, y para cualquier $p \in \mathcal{O}$ implica que $\mathcal{B}_p \subset \mathcal{O}$ ya que $\mathcal{B}_p = \bigcap \{\mathcal{O} | p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$, y por lo tanto

$$\mathcal{O} = \bigcup \{\mathcal{B}_p | p \in \mathcal{O}\}.$$

Ahora probemos que \mathfrak{B} es irreducible. Supóngase que $B_p = \bigcup B_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, luego $B_i \subset B_p$, en particular $B_p \subset B_r$ con $1 \leq r \leq n$; así $p \in B_r$. Por otra parte, si $p \in B_i$ entonces $B_p \subset B_i$ y por la definición de B_p se tiene que esto sólo ocurrirá si $B_p = B_r$. \square

Ejemplo 1.8. Los elementos de la base irreducible de la primera topología, de los puntos del ejemplo 1.2, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}$. son

$$\mathcal{B}_1 = 1,$$

$$\mathcal{B}_2 = 123,$$

$$\mathcal{B}_3 = 3,$$

$$\mathcal{B}_4 = 34.$$

Observación 1.9.

- i) Para la topología indiscreta $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{B}_p = X$ para toda $p \in X$.
- ii) Para la topología discreta, $\mathcal{B}_p = \{p\}$ para toda $p \in X$.
- iii) La base irreducible de cualquier topología en X tiene a lo más $|X|$ elementos distintos.

1.4. Clausura, coclausura, interior y frontera de un conjunto general.

Definición 1.13.

- i) La *clausura* de A es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A , y se denota por \overline{A} .
- ii) La *coclausura* de A es la intersección de todos los conjuntos abiertos que contienen a A y se denota por \widehat{A} .

Observación 1.10.

- i) $A = \overline{A}$ si y sólo si A es cerrado.

ii) $A = \widehat{A}$ si y sólo si A es abierto.

Ejemplo 1.9. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \overline{14} &= 124, & \widehat{14} &= 134 \\ \overline{23} &= 234, & \widehat{23} &= 123 \end{aligned}$$

Recordemos que los conjuntos de \mathcal{T} son abiertos y los de \mathcal{T}^* son cerrados.

De las definiciones 1.12 y 1.13, tenemos la siguiente observación.

Observación 1.11.

i) $\mathcal{B}_p = \{\widehat{p}\},$

ii) $\mathcal{B}_{p^*} = \{\overline{p}\}.$

Proposición 1.2. *La clausura y la coclausura tienen las siguientes propiedades llamadas Los Axiomas de Clausura de Kuratowski:*

i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

i') $\widehat{\emptyset} = \emptyset$

ii) $A \subset \overline{A}$

ii') $A \subset \widehat{A}$

iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

iii') $\widehat{A \cup B} = \widehat{A} \cup \widehat{B}$

iv) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

iv') $\widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$

Observación 1.12. En virtud de *iii)* y de *iii')* de la proposición 1.2, podemos escribir la clausura y coclausura de un subconjunto del espacio topológico en términos de los elementos básicos de su cotopología y topología respectivamente:

i) $\overline{A} = \bigcup_{p \in A} \mathcal{B}_{p^*},$

ii) $\widehat{A} = \bigcup_{p \in A} \mathcal{B}_p.$

Demostración.

i) $\overline{A} = \overline{\bigcup_{p \in A} \{p\}} = \bigcup_{p \in A} \overline{\{p\}} = \bigcup_{p \in A} \mathcal{B}_{p^*},$

$$ii) \widehat{A} = \widehat{\bigcup_{p \in A} \{p\}} = \bigcup_{p \in A} \widehat{\{p\}} = \bigcup_{p \in A} B_p,$$

□

Definición 1.14. Un subconjunto A de un espacio topológico X para el cual $\overline{A} = X$ es llamado *denso* en X .

Ejemplo 1.10. Para el ejemplo 1.9, los subconjuntos densos son 13 , 123 , 134 y X .

Definición 1.15. Para cualquier subconjunto A de X de un espacio topológico.

1. El *interior* de A es la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A .
2. El *cointerior* de A es la unión de todos los conjuntos cerrados contenidos en A .
3. El *exterior* de A es el interior de A^c .
4. La *frontera* de A es $\overline{A} \cap \overline{A^c}$, el conjunto de puntos que no pertenecen ni al interior ni al exterior de A .

Es claro que el interior siempre es un conjunto abierto y el cointerior es un conjunto cerrado.

1.5. Subespacios.

Definición 1.16. Un subespacio de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es un subconjunto $Y \subset X$ junto con la topología

$$\mathcal{T}_Y = \{\mathcal{O} \cap Y \mid \mathcal{O} \in \mathcal{T}\},$$

llamada *topología relativa* en Y .

Observación 1.13. Que \mathcal{T}_Y sea en efecto una topología se sigue de que:

- i) $\emptyset = \emptyset \cap Y$,
- ii) $Y = X \cap Y$,
- iii) $(\mathcal{O}_1 \cap Y) \cup (\mathcal{O}_2 \cap Y) = (\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2) \cap Y$,

$$iv) (\mathcal{O}_1 \cap Y) \cap (\mathcal{O}_2 \cap Y) = (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) \cap Y.$$

Ejemplo 1.11. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}.$$

Para el subconjunto $Y = \{2, 3, 4\}$, encontramos que la topología relativa de Y es

$$\mathcal{T}_Y = \{\emptyset, 3, 23, 34, Y\}.$$

Observación 1.14. Del ejemplo anterior se observa que el conjunto $23 \in \mathcal{T}_Y$ lo que implica que es un abierto en Y , pero no es ni abierto ni cerrado en X . A este tipo de conjuntos les llamaremos *abiertos relativos* en Y .

Recordemos que

$$\mathcal{B}_p = \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}. \quad (1.1)$$

Si $p \in Y$, entonces el conjunto abierto más pequeño en Y que contiene a p es

$$\mathcal{B}_{Y,p} = \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\} \cap Y, \quad (1.2)$$

así

$$\mathcal{B}_{Y,p} = \mathcal{B}_p \cap Y \quad p \in Y \quad (1.3)$$

Ejemplo 1.12. Para el subespacio dado en el ejemplo 1.11 se tiene que:

$$\mathcal{B}_{Y,2} = 123 \cap Y = 23,$$

$$\mathcal{B}_{Y,3} = 3 \cap Y = 3,$$

$$\mathcal{B}_{Y,4} = 34 \cap Y = 34.$$

Capítulo 2

Topologías finitas y latices.

El compromiso es un acto, no una palabra.
Jean-Paul Sartre.

Hasta el momento sólo se ha tratado a un espacio topológico como un listado explícito de todos los conjuntos abiertos o a través de los elementos básicos de su base irreducible, pero en ninguno de los dos casos se da la suficiente información sobre la estructura del espacio. En este capítulo se describirá una manera alternativa de representar un espacio topológico que es matemáticamente equivalente, considerando las siguientes definiciones y resultados de conjuntos parcialmente, de manera particular de los latices y resaltando el teorema $M_3 - N_5$.

2.1. Conjuntos parcialmente ordenados y latices.

Dado un par de conjuntos abiertos, ellos se relacionan en alguna de las siguientes formas:

- i)* Son disjuntos.
- ii)* Se intersectan pero ninguno es subconjunto del otro.
- iii)* Uno es subconjunto del otro.

Si se cumple la última posibilidad, los dos conjuntos son comparables, en otro caso son incomparables.

Definición 2.1. Sea P un conjunto. Un *orden parcial* (o simplemente orden) en P es una relación binaria \leq en P tal que, para todo $x, y, z \in P$,

- i)* $x \leq x$, (reflexiva).
- ii)* $x \leq y$ y $y \leq x$ implica que $x = y$, (antisimétrica);

iii) $x \leq y$ y $y \leq z$ implica que $x \leq z$, (transitiva).

Definición 2.2. La relación de orden \leq en un conjunto P , da lugar a la relación $<$, la cual cumple que: $x < y$ en P si y sólo si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Definición 2.3. Un *conjunto P parcialmente ordenado*, es aquel conjunto, junto con un orden parcial definido en sus elementos.

Observación 2.1. Sean P un conjunto parcialmente ordenado y Q un subconjunto de P . Entonces Q hereda la relación de orden de P , dados $x, y \in Q$, $x \leq y$ en Q si y sólo si $x \leq y$ en P . Se dice que Q tiene el orden inducido de P .

Definición 2.4. Sea un conjunto parcialmente ordenado P . Entonces P es un *cadena*, si para todo $x, y \in P$ ocurre que $x \leq y$ o $y \leq x$ (esto es, si dos elementos de P son comparables).

Definición 2.5. (Familias de Conjuntos)

Sea X un conjunto. El conjunto $\mathcal{P}(X)$, consiste de todos los subconjuntos de X , los cuales están ordenados por inclusión: para $A, B \in \mathcal{P}(X)$, se define $A \leq B$ si y sólo si $A \subseteq B$.

Teorema 2.1. Si (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico, entonces \mathcal{T} , con la relación de orden inducida por la inclusión es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.6. (Relación de cobertura)

Sea P un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que x está *cubierta* por y (o que y cubre a x), y se escribe como $x \prec y$ (o $y \succ x$), si $x < y$ y $x \leq z < y$ implica que $z = x$. Lo anterior indica que no existe un elemento z de P tal que $x < z < y$.

Ejemplo 2.1.

1. En la cadena de los números naturales \mathbf{N} , se tiene que $m \prec n$ si y sólo si $n = m + 1$.
2. En \mathbf{R} , no existe un par x, y tal que $x \prec y$.
3. En $\mathcal{P}(X)$, se cumple que $A \prec B$ si y sólo si $B = A \cup \{b\}$, para algún $b \in X - A$.

2.1.1. Diagramas.

Definición 2.7. Sea P un conjunto finito parcialmente ordenado. Podemos representar a P por una configuración de círculos (que representan a los elementos de P) y los cuales son conectados por líneas (con la cual se representa la relación de cobertura entre dos elementos). La construcción de este *diagrama* es de la siguiente forma:

1. A cada punto $x \in P$, se le asocia un punto $P(x)$ en el plano euclidiano \mathbb{R}^2 , representado por un círculo pequeño con centro en $P(x)$.
2. Para cada par cubriente $x \prec y$ en P , se toma un segmento de línea $l(x, y)$, uniendo el círculo en $P(x)$ a el círculo en $P(y)$.
3. Cumpliendo 1 y 2, se tiene que:
 - a) Si $x \prec y$, entonces $P(x)$ esta más abajo de $P(y)$.
 - b) El círculo en $P(z)$ no interseca al segmento de línea $l(x, y)$ si $z \neq x$ y $z \neq y$.

Una configuración que satisface los enunciados 1 – 3 de la definición anterior es llamado *diagrama* o *diagrama de Hasse* de P .

Observación 2.2. $x < y$ si y sólo si hay una secuencia de segmentos de líneas conectadas hacia arriba de x a y .

Ejemplo 2.2. Consideremos la siguiente colección de subconjuntos de $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, 1, 2, 12, 23\}$ (\mathcal{A} no es una topología de X , ya que no incluye a X), los cuales están ordenados por inclusión. El diagrama de Hasse de \mathcal{A} es:

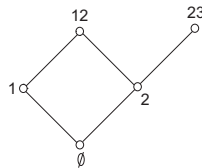


Figura 2.1: Diagrama de Hasse \mathcal{A} .

Ejemplo 2.3. Para la siguiente topología de $X = \{1, 2, 3, 4\}$, donde sus elementos están ordenados por inclusión;

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, 2, 3, 12, 23, 34, 123, 234, X\}.$$

El diagrama de Hasse es:

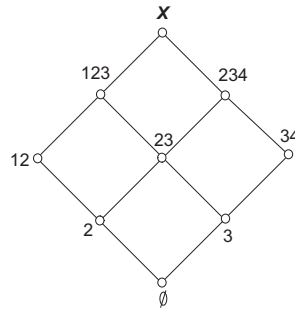


Figura 2.2: Diagrama de Hasse de \mathcal{T} .

2.1.2. Mapeos entre conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 2.8. Sea P y Q conjuntos parcialmente ordenados. Un mapeo $\varphi : P \rightarrow Q$ es llamado:

- i) creciente (monótono)*, si $x \leq y$ en P implica $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en Q .
- ii) encaje*, si $x \leq y$ en P si y sólo si $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ en Q .
- iii) isomorfismo*, si este es un encaje mapeando P sobre Q .

Cuando $\varphi : P \rightarrow Q$ es un encaje se escribe como $\varphi : P \hookrightarrow Q$. Cuando existe un isomorfismo de P a Q , se dice que P y Q son isomorfos y se escribe como $P \cong Q$.

Ejemplo 2.4. En la figura 2.3 se observa que el mapeo φ_1 no es creciente, φ_2 es creciente pero no un encaje, y φ_3 es un encaje, pero no un isomorfismo.

Observación 2.3.

1. Sean los mapeos crecientes $\varphi : P \rightarrow Q$ y $\psi : Q \rightarrow R$. Entonces el mapeo composición $\psi \circ \varphi$, dado por $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ para $x \in P$, es creciente. De manera más general la composición de un número finito de mapeos crecientes es creciente.

2. Sean $\varphi : P \hookrightarrow Q$ y $\varphi(P)$ la imagen de φ . Entonces $\varphi(P) \cong P$. Esto justifica el uso del término encaje.
3. Un encaje es automáticamente uno-uno (porque \leq es reflexiva en Q y antisimétrica en P). Un isomorfismo es biyectivo.
4. Conjuntos parcialmente ordenados P y Q son isomorfos si y sólo si existen mapeos crecientes $\varphi : P \rightarrow Q$ y $\psi : Q \rightarrow P$ tal que $\varphi \circ \psi = \iota_{d_Q}$ y $\psi \circ \varphi = \iota_{d_P}$ (donde $\iota_{d_S} : S \rightarrow S$ denota el mapeo identidad en S donde $\iota_{d_S}(x) = x \ \forall x \in S$).

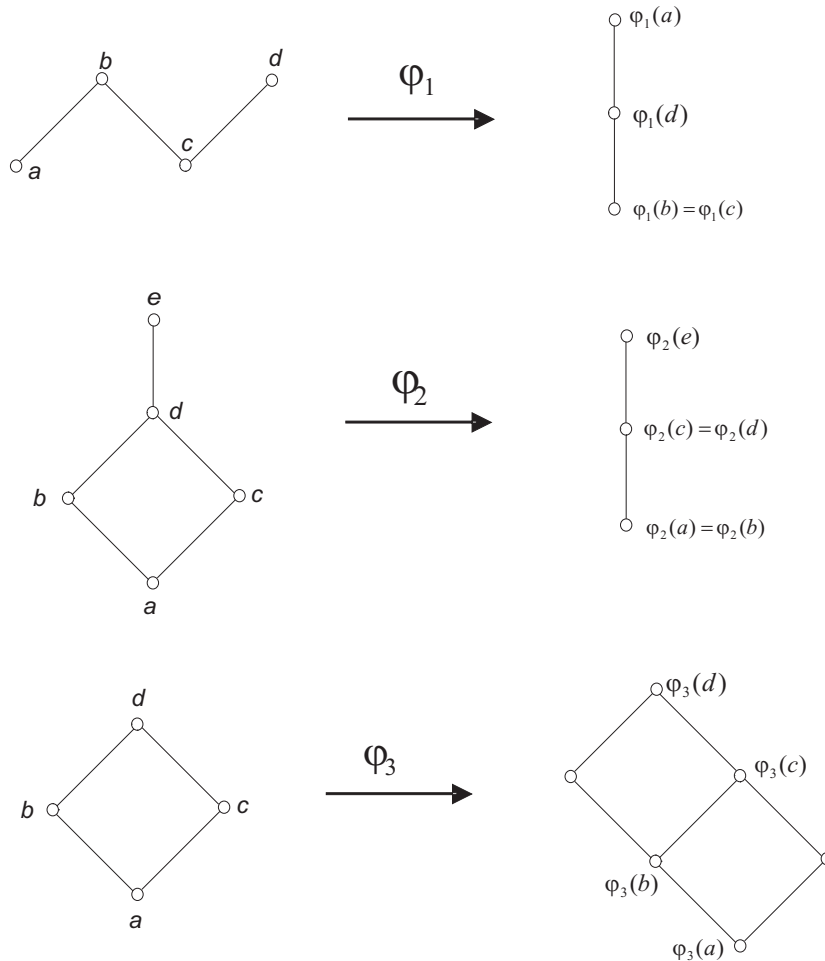


Figura 2.3:

Lema 2.1. Sean P y Q conjuntos finitos parcialmente ordenados y sea $\varphi : P \rightarrow Q$ un mapeo biyectivo. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) φ es un isomorfismo.
- ii) $x < y$ en P si y sólo si $\varphi(x) < \varphi(y)$ en Q .
- iii) $x \prec y$ en P si y sólo si $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ en Q .

Demostración.

$i) \rightarrow ii)$ Esta demostración es directa de la definición 2.8.

$ii) \rightarrow iii)$ Supóngase que $ii)$ es cierto y tomemos $x \prec y$ en P . Ahora supongamos que $\varphi(x) < w < \varphi(y)$ en Q .

Como φ es sobre, existe $u \in P$ tal que $w = \varphi(u)$.

Luego $\varphi(x) < \varphi(u) < \varphi(y)$, por $ii)$ $x < u < y$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\varphi(x) \prec \varphi(y)$. El recíproco se prueba de manera análoga.

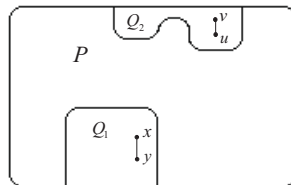
$iii) \rightarrow ii)$ Sea $x < y$ en P . Entonces existen elementos $x = x_0 \prec x_1 \prec \dots \prec x_n = y$. Por $iii)$, $\varphi(x_0) = \varphi(x) \prec \varphi(x_1) \prec \dots \prec \varphi(x_n) = \varphi(y)$. Por lo tanto $\varphi(x) < \varphi(y)$. El recíproco se prueba de manera similar utilizando el hecho de que φ es sobre.

$ii) \rightarrow i)$ Esta demostración es directa de la definición 2.8.

□

Definición 2.9. Sea P un conjunto parcialmente ordenado y $Q \subseteq P$.

- i) Q es un *ideal* si para cualquier $x \in Q$, $y \in P$ y $y \leq x$ se tiene que $y \in Q$.
- ii) Q es un *filtro* si para cualquier $x \in Q$, $y \in P$ y $y \geq x$, se tiene que $y \in Q$.



Q_1 es un ideal y Q_2 es un filtro.

Observación 2.4. Q es un ideal si y sólo si $P \setminus Q$ es un filtro.

Definición 2.10. Dado un subconjunto Q de P y $x \in P$, se define:

$$\begin{aligned} \downarrow Q &= \{y \in P \mid (\exists x \in Q) y \leq x\} & y & \uparrow Q = \{y \in P \mid (\exists x \in Q) y \geq x\} \\ \downarrow x &= \{y \in P \mid y \leq x\} & y & \uparrow x = \{y \in P \mid y \geq x\} \end{aligned}$$

Observación 2.5. $\downarrow Q$ es el ideal más pequeño que contiene a Q . Q es un ideal si y sólo si $Q = \downarrow Q$. Algo similar se aplica para $\uparrow Q$.

Definición 2.11. Sea P es un conjunto parcialmente ordenado y sea $Q \subseteq P$. Entonces

1. $a \in Q$ es un *elemento maximal* de Q si $x \in Q$ y $a \leq x$ implica que $a = x$;
2. $a \in Q$ es el *elemento máximo* de Q si $a \geq x$ para cada $x \in Q$ y en este caso se representa por $a = \max Q$.
3. El *elemento minimal* de Q y el elemento mínimo de Q ($\min Q$), son definidos de manera similar como en 1 y 2.

Definición 2.12. Sea P un conjunto parcialmente ordenado y x, y, z elementos de P (no necesariamente distintos).

1. Un subconjunto $S \subset P$ se dice que es *acotado superiormente* si existe un elemento $x \in P$ tal que $a \leq x$ para todo $a \in S$. Un elemento x con esta propiedad se dice que es una *cota superior* de S .
2. Se dice que un elemento $x \in P$ es una *mínima cota superior* en S (S^u) si:
 - x es cota superior de S , y
 - si y es una cota superior de S entonces $x \leq y$.
3. Si z es un mínima cota superior (MCS) de x y y , se escribe como $z = x \vee y$.
4. Cuando z es la mínima cota superior de S es también llamado el *supremo* de S y se denota por $\bigvee S$.
5. Si P tiene un elemento máximo es denotado por I .
6. Un subconjunto $S \subset P$ se dice que es *acotado inferiormente* si existe un elemento $x \in P$ tal que $x \leq a$ para todo $a \in S$. Un elemento x con esta propiedad se dice que es una *cota inferior* de S .
7. Se dice que un elemento $x \in P$ es una *mínima cota inferior* en S (S^l) si:

- x es cota inferior de S , y
 - si y es una cota inferior de S entonces $x \geq y$.
8. Si z es un máxima cota inferior (MCI) de x y y , se escribe como $z = x \vee y$.
 9. Cuando z es la mínima cota superior de S es también llamado el *ínfimo* de S y se denota por $\bigwedge S$.
 10. Si P tiene un elemento mínimo este es denotado por O .

Ejemplo 2.5. En el conjunto parcialmente ordenado del ejemplo 2.2, encontramos que:

$\emptyset \vee X = X$	$\emptyset \wedge X = \emptyset$
$1 \vee 2 = 12$	$1 \wedge 2 = \emptyset$
$1 \vee 12 = 12$	$1 \wedge 12 = 1$
	$1 \wedge 23 = \emptyset$
$2 \vee 12 = 12$	$2 \wedge 12 = 2$
$2 \vee 23 = 23$	$2 \wedge 23 = 2$
	$12 \wedge 23 = 2$

$1 \vee 23$ y $12 \vee 23$ no existen. Este conjunto parcialmente ordenado no tiene elemento máximo I , pero si elemento mínimo $O = \emptyset$.

Teorema 2.2. En un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y su topología asociada \mathcal{T} , para la cual su relación de orden es la inclusión; su elemento máximo es $I = X$ y su elemento mínimo es $O = \emptyset$.

Definición 2.13. Sea un conjunto parcialmente ordenado P . Si $C = \{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ es una *cadena finita* en P con $|C| = n + 1$, entonces decimos que la longitud de C es n .

2.1.3. Lattices.

Definición 2.14. Dado un conjunto parcialmente ordenado P no vacío.

1. Si $x \vee y$ y $x \wedge y$ existe para todo $x, y \in P$, entonces P es llamado un *lattice*.
2. Si $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existe para todo $S \subseteq P$, entonces P es llamado un *lattice completo*.

Ejemplo 2.6. Cualquier topología \mathcal{T} de un conjunto X con la relación de orden por inclusión forma un lattice y se denota por $\mathcal{L}(\mathcal{T})$.

Definición 2.15. M_n (para $n \geq 1$) es el conjunto parcialmente ordenado cuyo diagrama de Hasse es el siguiente:

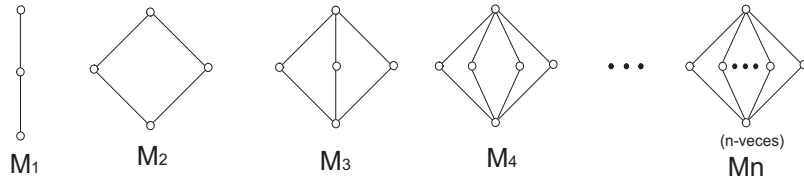


Figura 2.4:

Ejemplo 2.7. El conjunto parcialmente ordenado del ejemplo 2.2 no es un lattice, pero el del ejemplo 2.3 si lo es.

Ejemplo 2.8. Para los conjuntos parcialmente ordenados $a)$ y $b)$: El primero es

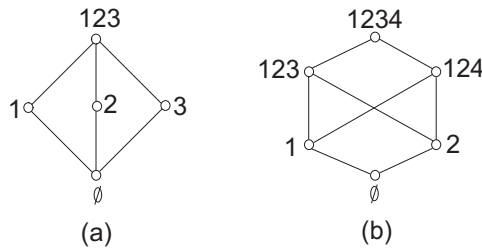


Figura 2.5:

un lattice, pero el segundo no, aunque 1 y 2, tienen varias cotas superiores de $b)$, pero no tienen mínima cota superior.

Lema 2.2. Sea P un lattice. Entonces $\bigvee F$ y $\bigwedge F$ existen para cada subconjunto finito no vacío F de P .

Corolario 2.1. Cada lattice finito es completo.

Lema 2.3. Sea P y Q conjuntos parcialmente ordenados, $\varphi : P \rightarrow Q$ un mapeo creciente y asumimos que $S \subseteq P$ es tal que $\bigvee S$ y $\bigwedge S$ existen en P y $\bigvee \varphi(S)$ y $\bigwedge \varphi(S)$ existen en Q . Entonces

$$\varphi(\bigvee S) \geq \bigvee \varphi(S) \quad \text{y} \quad \varphi(\bigwedge S) \leq \bigwedge \varphi(S) \tag{2.1}$$

Lattices como estructuras algebraicas.**Lema 2.4.** *(Conexión)*

Sea L un lattice y sea $a, b \in L$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

- i) $a \leq b$;
- ii) $a \vee b = b$;
- iii) $a \wedge b = a$.

Teorema 2.3. *Sea L un lattice. Entonces \vee y \wedge se satisfacen, para todo $a, b, c \in L$, las siguientes propiedades*

$$(L1) \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad (\text{Leyes asociativas})$$

$$(L1)^\partial \quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$(L2) \quad a \vee b = b \vee a \quad (\text{Leyes conmutativas})$$

$$(L2)^\partial \quad a \wedge b = b \wedge a$$

$$(L3) \quad a \vee a = a \quad (\text{Leyes idempotentes})$$

$$(L3)^\partial \quad a \wedge a = a$$

$$(L4) \quad a \vee (a \wedge b) = a \quad (\text{Leyes absorción})$$

$$(L4)^\partial \quad a \wedge (a \vee b) = a$$

Teorema 2.4. *Sea $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ un conjunto no vacío equipado con dos operaciones binarias las cuales satisfacen $(L1) - (L4)$ y $(L1)^\partial - (L4)^\partial$ del teorema 2.3.*

- i) *Para todo $a, b \in L$, $a \vee b = b$ si y sólo si $a \wedge b = a$.*
- ii) *Definimos \leq por $a \leq b$ si $a \vee b = b$. Entonces \leq es una relación de orden.*
- iii) *Con \leq como en ii), $\langle L, \leq \rangle$ es un lattice en el cual la operación original coincide con la operación inducida, esto es, para todo $a, b \in L$,*

$$a \vee b = \sup\{a, b\} \quad \text{y} \quad a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Demostración. Se asume que $a \vee b = b$. Entonces

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (a \vee b) && (\text{por } (L4)^\partial) \\ &= a \wedge b && (\text{por suposición}). \end{aligned}$$

Recíprocamente, se afirma $a \wedge b = a$. Entonces

$$\begin{aligned}
b &= b \vee (b \wedge a) && \text{(por (L4))} \\
&= b \vee (a \wedge b) && \text{(por (L2)^\theta)} \\
&= b \vee a && \text{(por suposición)} \\
&= a \vee b && \text{(por (L2)).}
\end{aligned}$$

Ahora definimos a \leq como en *ii*). Entonces \leq es reflexiva por (L3), anti-simétrica por (L2) y transitiva por (L1).

Para demostrar que, en el conjunto parcialmente ordenado $\langle L; \leq \rangle$, $\sup\{a, b\} = a \vee b$, se debe primero verificar que $a \vee b \in \{a, b\}^u$ y después que $d \in \{a, b\}^u$ implica que $d \geq a \vee b$. Esto es, recordando que \leq esta dado por $p \leq d$ si y sólo si $p \vee q = q$. \square

Observación 2.6. Sea L un lattice y sean $a, b, c \in L$. Asumiendo que $b \leq a \leq b \vee c$. Entonces, se cumple

$$b \vee c \leq a \vee c \leq (b \vee c) \vee c = b \vee c,$$

(su forma dual también es cierta).

Sublattices, productos e imágenes homomórficos.

Definición 2.16. Sean un lattice L y M un subconjunto no vacío de L . Entonces M es un *sublattice* de L si $a, b \in M$ implica que $a \vee b \in M$ y $a \wedge b \in M$.

Definición 2.17. Si \mathfrak{L} es una familia de subconjuntos de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) los cuales satisfacen que $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{L}$ para cada familia no vacía $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathfrak{L}$, entonces \mathfrak{L} es llamada \bigcap -estructura en X .

Nota 2.1. Se denota a la colección de todos los sublattices de L por $Sub L$ y sea $Sub_0 L = Sub L \cup \{\emptyset\}$. Entonces $Sub_0 L$ es una \bigcap -estructura en L y así un lattice completo.

Definición 2.18. Sean los lattices L y K . Se definen \vee y \wedge en $L \times K$, como sigue:

$$\begin{aligned}
(l_1, k_1) \vee (l_2, k_2) &= (l_1 \vee l_2, k_1 \vee k_2) \\
(l_1, k_1) \wedge (l_2, k_2) &= (l_1 \wedge l_2, k_1 \wedge k_2)
\end{aligned}$$

Observación 2.7. $(l_1, k_1) \vee (l_2, k_2) = (l_2, k_2) \Leftrightarrow l_1 \vee l_2 = l_2$ y $k_1 \vee k_2 = k_2$
 $\Leftrightarrow l_1 \leq l_2$ y $k_1 \leq k_2$
 $\Leftrightarrow (l_1, k_1) \leq (l_2, k_2)$

Definición 2.19. Sean L y K lattices. Un mapeo $f : L \rightarrow K$ es llamado *homomorfismo de lattices* si f preservan las operaciones \vee, \wedge , esto es, $\forall a, b \in L$:

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \quad \text{y} \quad f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

Definición 2.20. Un homomorfismo biyectivo es un *isomorfismo de latices*.

Si $f : L \rightarrow K$ es homomorfismo uno-uno, entonces el sublattice $f(L)$ de K es isomorfo a L y f es un encaje (de L a K).

Proposición 2.1. Sean las latices L y K y $f : L \rightarrow K$ un mapeo.

■ Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es creciente.

b) $(\forall a, b \in L) \quad f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$.

c) $(\forall a, b \in L) \quad f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$.

En particular, si f es un homomorfismo, entonces f es creciente.

■ Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es un isomorfismo.

b) f es biyectiva y un encaje.

c) f es un isomorfismo de latices.

En particular, si f es un homomorfismo, entonces f es creciente.

Observación 2.8. Sea L un lattice, $\forall a, b, c, d \in L$ se cumple que:

i) $a \leq b$ implica $a \vee c \leq b \vee c$ y $a \wedge c \leq b \wedge c$.

ii) $a \leq b$ y $c \leq d$ implica $a \vee c \leq b \vee d$ y $a \wedge c \leq b \wedge d$.

Observación 2.9. Si $\varphi : P \rightarrow Q$ es un isomorfismo y $A \subseteq P$ tal que $\bigvee A$ existe en P , entonces $\bigvee \varphi(A)$ existe en Q y $\bigvee \varphi(A) = \varphi(\bigvee A)$ (dualmente se cumple para \bigwedge).

2.2. Latices distributivos.

Lema 2.5. Sea L un lattice y sean $a, b, c \in L$. Entonces:

i) $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, y dualmente.

ii) $a \geq c$ implica $a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee c$, y dualmente.

iii) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$.

Definición 2.21. Sea L un lattice.

a) L es llamado *distributivo*: si para todo $x, y, z \in L$, se satisfacen las leyes de distribución.

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &= (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \\ x \vee (y \wedge z) &= (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{aligned}$$

b) L es llamado *modular*: si para todo $x, y, z \in L$, se satisface la ley modular:

$$x \geq z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$$

Ejemplo 2.9. Consideremos los lattices M_3 y N_5 .

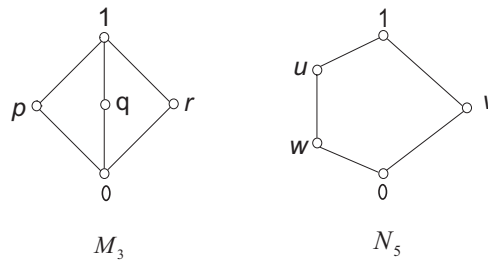


Figura 2.6:

M_3 no es distributivo, ya que vemos del diagrama que

$$p \wedge (q \vee r) = p \wedge 1 = p \neq 0 = 0 \vee 0 = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

pero M_3 es modular.

Por otra parte, el lattice N_5 no es modular y tampoco distributivo ya que

$$u \geq w \quad y \quad u \wedge (v \wedge w) = u \wedge 1 = u > w = 0 \vee w = (u \wedge v) \vee w.$$

Observación 2.10.

- Si un lattice L es modular (distributivo), entonces cada sublattice de L es modular (distributivo).
- Si los lattices L y K son modulares (distributivos), entonces $L \times K$ es modular (distributivo).

- Si un lattice L es modular (distributivo) y K es la imagen de L bajo un homomorfismo, entonces K es modular (distributivo).

Proposición 2.2. *Si un lattice es isomorfo a un sublattice de un producto de lattices modulares (distributivos), entonces este es modular (distributivo).*

2.3. El teorema $M_3 - N_5$.

Nota 2.2. Se escribe $M \rightsquigarrow L$ para indicar que el lattice L tiene un sublattice isomorfo a el lattice M . Por la proposición 2.2, $M \rightsquigarrow L$ implica que $M \hookrightarrow L$.

Teorema 2.5. *(El Teorema $M_3 - N_5$) Sea L un lattice.*

- L es no-modular si y sólo si $N_5 \rightsquigarrow L$.
- L es no-distributivo si y sólo si $N_5 \rightsquigarrow L$ o $M_3 \rightsquigarrow L$.

Demostración. Por el ejemplo 2.9 y la observación 2.10, es suficiente probar que un lattice no-modular tiene un sublattice isomorfo a N_5 y un lattice modular y no distributivo tiene un sublattice isomorfo a M_3 .

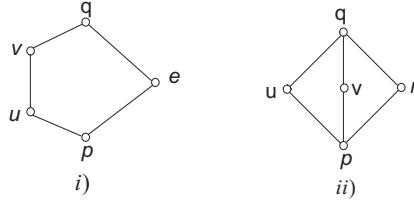


Figura 2.7:

Supóngase que L es no modular. Entonces existen elementos d, e, f tales que $d > f$ y $v > u$, donde

$$u = (d \wedge e) \vee f \quad \text{y} \quad v = d \wedge (e \vee f).$$

Basamos la demostración en que $e \wedge u = e \wedge v (= p)$ y $e \vee u = e \vee v (= q)$. Entonces nuestro lattice tendría elementos u, v, e, p, q (los cuales claramente deberán de ser distintos). El lattice identidad dado

$$v \wedge e = (e \wedge (e \vee f)) \wedge d = d \wedge e \quad \text{y} \quad u \vee e = (e \vee (d \wedge e)) \vee f = e \vee f.$$

Además por la observación 2.8,

$$d \wedge e = (d \wedge e) \wedge e \leq u \wedge e \leq v \wedge e = d \wedge e$$

y similarmente

$$e \vee f = u \vee e \leq v \vee e \leq e \vee f \vee e = e \vee f.$$

Así se completa la demostración de *i*).

Ahora se asume que L es modular y no es distributivo. Se construye un sublattice isomorfo a M_3 . Dados d, e, f tal que $(d \wedge e) \vee (d \wedge f) < d \wedge (e \vee f)$.

Sea

$$\begin{aligned} p &= (d \wedge e) \vee (e \wedge f) \vee (f \wedge d), \\ q &= (d \vee e) \wedge (e \vee f) \wedge (f \vee d), \\ u &= (d \wedge q) \vee p, \\ v &= (e \wedge q) \vee p, \\ w &= (f \wedge q) \vee p. \end{aligned}$$

Claramente $u \geq p$, $v \geq p$ y $w \geq p$. Además, por el lema 2.5 *iii*), se tiene que $p \leq q$. Por lo tanto $u \leq (d \wedge q) \vee q = q$. Similarmente, $v \leq q$ y $w \leq q$. Así el candidato para una copia de M_3 tiene elementos $\{p, q, u, v, w\}$, ver la figura 2.7 *ii*). Ahora es necesario verificar que este subconjunto tiene las correctas uniones e intersecciones, y que sus elementos son distintos.

Con lo cual se contradecirá la ley modular.

$$(M) \quad a \geq c \text{ implica } a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c.$$

Para cada aplicación de (M) son implicados los elementos a y c .

A continuación se hará uso de las leyes asociativas y conmutativas. Se tiene que $d \wedge q = d \wedge (e \vee f)$, por $(L4)^\partial$. Además

$$\begin{aligned} d \wedge p &= d \wedge ((e \wedge f) \vee ((d \wedge e) \vee (d \wedge f))) \\ &= (d \wedge (e \wedge f)) \vee ((d \wedge e) \vee (d \wedge f)) \\ &= (d \wedge e) \vee (d \wedge f). \end{aligned}$$

Así que $p = q$ es imposible. Con lo que se concluye que $p < q$. Ahora se debe probar que $u \wedge v = p$. Se observa que:

$$\begin{aligned} u \wedge v &= ((d \wedge q) \vee p) \wedge ((e \wedge q) \vee p) \\ &= (((e \wedge q) \vee p) \wedge (d \wedge q)) \vee p && \text{(por (M))} \\ &= ((q \wedge (e \vee p)) \wedge (d \wedge q)) \vee p && \text{(por (M))} \\ &= ((e \vee p) \wedge (d \wedge q)) \vee p \\ &= ((d \wedge (e \vee f)) \wedge (e \vee (f \wedge d))) \vee p && \text{(por (L4) \& (L4)^\partial)} \\ &= (d \wedge ((e \vee f) \wedge (e \vee (f \wedge d)))) \vee p \\ &= (d \wedge (((e \vee f) \wedge (f \wedge d)) \vee e)) \vee p && \text{(por (M))} \\ &= (d \wedge ((f \wedge d) \vee e)) \vee p && \text{(de } d \wedge f \leq f \leq e \vee f) \\ &= ((d \wedge e) \vee (f \wedge d)) \vee p && \text{(por (M))} \end{aligned}$$

De la misma forma, $v \wedge w = p$ y $w \wedge u = p$. De esta manera, y con operaciones similares se obtiene que $u \vee v = v \vee w = w \vee u = q$. Finalmente, es fácil de ver que si dos elementos de u, v, w, p, q son iguales, entonces $p = q$, lo cual es imposible. \square

Del teorema anterior se concluye lo siguiente:

Teorema 2.6. *Un lattice L es distributivo si y sólo si no contiene un sublattice isomorfo a M_3 o N_5 .*

Demostración. La demostración es directa del teorema 2.5. \square

Ejemplo 2.10. El lattice

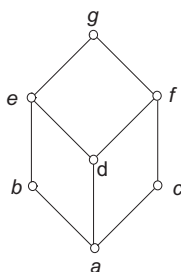


Figura 2.8:

no es distributivo ya que contiene el sublattice

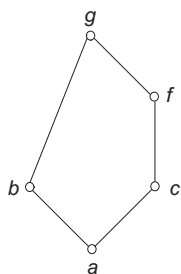


Figura 2.9:

que es isomorfo a el lattice N_5 .

2.4. Intervalos en latices distributivos.

Definición 2.22. Un importante tipo de sublattice de latices distributivos es el *intervalo* $[x, y]$ que consiste de todos los elementos z , tales que $x \leq z \leq y$. Que $[x, y]$ es un sublattice se sigue de que x y y son cota inferior y superior respectivamente del intervalo, además que si u y v pertenecen a $[x, y]$, entonces existen sus MCS y MCI.

Ejemplo 2.11. Para el lattice

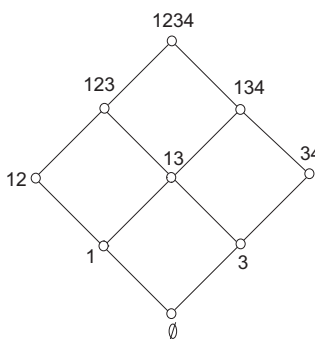


Figura 2.10:

el intervalo $[1, 1234]$ es

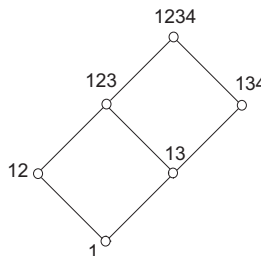


Figura 2.11:

Definición 2.23. Un *camino ascendente de x a y* es una sucesión finita $\{z_n\}$ (de al menos dos elementos), $n \geq 0$; tal que

$$x = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_{n-1} \leq z_n = y$$

con $z_0 \neq z_1 \neq \dots \neq z_{n-1} \neq z_n$.

La definición de *camino descendente* es análoga a la anterior definición.

Observación 2.11. El intervalo $[x, y]$ consiste de todos los elementos que pueden ser localizados en el Diagrama de Hasse del lattice por el camino ascendente desde x y el camino descendente de y .

Observación 2.12. Si $x \in \mathfrak{L}(\mathcal{T})$ es un conjunto abierto de \mathcal{T} , el intervalo $[x, X]$ es el sublattice de todos los subconjuntos abiertos de \mathcal{T} que contienen a x .

Teorema 2.7. El intervalo $[x, X]$ es isomorfo a el lattice $\mathfrak{L}[\mathcal{T}(X - x)]$ de los conjuntos abiertos del subespacio $X - x$.

Ejemplo 2.12. Para el lattice del ejemplo 2.11, el intervalo $[1, 1234]$ es el sublattice de todos los conjuntos abiertos que contienen a 1. Este es isomorfo a

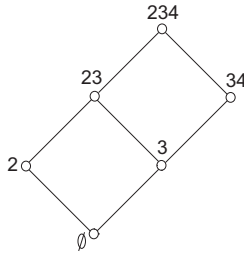


Figura 2.12:

por la observación anterior.

Definición 2.24. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) . Decimos que en $x, y \in \mathfrak{L}(\mathcal{T})$ hay un *escalón* si no existe $z \in \mathfrak{L}(\mathcal{T})$ tal que $x < z < y$, es decir, $x \prec y$.

Definición 2.25. El número de escalones en un camino, se define como el número de vértices que existen en el camino menos 1.

Observación 2.13. Una importante propiedad de los lattices distributivos, es que si $x < y$, entonces el número de escalones en un camino ascendente de x a y es el mismo para cada camino.

Observación 2.14. El número de escalones de O a I como en la definición 2.12 es llamado la *longitud del lattice*, mientras que la longitud del sublattice $[O, x]$ es llamada la longitud de x .

Ejemplo 2.13. El lattice del ejemplo 2.3 tiene una longitud de 4 y la longitud de cada elemento de este ejemplo es igual a su cardinalidad.

2.5. Productos directos.

Otra forma de construir lattices es la multiplicación de dos o más de ellos.

Definición 2.26. Si \mathfrak{L}_1 y \mathfrak{L}_2 son lattices de conjuntos, su *producto directo* $\mathfrak{L}_1 \times \mathfrak{L}_2$ consiste de todas las uniones $x_1 \vee x_2 (x_1 \in \mathfrak{L}_1, x_2 \in \mathfrak{L}_2)$ ordenados por inclusión.

Ejemplo 2.14. El lattice del ejemplo 2.11 es un producto directo:

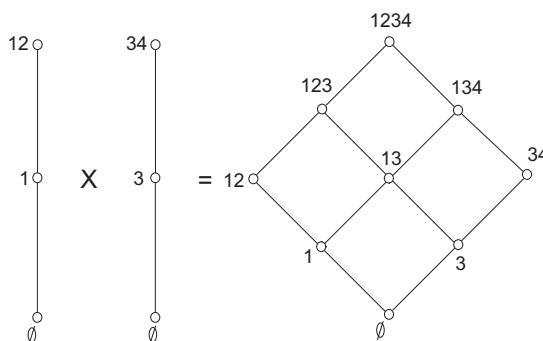


Figura 2.13:

Observación 2.15. El lattice de la topología discreta de n puntos es un producto directo de n lattices de dos elementos.

Ejemplo 2.15. Para el espacio que consta de dos elementos, el lattice para su topología discreta lo podemos ver como un producto directo de dos lattices de dos elementos; por ejemplo, para el espacio $X = \{1, 2\}$ su topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 2, X\}$ se puede ver como un producto directo de dos lattices de dos elementos. Ahora bien, para el espacio $X = \{1, 2, 3\}$ y su topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 2, 3, 12, 13, 23, X\}$ su lattice puede ser visto como el producto directo de tres lattices de dos elementos. Estos ejemplos se ilustran en la figura 2.14

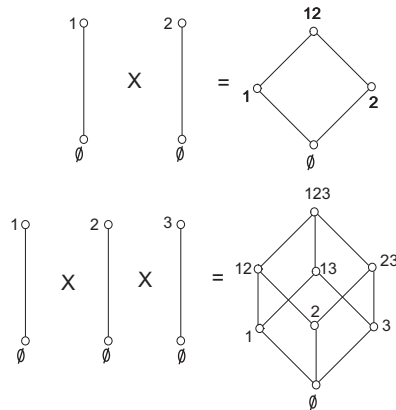


Figura 2.14:

Observación 2.16. Un lattice que tiene forma similar a la del ejemplo anterior es llamado un *Álgebra Booleana*.

Observación 2.17. El número de elementos en un producto directo es el producto de el número de elementos de los lattices originales.

Definición 2.27. Un lattice que puede ser escrito como un producto directo es llamado *compuesto*, en otro caso es llamado *primo*.

Ejemplo 2.16. El lattice

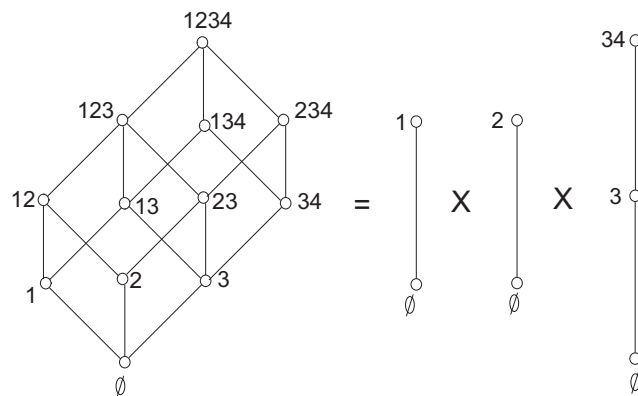


Figura 2.15:

es compuesto, mientras que el lattice es primo.

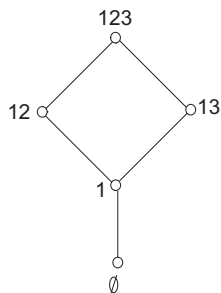


Figura 2.16:

2.6. Reducibilidad

Definición 2.28. Un elemento x de un lattice \mathcal{L} es llamado *reducible*, si puede ser expresado como $x = y \vee z$, donde $y, z \in \mathcal{L}$ y $x \neq y, z$. En otro caso x es *irreducible*.

Ejemplo 2.17. En el lattice

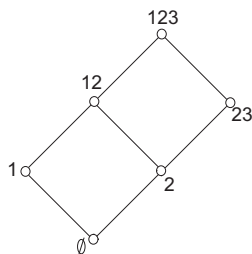


Figura 2.17:

los elementos reducibles son

$$12 = 1 \vee 2 \quad y \quad 123 = 12 \vee 23,$$

mientras que $\emptyset, 1, 2, 23$ son elementos irreducibles.

Observación 2.18. En un espacio topológico (X, \mathcal{T}) el conjunto vacío en $\mathcal{L}(T)$ es siempre irreducible y los demás elementos irreducibles en un lattice son aquellos que en su diagrama de Hasse (del lattice) pueden ser representados por una única línea ascendente.

Observación 2.19. Un elemento x reducible puede ser escrito como $x = y \vee z$. Si y, z son ambos reducibles, este proceso puede ser continuado hasta

$$x = \bigvee_i w_i$$

en el cual todos los w_i son irreducibles. Así cada elemento de un lattice puede ser expresado como una unión de elementos irreducibles llamada *representación*. Además en un lattice distributivo esta representación es única.

Ejemplo 2.18. Las representaciones de los elementos reducibles del ejemplo 2.17 son

$$\begin{aligned} 12 &= 1 \vee 2, \\ 123 &= 1 \vee 23. \end{aligned}$$

Observación 2.20. Los elementos de la base irreducible de la topología \mathcal{T} son los elementos irreducibles de $\mathcal{L}(\mathcal{T})$.

Capítulo 3

Topologías finitas y teoría de grafos

*Dixeron que antiguamente
se fue la Verdad al cielo;
tal la pusieron los hombres,
que desde entonces no ha vuelto.*

Lope de Vega.

En el capítulo anterior un latice de conjuntos abiertos de un espacio (X, \mathcal{T}) representa la estructura de \mathcal{T} . Ahora en este capítulo se hablará de la conexión natural y profunda entre las topologías y los grafos finitos. Esta conexión da un significado exacto de la noción cualitativa de la estructura y además proporciona un cálculo gráfico-teórico de las características más importantes de los espacios topológicos finitos.

3.1. Topologías y grafos dirigidos.

Definición 3.1. Un *grafo dirigido* (o *dígrafo*) D consta de un conjunto de puntos $V(D)$ (los vértices de D), junto con un conjunto $E(D)$ de pares ordenados de vértices (las aristas de D).

Un arista (p, q) es convencionalmente representada por una línea dirigida de p a q .

Definición 3.2. Sean un dígrafo D y $p, q \in V(D)$, los vértices p y q son *adyacentes* si $(p, q) \in E(D)$ o $(q, p) \in E(D)$.

Definición 3.3. A un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) , se le puede asociar un dígrafo, cuyos vértices son los elementos de X . Dados $p, q \in X$, (p, q) es una arista si $B_p \supset B_q$.

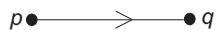


Figura 3.1:

Ejemplo 3.1. Sea $X = \{1, 2, 3\}$. Para la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 12, 13, X\}$ su lattice es:

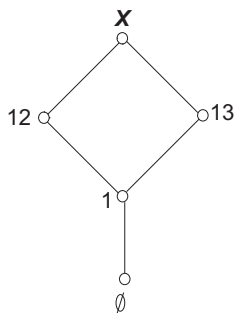


Figura 3.2:

Los conjuntos básicos correspondientes son:

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 12, \quad B_3 = 13.$$

Así $B_1 \subset B_2$, $B_1 \subset B_3$ y B_2 no es comparable con B_3 . El dígrafo de esta topología es:



Figura 3.3:

Nota 3.1. Se denota al dígrafo de una topología \mathcal{T} por $D(\mathcal{T})$.

Definición 3.4. Un dígrafo con la propiedad -que $(p, q) \in E(D)$ y $(q, r) \in E(D)$ juntos implican que $(p, r) \in E(D)$ - es llamado un dígrafo *transitivo*.

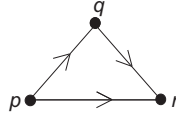


Figura 3.4:

Nota 3.2. De lo anterior se tiene que el dígrafo D correspondiente a la topología \mathcal{T} , en un espacio topológico X , es transitivo.

Teorema 3.1. Dado un espacio topológico X , para cualquier punto $p \in X$, se define a la colección de vértices de D adyacentes a p por

$$A_p^+ = \{q \mid (p, q) \in E(D)\}.$$

El conjunto básico correspondiente a p es

$$B_p = \{p\} \cup A_p^+.$$

En otras palabras, B_p contiene al punto p junto con los puntos accesibles desde p .

Demostración. Para esto debe probar que

$$\bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\} = \mathcal{B}_p = \{p\} \cup A_p^+.$$

Consideremos inicialmente el siguiente caso.

Sea $r \in \{p\} \cup A_p^+$, así $r = p$ o $r \in A_p^+$. Si $r = \{p\}$, entonces $r \in \mathcal{O}$ para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ que contiene a p , así $r \in \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$.

Si $r \in A_p^+$, entonces $(p, r) \in E(D)$, luego por la definición 6.5 $B_r \subset B_p$, así $B_r \subset \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ y por tanto $r \in \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$.

Por otra parte se considera que $r \in \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$; existen dos posibilidades que $r = p$ o $r \neq p$.

Si $r = p$ entonces $r \in \{p\} \cup A_p^+$.

Ahora bien si $r \neq p$ se necesita probar que $r \in A_p^+$, dado que

$$\mathcal{B}_p = \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$$

, entonces $B_r \subset B_p$, así por la definición 6.5 existe $(p, r) \in E(D)$, entonces $r \in A_p^+$ y por tanto $r \in \{p\} \cup A_p^+$. \square

Ejemplo 3.2. Para la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 4, 13, 14, 34, 45, 134, 145, 345, 1234, 1345, X\}.$$

De donde se observa que

$$A_1^+ = \emptyset, \quad A_2^+ = 134, \quad A_3^+ = \emptyset \quad A_4^+ = \emptyset \quad A_5^+ = 5$$

Así los conjuntos básicos son

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 1234, \quad B_3 = 3, \quad B_4 = 4 \quad B_5 = 45.$$

Su dígrafo es:

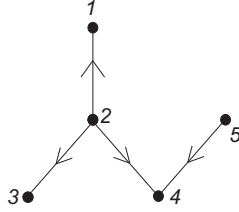


Figura 3.5:

Definición 3.5. El dígrafo obtenido de un dígrafo arbitrario D , para el cual sus aristas son de la forma (q, p) para todo $p, q \in X$ tal que $(p, q) \in D$ es llamado la *inversa* de D , denotado por D' .

Definición 3.6. Dado un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) , a su cotopología \mathcal{T}^* , se le puede asociar un dígrafo, cuyos vértices son los elementos de X . Dados $p, q \in X$, (p, q) es una arista si $B_p^* \supset B_q^*$.

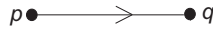


Figura 3.6:

Nota 3.3. De las definiciones 3.3 y 3.6 se observa que

$$D(\mathcal{T}^*) = D'(\mathcal{T}).$$

Teorema 3.2. Para un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , los conjuntos básicos B_p^* de su cotopología \mathcal{T}^* pueden ser obtenidos de $D(\mathcal{T}^*)$ de la misma forma que los conjuntos B_p son obtenidos de $D(\mathcal{T})$, y de manera alternativa de $D(\mathcal{T})$. Se denota a la colección de vértices de $D(\mathcal{T})$ adyacentes a p por

$$A_p^- = \{q \mid (q, p) \in E(D(\mathcal{T}))\}.$$

Entonces

$$B_p^* = \{p\} \cup A_p^-.$$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 3.1. □

Luego, B_p^* contiene a p junto con todos los vértices de $D(\mathcal{T})$ desde los cuales p es accesible siguiendo las aristas.

Ejemplo 3.3. Para la topología del ejemplo 3.1, el dígrafo es

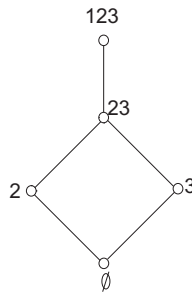


y su inversa es



y $B_1^* = 123, \quad B_2^* = 2, \quad B_3^* = 3.$

Así, el lattice de la cotopología es



Recordemos que en un espacio topológico X , la coclausura de un subconjunto arbitrario $S \subset X$ es definido como el conjunto abierto más pequeño \widehat{S} , para el cual $S \subset \widehat{S}$ y esta dado por

$$\widehat{S} = \bigcup_{p \in S} B_p.$$

Teorema 3.3. *Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) . Entonces*

$$\widehat{S} = S \cup \left(\bigcup_{p \in S} A_p^+ \right),$$

donde A_p^+ es como en la definición 3.1. En otras palabras, \widehat{S} contiene a los puntos de S junto con todos los puntos adyacentes para cualquier punto en S . Similarmente, la clausura de S , \overline{S} , satisface que

$$\overline{S} = S \cup \{q \in S \mid \text{existe } p \in S, (q, p) \in E(D)\}$$

Ejemplo 3.4. Para los subconjuntos del espacio de los ejemplos 3.1 y 3.3 para el cual D es

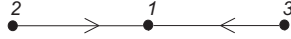


Figura 3.7:

se obtiene que

Coclausura

$$\widehat{1} = 1$$

$$\widehat{2} = 12$$

$$\widehat{3} = 13$$

$$\widehat{12} = 12$$

$$\widehat{23} = 123$$

$$\widehat{13} = 13$$

Clausura

$$\overline{1} = 123$$

$$\overline{2} = 2$$

$$\overline{3} = 3$$

$$\overline{12} = 123$$

$$\overline{23} = 123$$

$$\overline{13} = 23$$

Teorema 3.4. Sea X un espacio topológico. Para los dígrafos asociados a su topología y cotopología, un punto que no tiene aristas salientes (denominado de grado cero) es un abierto unipuntual. Similarmente, un punto sin aristas entrantes (de grado cero) es un cerrado unipuntual.

Demostración. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Dado $p \in X$, considérese la hipótesis que p no tiene aristas salientes, lo que significa que no existe algún $q \in X$ tal que $(p, q) \in E(D)$; esto por la definición de dígrafo asociado a una topología \mathcal{T} , con lo cual la relación $B_q \subset B_p$ no existe. Luego por el teorema 3.1 $A_p^+ = \emptyset$ y por tanto $B_p = \{p\}$.

La demostración de un cerrado unipuntual es análoga. \square

Ejemplo 3.5. Para el espacio del ejemplo 3.4, el único abierto unipuntual es el 1, mientras que los cerrados unipuntuales son 2 y 3.

Definición 3.7. Sean los dígrafos D_1 y D_2 , D_2 es llamado *subdígrafo* de D_1 ($D_2 \subseteq D_1$) si $V(D_2) \subseteq V(D_1)$ y $E(D_2) \subseteq E(D_1)$.

Definición 3.8. Sean un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , su dígrafo asociado $D(\mathcal{T})$. Considérese al subespacio (Y, \mathcal{T}_Y) del espacio (X, \mathcal{T}) . Se define al dígrafo $D(\mathcal{T}_Y)$ asociado a (Y, \mathcal{T}_Y) de la siguiente manera. Teniendo como vértices a los elementos de Y y el conjunto de aristas es como

$$E(D(\mathcal{T}_Y)) = \{(p, q) \mid (p, q) \in E(D(\mathcal{T})) \text{ y } p, q \in Y\}.$$

Lo anterior se expresa de forma convencional como; $D(\mathcal{T}_Y)$ es el *subdígrafo* de $D(\mathcal{T})$ inducido por Y .

Teorema 3.5. Para cualquier subespacio $Y \subset X$ con topología \mathcal{T}_Y , el dígrafo $D(\mathcal{T}_Y)$ es un subdígrafo de $D(\mathcal{T})$.

Demostración. Se consideran a dos puntos $p, q \in Y$ y supóngase que $B_p \subset B_q$. Esto es equivalente a

$$B_p \cup B_q = B_q.$$

Si se usa esta intersección y se vuelve a intersectar con Y , y además se utiliza la propiedad distributiva de la intersección, se observa que:

$$Y \cap (B_p \cup B_q) = (Y \cap B_p) \cup (Y \cap B_q) = Y \cap B_q$$

lo cual implica que

$$Y \cap B_p \subset Y \cap B_q,$$

así para $p \in Y$ el elemento básico de p en el subespacio de Y es

$$B_{p,Y} = Y \cap B_p.$$

□

Ejemplo 3.6. Sea el espacio $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 4, 13, 14, 34, 45, 134, 145, 1234, 1345, X\}$ del cual el dígrafo es:

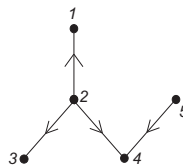


Figura 3.8:

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 1234, \quad B_3 = 3, \quad B_4 = 4, \quad B_5 = 45.$$

Para su subespacio $Y = \{1, 2, 4\}$ se encuentra que

$$\begin{aligned} B_{1,Y} &= Y \cap B_1 = 1, \\ B_{2,Y} &= Y \cap B_2 = 124, \\ B_{4,Y} &= Y \cap B_4 = 4; \end{aligned}$$

y el dígrafo es



Figura 3.9:

el cual es el subdígrafo inducido por $\{1, 2, 4\}$.

3.2. Topologías y grafos

Definición 3.9. Un *grafo* no dirigido (llamado simplemente grafo) G consta de un conjunto de puntos $V(G)$ (el conjunto de los vértices de G), junto con un conjunto $E(G)$ de los pares de vértices no ordenados (el conjunto de los aristas de G).

Una arista $\{p, q\}$ es representada por una línea no dirigida de p a q (segmento de línea).

Definición 3.10. A un espacio topológico (X, \mathcal{T}) se le puede asociar un grafo $G(\mathcal{T})$, para el cual sus vértices son los elementos de X . Dados $p, q \in X$ y sus elementos básicos B_p y B_q . $\{p, q\} \in E(G)$ si $B_p \supset B_q$ o $B_q \supset B_p$.

Observación 3.1. La importancia de los grafos para las topologías yace en el hecho de que existe un único grafo asociado con cada par de topología-cotopología, esto es, el grafo fundamental de los dígrafos $D(\mathcal{T})$ y $D(\mathcal{T}^*) = D'(\mathcal{T})$ y además $G(\mathcal{T}) = G(\mathcal{T}^*)$.

Ejemplo 3.7. Sea el espacio topológico $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Para el par topología-cotopología, del cual sus lattices correspondientes son;

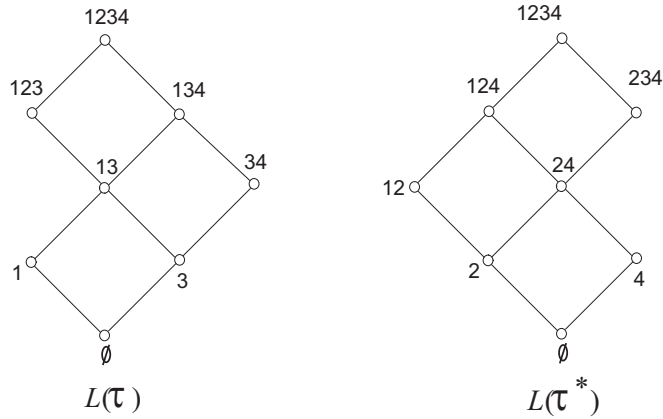


Figura 3.10:

los correspondientes dígrafos son:

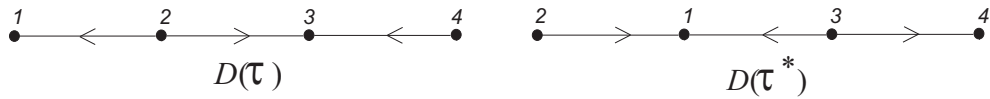


Figura 3.11:

ambos tienen el grafo

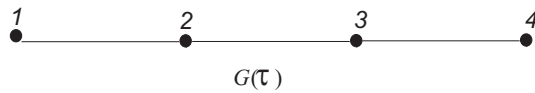


Figura 3.12:

Ejemplo 3.8. Sea el espacio topológico $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para la topología de la cual el latice es Los círculos cerrados en un latice representan los elementos

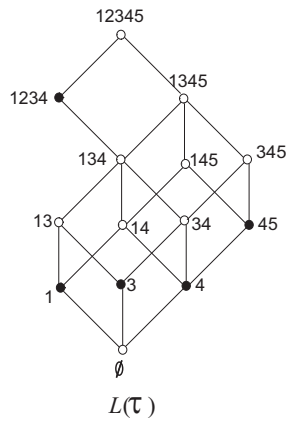


Figura 3.13:

irreducibles. $G(\mathcal{T})$ es

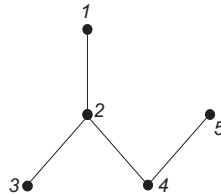


Figura 3.14:

3.3. Subbases y grafos.

Si una topología \mathcal{T} está definida en términos de una subbase \mathcal{S} , $D(\mathcal{T})$ y $G(\mathcal{T})$ pueden ser construidos directamente de \mathcal{S} , sin la necesidad de construir inicialmente a \mathcal{T} o a $B(\mathcal{T})$. Para cualquier punto $p \in X$, el elemento básico correspondiente en términos de su subbase es

$$\mathcal{B}_p = \bigcap \{S \mid p \in S \in \mathcal{S}\}.$$

Si $p \in S$ implica que $q \in S$ para cada elemento $S \in \mathcal{S}$ - si no hay elementos en la subbase que contengan a p y no a q , entonces $q \notin \mathcal{B}_p$ y $D(\mathcal{T})$ no contendrá a (p, q) .

Así una arista (p, q) en $G(\mathcal{T})$ de cualquier (p, q) o (q, p) en $D(\mathcal{T})$, la condición para su presencia es que cualquier $p \in S$ implique que $q \in S$ o viceversa, para todo $S \in \mathcal{S}$.

Ejemplo 3.9. Sea

$$\mathcal{S} = \{12, 234, 4, 245\}$$

una subbase para una topología sobre $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Luego los conjuntos básicos son:

$B_1 = 12$, $B_2 = 2$, $B_3 = 234$, $B_4 = 4$, $B_5 = 245$. Los valores de p y q , para los cuales $p \in S \in \mathcal{S}$ implique que $q \in S$ están dados por

p	q
1	2
2	--
3	2, 4
4	--
5	2, 4

Por lo tanto, para la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 2, 4, 12, 234, 245\}$ inducida por \mathcal{S} tenemos

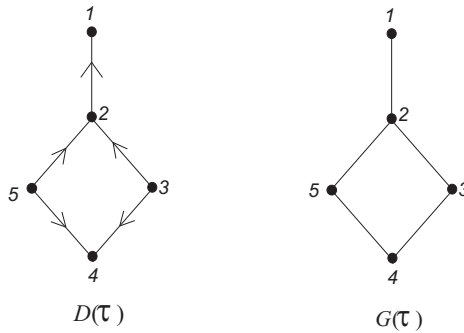


Figura 3.15:

Capítulo 4

Conexidad.

*Ser consciente de la propia
ignorancia es un gran paso hacia el saber.
Benjamín Disraeli.*

La formulación topológica exacta del concepto de conexidad es algo abstracta, así en este capítulo se intentará despejar estas dudas, apoyándonos en la relación de topología-latice y topología-grafos.

4.1. Conexidad de espacios y subespacios topológicos.

Definición 4.1. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , $Y \subset X$ es *disconexo* si existen U, V abiertos ajenos no vacíos en (Y, \mathcal{T}_Y) tales que $Y = U \cup V$. Y es *conexo* si no es disconexo. Equivalentemente si existen U, V abiertos en X tales que $U \cap Y \neq \emptyset \neq V \cap Y$, $U \cap V \cap Y = \emptyset$, $Y \subset U \cup V$.

Definición 4.2. Dos subconjuntos Y y Z de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) son llamados *separados* si

$$Y \cap \bar{Z} = \emptyset \quad \text{y} \quad \bar{Y} \cap Z = \emptyset.$$

Definición 4.3. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y $C \subset X$. Un par de subconjuntos separados (Y, Z) se llama *separación* de C en X si $C \subset Y \cup Z$, $C \cap Y \neq \emptyset$ y $C \cap Z \neq \emptyset$.

Teorema 4.1. *Se dice que un espacio topológico X es conexo si no existe una separación de X .*

Lema 4.1. *Si Y es un subespacio conexo de X y los conjuntos C y D son separados, entonces Y está contenido bien en C , o bien en D .*

Teorema 4.2. *Un espacio X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X .*

Ejemplo 4.1. Dado $X = \{1, 2, 3\}$ con la topología $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, 1, 2, 12, 23, X\}$ es disconexo ya que podemos escribir

$$123 = 1 \cup 23 \quad \text{y} \quad 1 \cap 23 = \emptyset.$$

Por otra parte si se considera a la topología $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, 2, 12, 23, X\}$ no se puede hacer esta representación, y por lo tanto el espacio es conexo.

Teorema 4.3. Sea X_i con $i = 1, 2, \dots, n$ un subconjunto conexo en un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , tal que $\bigcap X_i \neq \emptyset$ entonces $\bigcup X_i$ es conexo.

Teorema 4.4. Sea un subespacio conexo A de X . Si $A \subset B \subset \bar{A}$. Entonces B es también conexo.

Definición 4.4. Para $x \in X$ sea $C(x)$ la unión de los conjuntos conexos que contienen a x (al menos $\{x\}$ es conexo). $C(x)$ es conexo y cerrado, por los teoremas anteriores. $C(x)$ es la *componente conexa* que contiene a x .

Observación 4.1. La colección $\{C(x) : x \in X\}$ es una partición de X y por tanto induce una relación de equivalencia: $x \sim y$ si y sólo si existe $A \subset X$ conexo con $x, y \in A$.

Ejemplo 4.2. Para los dos espacios dados en el ejemplo 4.1, el primero consta de dos componentes 1 y 2, mientras que el segundo sólo consta de la componente 123.

4.2. Conexidad en grafos

Definición 4.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $G' = (V', E')$ un subgrafo de G . G' es conexo si para cada $x, y \in V'$ existen $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y \in V'$ tales que $\{x_i, x_{i+1}\} \in E'$ para cada $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Si $G_i = (V_i, E_i)$, se define $\bigcup G_i = (V', E')$, con $V' = \bigcup V_i$, $E' = \bigcup E_i$.

Observación 4.2. El conjunto vacío \emptyset y cada elemento de X son conexos.

Teorema 4.5. Si G_i es conexo para $i = 1, 2, \dots, n$ y $\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$, entonces

$\bigcup_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$ es conexo.

Demostración. Sea $\{G_i\}_{i=1}^n$ una colección de subgrafos conexos de un grafo G . Dados los puntos $x, y \in \bigcup_{i=1}^n G_i$, con $x \in G_i$ y $y \in G_j$, utilizando el hecho de que

G_i es conexo, por definición existen $w \in G_i$ y $w \in G_j$.

Luego $x = x_1, x_2, \dots, x_n = w \in V_i$ y $w = y_1, y_2, \dots, y_n = y \in V_j$ tomando en cuenta la hipótesis $\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \emptyset$, se puede hallar una cadena

$$x = x_1, x_2, \dots, x_n = y_1 = w, y_2, \dots, y_n = y \in V_i \cup V_j,$$

como G_i y G_j fueron tomados arbitrariamente se puede concluir que $\bigcup_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$ es conexo. \square

Para $v \in V$ sea $C(v)$ la unión de los subgrafos conexos que contienen a v (existe al menos uno). $C(v)$ es conexo por el teorema anterior.

$C(v)$ es la componente conexas que contiene a v .

Observación 4.3. La colección $\{C(v) : v \in V\}$ es una partición de V , que induce una relación de equivalencia: $v \sim w$ si y sólo si existe $v = v_1, v_2, \dots, v_n = w$ con $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$.

Teorema 4.6. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $G(\mathcal{T})$ su grafo asociado.

1. Si $Y \subset X$ es conexo, entonces $G(\mathcal{T}_Y)$ es conexo en $G(\mathcal{T})$.
2. Si G' es conexo de $G(\mathcal{T})$, entonces G' induce un conjunto conexo de X .

Demostración. 1. Supóngase que $(Y, \mathcal{T})_Y$, $G(\mathcal{T})$ consiste de dos componentes, tal que $G = G_1 \cup G_2 = G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, para el cual los conjuntos de vértices y aristas son $V(G) = V_1 \cup V_2$ y $E(G) = E_1 \cup E_2$. Se asume que V_1 y V_2 son disjuntos.

Entonces

$$X_1 = \bigcup_{p \in V_1} B_p \quad \text{y} \quad X_2 = \bigcup_{p \in V_2} B_p,$$

son conjuntos abiertos disjuntos tal que la unión es X . Por lo tanto (X, \mathcal{T}) tiene tantos componentes como $G(\mathcal{T})$.

Por lo tanto, si $Y \subset X$ componente conexas, entonces $G(\mathcal{T}_Y)$ es componente conexas de $G(\mathcal{T})$.

2. Sea $Y \subset X$ componente conexas de X , luego $Y = \bigcup Y_i$, tal que Y_i es conexo. Supóngase que Y es desconexo, luego $Y = U \cup W$ con U y W abiertos no vacíos, tal que $U \cap W = \emptyset$. Dados $x, y \in Y$ (cabe recordar que los elementos de Y son los elementos de V) tal que $x \in U$ y $x \in W$.

Ahora bien,

$$B_{x,V} = \bigcap \{\mathcal{O} \mid p \in \mathcal{O}, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\} \cap V,$$

$$B_{x,V} = B_x \cap V$$

y de la misma forma

$$B_{y,W} = B_y \cap W$$

Así $B_{x,V}$ y $B_{y,W}$ no son comparables, es decir $B_{x,V} \not\subset B_{y,W}$ y $B_{x,V} \not\supset B_{y,W}$. Con lo cual no existe $\{x, y\} \in G(\mathcal{T}_Y)$, entonces $G(\mathcal{T}_Y)$ es desconexo y en consecuencia $G(\mathcal{T}_{Y_i})$ también lo es. □

Observación 4.4. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y $G(\mathcal{T})$ su grafo asociado.

1. Si $Y \subset X$ componente conexa, entonces $G(\mathcal{T}_Y)$ es componente conexa de $G(\mathcal{T})$.
2. G' componente conexa de $G(\mathcal{T})$, entonces G' induce componente conexa de X .

Corolario 4.1. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y su grafo $G(\mathcal{T})$ tienen el mismo número de componentes.

Demostración. La demostración es consecuencia directa del teorema 4.6. □

Corolario 4.2. Un espacio conexo tiene un grafo conexo.

Demostración. La demostración es directa del teorema anterior. □

Ejemplo 4.3. Los grafos de los dos espacios dados en el ejemplo 4.1 son:



Figura 4.1:

Ejemplo 4.4. Para el espacio $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ del cual su dígrafo es:

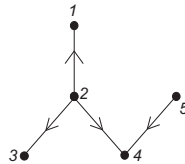


Figura 4.2:

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 1234, \quad B_3 = 3, \quad B_4 = 4, \quad B_5 = 45.$$

Los subconjuntos conexos son:

$$\begin{aligned} & \emptyset, 1, 2, 3, 4, 5, \\ & 12, 23, 24, 45, \\ & 123, 124, 234, 245, \\ & 1234, 1245, 2345, \\ & 12345. \end{aligned}$$

Definición 4.6. Un espacio X que tiene una base que consta de subconjuntos conexos es llamado *localmente conexo*.

Observación 4.5. Cada espacio topológico finito es localmente conexo. Dado que cada elemento básico en este induce un subgrafo conexo de $D(\mathcal{T})$ y por lo tanto de $G(\mathcal{T})$.

De la definición de espacio conexo en base a la de conjuntos separados se puede observar que $G(\mathcal{T})$ no contiene aristas que tenga punto final en Y y otro en Z .

4.3. Latices de espacios conexos y desconexos.

Supongamos que (X, \mathcal{T}) es desconexo y su representación de componentes es

$$X = \bigcup_i X_i.$$

La forma de cada conjunto abierto de \mathcal{T} tiene una representación similar

$$\mathcal{O} = \bigcup_i \mathcal{O}_i,$$

donde $\mathcal{O}_i \subset X_i$. Recordando la definición del producto directo de latices, la forma del lattice de conjuntos abiertos $\mathfrak{L}(\mathcal{T})$ es un producto directo

$$\mathfrak{L} = \prod_i \mathfrak{L}_i,$$

donde \mathfrak{L}_i es el lattice de conjuntos abiertos contenidos en X_i .

Observación 4.6. Los conjuntos en \mathfrak{L}_i constituyen la topología de X_i como un subespacio de X , así, si $\mathcal{O} = \bigcup_i \mathcal{O}_i$ entonces $\mathcal{O} \cap X_i = \mathcal{O}_i$

De lo anterior se concluye que

Observación 4.7. El lattice de un espacio desconexo es compuesto, con un factor para cada componente.

Observación 4.8. El lattice de un espacio conexo es primo.

Ejemplo 4.5. Para los espacios del ejemplo 4.1, los latices son:

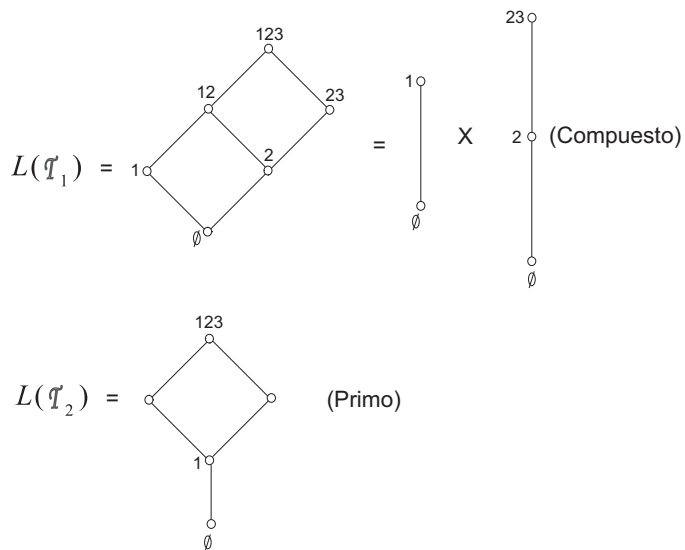


Figura 4.3:

Observación 4.9. El conjunto $X = \{1, 2, \dots, n\}$ con la topología discreta es totalmente desconexo; esto es, cada punto de X es una componente. Su lattice es el álgebra Booleana

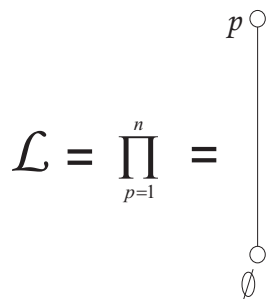


Figura 4.4:

Capítulo 5

Clasificación de Espacios Topológicos: Axiomas de Separación.

*A los tímidos y a los indecisos
todo les resulta imposible,
porque así se lo parece.
Sir Walter Scott.*

En el capítulo anterior, se vio cómo los sistemas abiertos determinan la estructura de un espacio topológico con respecto a el número de elementos del que consiste el espacio. Ahora en esta parte revisaremos algunas definiciones y relaciones entre los elementos del espacio y además se dará una forma de clasificar tales espacios, señalando sus características gráficas que los definen.

5.1. Espacios T_n .

Definición 5.1. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio topológico y C un conjunto abierto en X . Si $U \in \mathcal{T}$ es llamado una vecindad de $C \in \mathcal{T}$ si existe un conjunto abierto W que cumple que $C \subset W \subset U$.

Definición 5.2. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es un *espacio* T_0 si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, al menos uno de ellos posee una vecindad que no incluye al otro.

Si un espacio no es T_0 , debe contener al menos un par de ambos puntos presentes, o bien ausentes en cada conjunto abierto, en otras palabras, estos puntos son topológicamente indistinguibles.

Ejemplo 5.1. El espacio para el cual su latice es

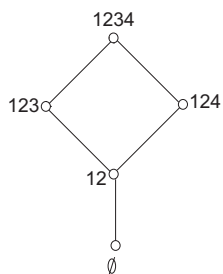


Figura 5.1:

no es T_0 , ya que no existe un conjunto abierto que contenga a 1 y no a 2 o que contenga a 2 y no a 1.

Ejemplo 5.2. El espacio con el latice

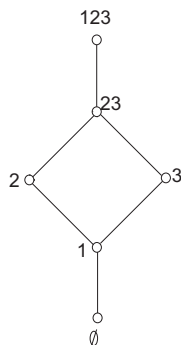


Figura 5.2:

es un espacio T_0 , donde hay un conjunto abierto separando cada par de puntos:

$$\begin{array}{lll} 1, 2 : \{1\}, & 1, 3 : \{1\}, & 1, 4 : \{1\}, \\ 2, 3 : \{1, 2\}, & 2, 4 : \{1, 2\}, & 3, 4 : \{1, 3\}. \end{array}$$

Proposición 5.1. *Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es T_0 si y sólo si la longitud de su latice es $|X|$.*

Ejemplo 5.3. Los espacios de los ejemplos 5.1 y 5.2 ambos tienen $|X| = 4$, la longitud del latice del primero es 3 y del segundo es 4. Por lo tanto el espacio del ejemplo 5.1 no es T_0 , pero el del ejemplo 5.2 sí lo es.

Teorema 5.1. *Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es T_0 si y sólo si su dígrafo asociado $D_{\mathcal{T}}$ no contiene al dígrafo:*



Figura 5.3:

como un subdígrafo.

Demostración. Supongamos que el espacio topológico (X, \mathcal{T}) no es T_0 , de manera que existe un par de puntos para los cuales cada conjunto abierto que contiene a p también contiene a q , y viceversa. De esta manera que $p \in B_q$ y $q \in B_p$, de forma que

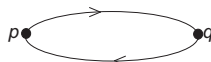


Figura 5.4:

debe ser un subdígrafo del dígrafo asociado al espacio $D(\mathcal{T})$. Por otra parte, si existe por lo menos un conjunto abierto que contenga a p y no a q , entonces $q \notin B_p$, y su dígrafo no podrá contener al subdígrafo anterior. \square

Ejemplo 5.4. Los espacios de los ejemplos 5.1 y 5.2, tienen los siguientes dígrafos asociados.

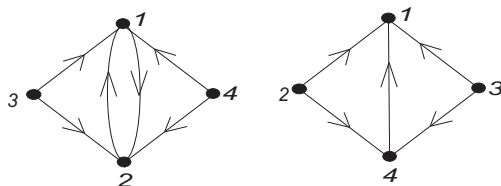


Figura 5.5:

Definición 5.3. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es un *espacio T_1* , si dados dos puntos distintos $x, y \in X$, cada uno posee una vecindad que no incluye al otro, (Notar que las vecindades no tienen que ser disjuntas).

De lo anterior se observa que un espacio topológico T_1 es *disconexo*, ya que cada punto es una componente separada y es al mismo tiempo abierto y cerrado.

Proposición 5.2. *Si un espacio topológico es T_1 y finito entonces tiene la topología discreta.*

Definición 5.4. Un espacio topológico es un *espacio $T_{\frac{1}{2}}$* si cada punto del espacio es un abierto, o un cerrado o ambos.

Proposición 5.3. *Si un espacio topológico es*

1. T_1 entonces es $T_{\frac{1}{2}}$.
2. $T_{\frac{1}{2}}$ entonces es T_0 .

Demostración. 1. Que un espacio T_1 es $T_{\frac{1}{2}}$ se sigue del hecho de que en tal espacio cada punto es abierto y cerrado al mismo tiempo.

2. Un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ es T_0 ya que el dígrafo asociado a $T_{\frac{1}{2}}$ contiene sólo vértices de los siguientes dos tipos:

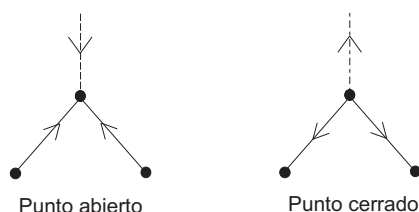


Figura 5.6:

y por lo tanto el subgrafo



Figura 5.7:

no puede estar presente.

□

Ejemplo 5.5. El espacio del que su dígrafo asociado es

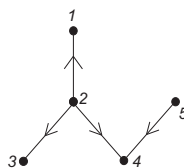


Figura 5.8:

es un espacio $T_{\frac{1}{2}}$, ya que cada punto es abierto (1, 3, 4) y cerrado (2, 5). Dado que ningún punto es abierto y cerrado al mismo tiempo no es T_1 .

Ejemplo 5.6. El espacio para el cual su dígrafo asociado es

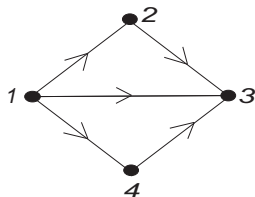


Figura 5.9:

es T_0 ya que no contiene al subdígrafo



Figura 5.10:

pero no es $T_{\frac{1}{2}}$ porque los puntos 2 y 4, no son ni abiertos ni cerrados.

Definición 5.5. Un *grafo bipartito* $G(V, E)$, es un grafo cuyos vértices se pueden separar en dos conjuntos V_1 y V_2 tales que

- $V_1 \cup V_2 = V$,
- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
- $\forall x_1, x_2 \in V_1$ y $\forall y_1, y_2 \in V_2$ no existe ninguna arista $e = (x_1, x_2)$ ni $e = (y_1, y_2)$.

Proposición 5.4. *Un espacio es $T_{\frac{1}{2}}$ si y sólo si su grafo es bipartito.*

Observación 5.1. A partir de este momento se denotará, en un grafo, a un punto cerrado por un círculo relleno y a un punto abierto por un círculo abierto.

Definición 5.6. Al grafo cuyos vértices estén representados por círculos rellenos o bien por círculos abiertos es llamado *grafo coloreado*.

Ejemplo 5.7. El grafo asociado al espacio $T_{\frac{1}{2}}$ del ejemplo 5.5 es

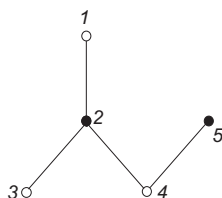


Figura 5.11:

5.2. Espacios regulares y normales.

Definición 5.7. Un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es llamado *regular* si este satisface que dado un conjunto A y punto $p \in X$ tal que $p \notin A$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $p \in V$.



Figura 5.12:

Dado un conjunto cerrado A que no sea abierto al mismo tiempo, se observa que $\widehat{A} - A \neq \emptyset$, así para algún $p \in \widehat{A} - A$ se tiene que $p \cap \widehat{A} = p$, con lo cual $\widehat{p} \cap \widehat{A} \neq \emptyset$. Lo que implica que \widehat{p} y \widehat{A} son los conjuntos abiertos más pequeños que contienen a p y A , respectivamente.

De lo anterior se puede concluir:

Proposición 5.5. *Los únicos espacios regulares finitos son aquellos en los cuales cada conjunto es cerrado y abierto al mismo tiempo.*

Demostración. Supóngase que el espacio topológico (X, \mathcal{T}) es regular. Si se elige un par arbitrario de puntos $p, q \in X$, se observa que puede ocurrir cualquiera de los dos casos siguientes:

$$p \in B_p \cap B_q \quad \text{o} \quad p \in B_p \cap B_q^c.$$

Del hecho de que el espacio X es regular, B_q^c es abierto. En cualquiera de los dos casos es necesario construir un conjunto abierto que contenga a p y que sea más

pequeño que B_p . Lo cual es una contradicción, ya que B_p es el conjunto abierto más pequeño que contiene a p no puede existir otro menor a él a menos que suceda que: $B_p = B_q$ o $B_p \cap B_q = \emptyset$ o bien $B_p = B_p \cap B_q^c$. \square

De esta manera los conjunto básicos distintos constituyen una partición de X y en este caso el espacio es disconexo, teniendo asociada la topología indiscreta.

Ejemplo 5.8. Si el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ tiene asociado la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 2, 12, 34, 134, 234, X\}$ y su latice es:

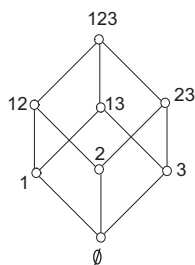


Figura 5.13:

entonces X es regular. El dígrafo asociado a este espacio es

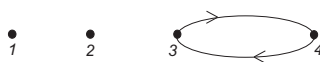


Figura 5.14:

Observación 5.2. Un espacio regular no es T_0 a menos que tenga asociada la topología discreta. En cualquier caso la latice de un espacio regular es isomorfo a un algebra Booleana.

Definición 5.8. Sea un espacio (X, \mathcal{T}) es llamado *normal* si satisface que dados dos conjuntos cerrados disjuntos A, B , entonces existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

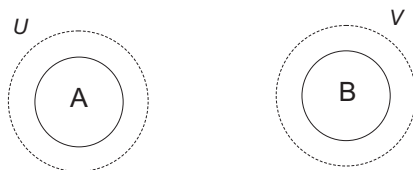


Figura 5.15:

De la definición de espacio regular se puede observar que:

Observación 5.3. Todo espacio regular es normal puesto que un conjunto cerrado de un espacio regular es abierto y por lo tanto eligiendo $U = A$ y $V = B$, se satisface la definición de espacio normal.

Proposición 5.6. Si un espacio (X, \mathcal{T}) es normal, dados A y B cerrados con $A \cap B = \emptyset$ entonces $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \emptyset$.

Proposición 5.7. En un espacio normal, si A es cerrado entonces \widehat{A} es cerrado.

Demostración. Supóngase que A es cerrado, sea

$$B = X - \widehat{A}.$$

Evidentemente B es cerrado, $\widehat{A} \cap B = \emptyset$ y $\widehat{A} \cup B = X$. De cualquier modo, $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \emptyset$, y esto implica que $\widehat{B} = B$, en otras palabras que B es abierto y por lo tanto \widehat{A} es cerrado. \square

Si A es cerrado, por la proposición anterior, \widehat{A} es una componente del espacio. En particular, si $A = p \in X$ donde p es un punto cerrado, entonces B_p^* es una componente. Así un espacio normal consta de componentes que son indiscretos o que contienen sólo a un punto cerrado.

Ejemplo 5.9.

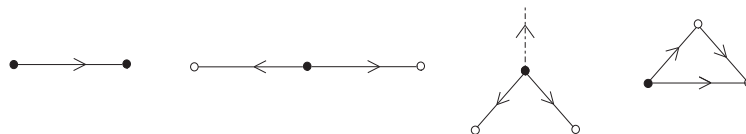


Figura 5.16:

Ejemplo 5.10. El espacio $X = \{1, 2, 3, 4\}$, con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 3, 12, 34, 123, X\}$ y cotopología $\{T\}^* = \{\emptyset, 4, 12, 34, X\}$,

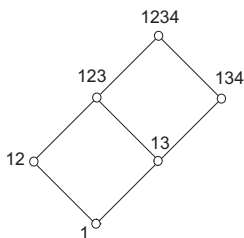


Figura 5.17:

es normal a partir de que la coclausura de todos los conjuntos cerrados es cerrada.

$$\widehat{\emptyset} = \emptyset$$

$$\widehat{4} = 34$$

$$\widehat{12} = 12$$

$$\widehat{124} = 1234$$

$$\widehat{34} = 34$$

$$\widehat{1234} = 1234$$

Este espacio no es regular, ya que por ejemplo, el conjunto $\{4\}$ no es abierto. El dígrafo de este espacio es:



Figura 5.18:

Capítulo 6

Combinatoria.

*Espero que la salida sea gozosa,
y espero nunca regresar.
Frida Kahlo.*

Ya se han definido algunas de las características más importantes de los espacios topológicos, y ahora es necesario introducir los conceptos de combinatoria, que son necesarios para analizar las características de cada uno de los elementos del espacio, entre los cuales se encuentran, su cardinalidad, el número de conjuntos conexos y las funciones generadoras.

6.1. Cardinalidad de una topología.

Del Capítulo 1, podemos recordar que todo conjunto abierto de un espacio topológico puede ser obtenido de la unión de elementos de la base irreducible \mathfrak{B} de su topología \mathcal{T} asociada. Es importante notar que no todas las uniones producirán distintos conjuntos abiertos.

Observamos un caso arbitrario de la unión de elementos básicos

$$V = B_1 \cup B_2 \cup \dots \tag{6.1}$$

si en determinado caso ocurriera que $B_1 \subset B_2$, entonces es claro que B_1 puede ser excluido de la unión y este hecho no afectaría en ninguna forma el resultado de tal unión. Por otra parte, no siempre existirán en elementos básicos comparables y por tanto no siempre se puede hacer esta reducción de términos en ciertas uniones.

Considérese un espacio topológico (X, \mathcal{T}) el cual es un espacio T_0 , para el cual su grafo dirigido asociado $D(\mathcal{T})$ no contiene pares de vértices conectados por más de una arista. En tal caso $G(\mathcal{T})$ se obtiene solamente reemplazando una arista dirigida por una no dirigida como se estudió en el capítulo 3 y los pares de elementos básicos comparables corresponden a los vértices adyacentes de G . De

esta manera conjuntos abiertos distintos serán producidos si únicamente aquellas uniones de elementos básicos están formadas por los correspondientes conjuntos de vértices de G , en donde ningún par de vértices son adyacentes.

Definición 6.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un subconjunto I de V se le llama *conjunto independiente* si para todo $p, q \in I$ $\{p, q\} \notin E$.

La discusión anterior se puede enunciar en el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *La cardinalidad de una topología finita es igual a el número de conjuntos independientes de vértices del grafo asociado a la topología.*

Ejemplo 6.1. Para el espacio topológico $X = \{1, 2, 3, 4\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}$ que es además un espacio T_0 , para el cual su lattice es

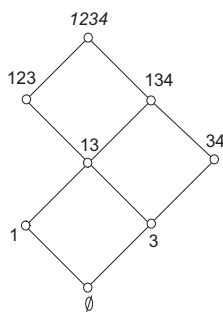


Figura 6.1:

los elementos básicos son

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 123, \quad B_3 = 3, \quad B_4 = 34,$$

y su grafo es

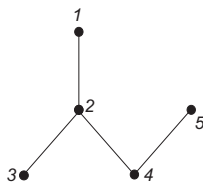


Figura 6.2:

Los conjuntos independientes correspondientes a sus conjuntos abiertos son:

Conjunto abierto	Independiente
\emptyset	\emptyset
1	1
123	2
3	3
34	4
13	13
134	134
1234	1234

Definición 6.2. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) que no es T_0 . Un subconjunto de vértices de su dígrafo asociado $D(\mathcal{T})$, cada uno de los cuales puede ser localizado desde algún otro por un camino dirigido, es llamado *componente fuerte* del dígrafo.

Definición 6.3. El dígrafo resultante de contraer cada componente fuerte (asociándoles un único vértice para todas las componentes fuertes) a un punto de X es llamada la *condensación* del dígrafo.

Ejemplo 6.2. Para el espacio topológico $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 2, 12, X\}$ y que no es un espacio T_0 , para el cual su latice es

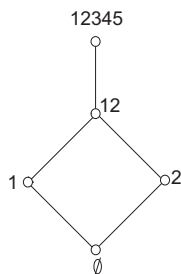


Figura 6.3:

los elementos básicos son

$$B_1 = 1, \quad B_2 = 2, \quad B_3 = B_4 = B_5 = 12345,$$

su dígrafo es

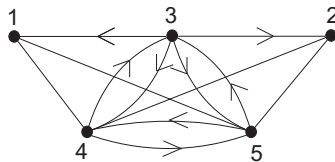


Figura 6.4:

La condensación de la componente fuerte 345 a un sólo punto, produce el dígrafo.

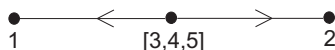


Figura 6.5:

Los conjuntos independientes y conjuntos abiertos correspondientes a este grafo son:

Conjunto Abierto	Independiente
\emptyset	\emptyset
1	1
2	2
12345	[3, 4, 5]
12	12

Del anterior ejemplo podemos observar que una componente fuerte consta de más de dos puntos.

Denotamos al número de conjuntos de vértices independientes del grafo $G(\mathcal{T})$ de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , por $\sigma(\mathcal{T})$.

Más aún podemos calcular el número de conjuntos independientes para un grafo G (σG), para el grafo $G - p$ que se obtiene de G al eliminar al vértice p ($\sigma(G - p)$) y al grafo $G - p - A_p$ que se construye de eliminar el vértice p y sus vértices adyacentes ($\sigma(G - p - A_p)$).

Teorema 6.2. *Sea el espacio topológico (X, \mathcal{T}) , su grafo asociado $G(\mathcal{T}) = (V, E)$ y un vértice arbitrario $p \in V$, entonces el número total de conjuntos indepen-*

dientes del espacio es

$$\sigma(G) = \sigma(G - p) + \sigma(G - p - A_p).$$

Demostración. Sea el espacio topológico (X, \mathcal{T}) , considérese su grafo asociado $G(\mathcal{T}) = (V, E)$ y un vértice arbitrario $p \in V$: Se denota al grafo derivado de

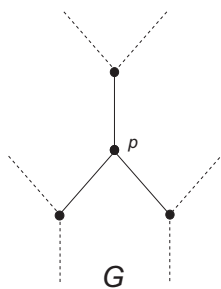


Figura 6.6:

G al eliminar a p y a todas las aristas conectadas con p por $G - p$, con lo cual cada conjunto independiente en $G - p$ es también conjunto independiente en G . Así $\sigma(G - p)$ es el número de conjuntos independientes que no contienen al vértice p .

Los restantes conjuntos independientes de G , son aquellos que no contienen a vértices adyacentes a p , donde cada uno de ellos son unión de $\{p\}$ con lo conjuntos independientes de $G - p - A_p$, donde A_p es el conjunto de vértices adyacentes a p en G :

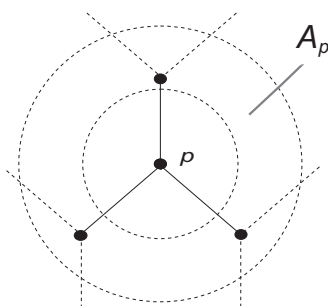


Figura 6.7:

Así el número de conjuntos independientes de G que contienen a p es igual a $\sigma(G - p - A_p)$, por tanto el número total de conjuntos independientes del espacio es

$$\sigma(G) = \sigma(G - p) + \sigma(G - p - A_p).$$

□

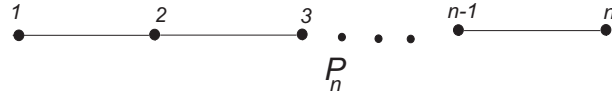
Lema 6.1. Sea G un grafo desconexo con componentes G_i ($i = 1, 2, \dots, n$); esto es,

$$G = \bigcup_{i=1}^n G_i,$$

entonces

$$\sigma(G) = \prod_{i=1}^n \sigma(G_i).$$

Lema 6.2. Si G es una cadena linear de n vértices (también llamado camino P_n)



entonces

$$\sigma(P_n) = F_{n+1},$$

donde F_n es el número de Fibonacci para n .

Demostración. Recordemos que $\sigma(G) = \sigma(G - p) + \sigma(G - p - A_p)$, de donde:

$$\sigma(P_n) = \sigma(P_{n-1}) + \sigma(P_{n-2})$$

la cual es idéntica a la relación de recursión de números de Fibonacci F_n :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (F_1 = 1, F_2 = 2).$$

Con esto los valores de $\sigma(P_n)$ esta en función del valor de F_n , a partir de donde se observa que P_1 tiene dos conjuntos independientes $(\emptyset, 1)$ y P_2 tiene tres $(\emptyset, 1, 2)$. Así $\sigma(P_n) = F_{n+1}$. □

Dado un espacio topológico finito (X, \mathcal{T}) , sea R el número de elementos de X ; entonces el número total de subespacios es 2^R .

Ejemplo 6.3. Para un espacio topológico, para el cual su topología tenga asociado el grafo se obtiene

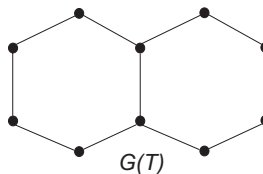


Figura 6.8:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{T}| &= \sigma(\text{Hexagon}^p) \\
 &= \sigma(\text{Hexagon}_{G-p}) + \sigma(\text{Hexagon}_{G-p-A_p}) \\
 &= \sigma(P_9) + \sigma(P_3 \cup P_3) \\
 &= \sigma(P_9) + \sigma^2(P_3) \\
 &= F_{10} + F_4^2 \\
 &= 114
 \end{aligned}$$

6.2. Cardinalidad de un subespacio.

Número de conjuntos que contienen a un conjunto dado.

Ahora el objetivo es hallar el número de conjuntos abiertos que contienen a un subconjunto $S \subset X$ como subconjunto de estos; este número de subconjuntos será representado por $n(S)$.

En el Capítulo 1 se pudo observar que:

Observación 6.1. La colección de conjuntos abiertos que contienen un subconjunto arbitrario $S \subset X$ es isomorfo al subespacio topológico de $X - \widehat{S}$ y por lo tanto $n(S) = |\mathcal{T}(X - \widehat{S})|$.

Teorema 6.3. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) con su grafo asociado G y sea un subconjunto arbitrario $S \subset X$; entonces el número de conjuntos abiertos que contienen al subconjunto S es

$$n(s) = \sigma(G - S - A^+(S)).$$

Demostración. Recordemos que $\widehat{S} = S \cup A^+(S)$, donde $A^+(S)$ es el conjunto de vértices adyacentes a alguno punto de S del dígrafo asociado a \mathcal{T} $D(\mathcal{T})$; además el dígrafo asociado al subespacio $X - \widehat{S}$, es el subdígrafo de $D(\mathcal{T})$ inducido por $X - \widehat{S}$.

Como $G - \widehat{S} = G - S - A^+(S)$ entonces $n(s) = \sigma(G - S - A^+(S))$. \square

Teorema 6.4. *Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) con su grafo asociado G y sea un subconjunto arbitrario $S \subset X$; entonces el número de conjuntos cerrados que contienen al subconjunto S es*

$$n^*(s) = \sigma(G - S - A^-(S)).$$

Demostración. La demostración es similar a la del teorema anterior. \square

Ejemplo 6.4. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , con $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 13, 34, 123, 134, X\}$, su dígrafo asociado es

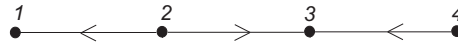


Figura 6.9:

Si $S = 12$, entonces $A^+(S) = 3$ y $A^-(S) = \emptyset$, y

$$n(S) = \sigma(\bullet) = \sigma(P_1) = F_2 = 2 \quad \text{y} \quad n^*(S) = \sigma(\bullet - \bullet) = \sigma(P_2) = F_3 = 2.$$

Ejemplo 6.5. Considérese el espacio con el dígrafo asociado

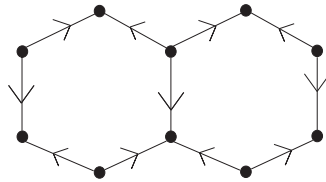


Figura 6.10:

En el ejemplo 6.3 se calculó la cardinalidad de este espacio a través de su grafo

asociado y se obtuvo que $|\mathcal{T}| = 114$.

Si se considera a $S = 126$, entonces

$$\widehat{S} = 123567, \quad \overline{S} = 12610$$

y por tanto

$$\begin{aligned} n(\mathbf{S}) &= \sigma(\widehat{\cdot} \cdot) \\ &= \sigma(P_3)\sigma(P_1) = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^*(\mathbf{S}) &= (\uparrow \searrow) \\ &= [\sigma(P_3)]^2 = 25. \end{aligned}$$

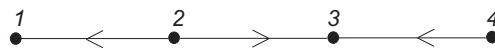
Corolario 6.1. *Sea un espacio (X, \mathcal{T}) que es $T_{\frac{1}{2}}$, donde sus conjuntos constan de un sólo elemento, entonces el número de conjuntos abiertos que contienen al elemento p es $n_p = n(\{p\})$. Así*

- i) *Si p es abierto entonces $n(p) = \sigma(G - p)$ y $n^*(p) = \sigma(G - p - A_p)$.*
- ii) *Si p es cerrado entonces $n^*(p) = \sigma(G - p - A_p)$ y $n(p) = \sigma(G - p)$.*

Demostración. Esta conclusión es evidente del hecho que si p es abierto entonces, $\widehat{p} = p$ y $\overline{p} = p \cup A_p$; además si p es cerrado, entonces $\widehat{p} = p \cup A_p$ y $\overline{p} = p$. \square

Lema 6.3. *Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , que es $T_{\frac{1}{2}}$, para el cual sus conjuntos constan sólo un elemento, entonces $n_p + n_p^* = \sigma(G)$.*

Ejemplo 6.6. En el espacio dado en el ejemplo 6.4



$$\begin{array}{ll}
 n_1 = (\text{---}) = 5, & n_1^* = (\text{---}) = 3, \\
 n_2 = (\cdot) = 2, & n_2^* = (\text{---} \cdot) = 6, \\
 n_3 = (\text{---} \cdot) = 6, & n_3^* = (\cdot) = 2, \\
 n_4 = (\text{---}) = 3, & n_4^* = (\text{---}) = 5.
 \end{array}$$

6.3. Conjuntos Conexos.

En esta sección el objetivo es hallar el número de conjuntos conexos de un espacio topológico (X, \mathcal{T}) a través de su grafo asociado. Tal número será representado a partir de este momento por $\rho(G)$.

Definición 6.4. $G \bullet p$ es el grafo obtenido de G al eliminar el vértice p y conectar cada par de elementos adyacentes a p a través de una arista.

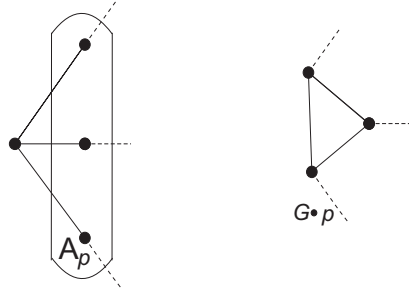


Figura 6.11:

Teorema 6.5. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y $G(\mathcal{T})$ su grafo asociado, entonces el número de conjuntos conexos es

$$\rho(G) = \rho(G - p) + \rho(G \bullet p) - \rho(G - p - A_p) + 1.$$

Demostración. Es evidente que el número de conjuntos conexos que contienen a p es igual a uno más el número de conjuntos conexos que al menos contienen un elemento de A_p . Ahora bien el número de conjuntos conexos de $G \bullet p$ que no contienen a ningún elemento de A_p es

$$\rho(G \bullet p - A_p) = \rho(G - p - A_p),$$

con esto se observa que el número de conjuntos conexos que contienen al menos un elemento de A_p esta dado por $\rho(G \bullet p) - \rho(G - p - A_p)$ entonces el número total de conjuntos conexos de G que contiene a p es

$$\rho(G \bullet p) - \rho(G - p - A_p) + 1.$$

Además $\rho(G - p)$ es el número de conjuntos conexos que no contienen a p , por tanto

$$\rho(G) = \rho(G - p) + \rho(G \bullet p) - \rho(G - p - A_p) + 1.$$

□

Corolario 6.2. Sea $\bigcup_{i=1}^n G_i$ la unión grafos disjuntos, entonces su número de conjuntos conexos es

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) = \sum_{i=1}^n \rho(G_i) - n + 1.$$

Demostración. La demostración surge de la demostración del teorema anterior y de la definición de conjuntos disjuntos. □

Observación 6.2. Sea un camino de n vértices P_n entonces el número de conjuntos conexos es

$$\rho(P_n) = 2\rho(P_{n-1}) - \rho(P_{n-2}) + 1.$$

Lema 6.4. Sea P_n un camino de n vértices, por tanto el número de conjuntos conexos se calcula como:

$$\rho(P_n) = \frac{1}{2}n(n+1) + 1$$

Demostración. La prueba se realizará mediante inducción matemática.

Es fácil ver que $\rho(P_1) = 2$ y $\rho(P_2) = 4$.

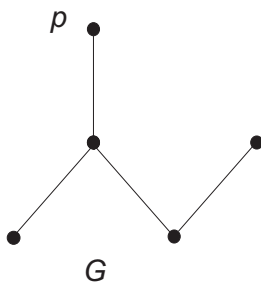
Supóngase que se cumple para n .

Ahora bien para $n + 1$

$$\begin{aligned} \rho(P_{n+1}) &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 1 \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) + 1 \\ &= \frac{1}{2}n^2 + n + \frac{1}{2}n + 1 + 1 \\ &= \left[\frac{1}{2}n(n+1) + 1\right] + (n+1) \\ &= \rho(P_n) + (n+1) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.7. Para la topología del cual su grafo es:



$$\begin{aligned} \rho(G) &= 2\rho(\bigwedge \bigvee) - \rho(\cdot \ /) + 1 \\ &= 2[(1/2)4 * 5 + 1] - [2 + 4 - 2 + 1] + 1 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Así de los 32 subespacios de este espacio, 18 son conexos.

En un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ los puntos pueden ser particionados como $X = X_0 \cup X_c$, donde los elementos de X_0 son puntos abiertos y los de X_c son cerrados.

Los conjuntos abiertos conexos se clasifican como:

- i) \emptyset ,
- ii) abiertos de un sólo elemento,
- iii) uniones de elementos básicos de puntos cerrados.

Nota 6.1. Algún otro tipo de abierto puede ser conexo en un espacio $T_{\frac{1}{2}}$; un par de puntos abiertos y cerrados pueden ser adyacentes en el grafo.

Observación 6.3. El número de conjuntos conexos abiertos de un espacio X , se calcula a través de su grafo asociado G por

$$\rho_o(G) = |X_o| + \rho(G_c).$$

Observación 6.4. El número de conjuntos conexos cerrados de un espacio X , se calcula a través de su grafo asociado G por

$$\rho_c(G) = |X_c| + \rho(G_o).$$

Ejemplo 6.8. Para el espacio dado en el ejemplo 6.7, supóngase que los puntos son particionados en dos conjuntos de la siguiente manera

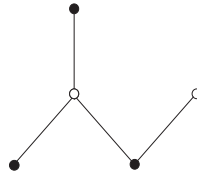


Figura 6.12:

Con lo cual las dos condensaciones de G son



Figura 6.13:

Entonces

$$\begin{aligned} \rho_o(G) &= |X_o| + \rho(\triangle) \\ &= 2 + 8 = 10, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_c(G) &= |X_c| + \rho(\text{---}) \\ &= 3 + 4 = 7. \end{aligned}$$

donde $\rho(G) = 14$, así $5/7$ de los conjuntos abiertos del espacio son conexos y $1/2$ de los conjuntos cerrados.

6.4. Funciones Generadoras.

Definición 6.5. En un espacio topológico (X, T) , la *función generadora* de los conjuntos abiertos esta defina por

$$F(D; z) = \sum_{k=0}^{|X|} N_k(D) z^k;$$

donde D es el dígrafo de la topología y $N_k(D)$ es el número de conjuntos abiertos con cardinalidad k .

Observación 6.5.

$$\sigma(G(D)) = F(D; 1)$$

Teorema 6.6. *Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) que es $T_{\frac{1}{2}}$ entonces su función generadora para sus conjuntos abiertos es*

$$F(D; z) = F(D - p; z) + z^{1+|A_p^+|} F(D - p - A_p^+; z),$$

p cerrado.

Demostración. Supóngase que X es particionado por $X = X_o \cup X_c$ y $p \in X_c$. Al eliminar p no cambia la cardinalidades de los conjuntos básicos asociados con otros puntos, cada conjunto abierto de $D - p$ también son conjuntos abiertos de D con la misma cardinalidad. Los otros conjuntos abiertos de D surge de las uniones de $B_p = \{p\} \cup A_p^+$ con conjuntos abiertos de $D - p - A_p^+$, donde tal unión incrementa la cardinalidad de un conjunto abierto obteniendo $1 + |A_p^+|$, con lo cual

$$F(D; z) = F(D - p; z) + z^{1+|A_p^+|} F(D - p - A_p^+; z).$$

□

Lema 6.5. *Si un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es desconexo así dígrafo asociado puede ser expresado como $D = D_1 \cup D_2$ entonces*

$$N_k(D) = \sum_{l=0}^n N_{k-l}(D_1) N_l(D_2).$$

Demostración. Dado que X es desconexo, su dígrafo asociado puede ser expresado como $D = D_1 \cup D_2$, entonces un conjunto abierto de cardinalidad k resulta de la unión de un conjunto de cardinalidad l en un componente y uno de cardinalidad $k - l$, luego

$$N_k(D) = \sum_{l=0}^n N_{k-l}(D_1) N_l(D_2).$$

□

Lema 6.6. *Si un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es desconexo entonces*

$$F(D_1 \cup D_2; z) = F(D_1; z) F(D_2; z).$$

Demostración. Esta demostración es directa, ya que solamente sustituimos el resultado del lema anterior en la definición 6.5. \square

Ejemplo 6.9. Para el espacio topológico $T_{\frac{1}{2}}$, con

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, 1, 3, 4, 13, 14, 34, 45, 134, 145, 345, 1234, 1345, X\};$$

para el cual su dígrafo es

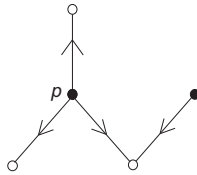


Figura 6.14:

de la formula de recursión se obtiene que

$$\begin{aligned} F(D; z) &= F(\circ \nearrow; z) + z^4 F(\bullet; z) \\ &= (1 + z)^2(1 + z + z^2) + z^4(1 + z) \\ &= 1 + 3z + 4z^2 + 3z^3 + 2z^4 + z^5 \end{aligned}$$

Lema 6.7. Sean un espacio topológico (X, \mathcal{T}) que es $T_{\frac{1}{2}}$ y un subconjunto $Y \subset X_c$, entonces

$$F(D; z) = (1 + z)^{|X_0|} \sum_{Y \subset X_0} z^{|Y|} \left(\frac{z}{1 + z}\right)^{|A^+(Y)|}$$

Demostración. Si $p \in X_c$, entonces $B_p = \{p\} \cup A_p^+$, ahora bien como $Y \subset X_c$, entonces \widehat{Y} es un conjunto abierto con cardinalidad $|Y| + |A^+(Y)|$ y contribuye con el término $z^{|Y|+|A^+(Y)|}$ a $F(D; z)$. Por otra parte, conjuntos abiertos distintos son formados por la unión con Y de algún subconjunto de elementos de X_0 con cardinalidad $|X_0| - |A^+(Y)|$ que son adyacentes a algún elemento que no es miembro a Y . Por tanto cada $Y \subset X_c$ contribuye con un total de

$$(1 + z)^{|X_0|-|A^+(Y)|} z^{|Y|+|A^+(Y)|}$$

términos a $F(D; z)$. Finalmente, sumando estos términos se tiene:

$$F(D; z) = (1+z)^{|X_0|} \sum_{Y \subset X_c} z^{|Y|} \left(\frac{z}{1+z} \right)^{|A^+(Y)|}.$$

□

Corolario 6.3. *Si un espacio topológico (X, \mathcal{T}) es $T_{\frac{1}{2}}$ y $Y \subset X_c$, entonces*

$$\sigma(G) = \sum_{Y \subset X_c} 2^{|X_0| - |A^+(Y)|}.$$

Demostración. La fórmula se obtiene al sustituir $z = 1$ en el resultado del teorema anterior. □

Ejemplo 6.10. Considérese el espacio dado en el ejemplo 6.9.

Los cuatros subconjuntos de $X_c = \{1, 2\}$ dados son:

Y	$ Y $	$ A^+(Y) $
\emptyset	0	0
1	1	3
2	1	1
12	2	3

luego

$$\begin{aligned} F(D; z) &= (1+z)^3 \left[1 + z \left(\frac{z}{1+z} \right)^3 + z \left(\frac{z}{1+z} \right) + z^2 \left(\frac{z}{1+z} \right)^3 \right] \\ &= 1 + 3z + 4z^2 + 3z^3 + 2z^4 + z^5. \end{aligned}$$

Además podemos ver que $F(D; 1) = \sigma(G) = 14$.

Teorema 6.7. *Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) que es $T_{\frac{1}{2}}$. La función generadora de sus conjuntos cerrados esta dada por:*

$$F(D'; z) = z^{|X|} F(D; z^{-1}).$$

Demostración. Considérese un conjunto cerrado con cardinalidad k que es el complemento de un conjunto abierto de cardinalidad $|X| - k$. Se demostró que

$$N_k(D') = N_{|X|-k}(D).$$

Así

$$\begin{aligned} F(D'; z) &= \sum_{k=0}^{|X|} N_k(D') z^k \\ &= \sum_{k=0}^{|X|} N_{|X|-k}(D) z^k \\ &= \sum_{k=0}^{|X|} N_k(D) z^{|X|-k} \\ &= z^{|X|} F(D; z^{-1}) \end{aligned}$$

□

6.5. Funciones de correlación de dos puntos en espacios $T_{\frac{1}{2}}$.

6.5.1. Conjuntos abiertos que contienen un par dado.

Definición 6.6. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y un subconjunto $S \subset X$. Definimos a la *probabilidad de que algún conjunto abierto de X contenga al subconjunto S* como $P_o(S)$, y se calcula por

$$P_o(S) = \sigma(G - \widehat{S}) / \sigma(G).$$

Definición 6.7. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , la función de correlación de dos puntos en el espacio, para un par de puntos (p, q) es

$$\Gamma_o(p, q) = P_o(p, q) - P_o(p)P_o(q).$$

Definamos

$$\sigma(G - p) = \sigma - \alpha_p \quad \text{y} \quad \sigma(G - p - q) = \sigma - \alpha_p - \alpha_q - \alpha_{pq},$$

donde

$$\sigma = \sigma(G), \alpha_p = \sigma(G - p - A_p), \text{ y } \alpha_{pq} = \sigma(G - p - q - A_p - A_q).$$

Proposición 6.1. *En un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ dados dos puntos p, q abiertos o cerrados. Hay tres casos específicos que se deben considerar:*

1. p y q ambos abiertos.

$$\begin{aligned}\Gamma_o(p, q) &= [\sigma(G)\sigma(G - p - q) - \sigma(G - p)\sigma(G - q)]/\sigma^2(G). \\ &= (\sigma\alpha_{pq} - \alpha_p\alpha_q)/\sigma^2.\end{aligned}$$

2. p y q ambos cerrados

$$\begin{aligned}\Gamma_o(p, q) &= [\sigma(G)\sigma(G - p - A_p - q - A_q) - \sigma(G - p - A_p)\sigma(G - q - A_q)]/\sigma^2(G). \\ &= (\sigma\alpha_{pq} - \alpha_p\alpha_q)/\sigma^2.\end{aligned}$$

3. p abierto y q cerrado.

$$\Gamma_o(p, q) = [\sigma(G)\sigma(G - p - q - A_q) - \sigma(G - p)\sigma(G - q - A_q)]/\sigma^2(G).$$

para este caso el valor de σ depende de que p y q sean o no adyacentes

$$\sigma(G - p - q - A_q) = \begin{cases} \alpha_q, & \text{si } p \in A_q; \\ \alpha_q\alpha_{pq}, & \text{si } p \notin A_q. \end{cases}$$

Si $p \notin A_q$, entonces

$$\Gamma_o(p, q) = (\alpha_p\alpha_q - \sigma\alpha_{pq})/\sigma^2.$$

Por otra parte si $p \in A_q$ entonces

$$\Gamma_o(p, q) = \alpha_p\alpha_q/\sigma^2.$$

Demostración. 1.

$$\begin{aligned}\Gamma_o(p, q) &= P_o - P_o(p)P_o(q) \\ &= \frac{\sigma(G - p - q)}{\sigma(G)} - \frac{\sigma(G - p)}{\sigma(G)} \frac{\sigma(G - q)}{\sigma(G)} \\ &= \frac{\sigma(G)\sigma(G - p - q) - \sigma(G - p)\sigma(G - q)}{\sigma^2(G)}\end{aligned}$$

Las demostraciones de los otros dos casos son de manera análoga. \square

Observación 6.6. La función de correlación del caso 3 para cuando el punto $p \notin A_q$ de la proposición anterior es la función de correlación negativa del caso 1 y 2.

6.5.2. Conjuntos abiertos y cerrados que contienen un par dado.

Definición 6.8. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) y un subconjunto $S \subset X$, definimos a la *probabilidad de que S esté contenido en cualquier conjunto abierto o cerrado del espacio* como $P_{oc}(S)$,

$$P_{oc} = [\sigma(G - \widehat{S}) + \sigma(G - \overline{S})]/2\sigma(G).$$

Así la función de correlación $\Gamma_{oc}(p, q)$ tienen una forma similar a $\Gamma_o(p, q)$. Hay dos casos específicos:

1. p y q ambos abiertos o ambos cerrados

$$\Gamma_{oc}(p, q) = [\sigma(G - p - q - A_p - A_q) + \sigma(G - p - q) - 1/2\sigma(G)]/2\sigma(G),$$

de donde

$$\Gamma_{oc}(p, q) = (\alpha - 2\alpha_p - 2\alpha_q + 4\alpha_{pq})/4\sigma.$$

2. p abierto y q cerrado

$$\Gamma_{oc}(p, q) = [\sigma(G - p - q - A_q) + \sigma(G - p - q - A_p) - 1/2\sigma(G)]/2\sigma(G),$$

del cual, si $p \notin A_q$,

$$\Gamma_{oc}(p, q) = -(\sigma - 2\alpha_p - 2\alpha_q + 4\alpha_{pq})/4\sigma,$$

que es el negativo del caso 1. Si $p \in A_q$, entonces

$$\Gamma_{oc}(p, q) = (2\alpha_p + 2\alpha_q - \sigma)/4\sigma.$$

6.5.3. Conjuntos abiertos que contienen exactamente un miembro de un par.

Definición 6.9. La función de correlación que considera la probabilidad de que exactamente un miembro de un par de puntos pertenezca a un conjunto abierto es

$$\Gamma'_o(p, q) = P_o(p, \sim q) + P_o(\sim p, q) - P_o(p)P_o(\sim q) - P_o(\sim p)P_o(q),$$

donde por ejemplo $P_o(p, \sim q)$ es la probabilidad que un conjunto abierto arbitrario que contenga a p y no q .

Recordemos que $P_o(p) = \sigma(G - \widehat{p})/\sigma(G)$, de la definición anterior podemos ver que $P_o(\sim p) = \sigma(G - \overline{p})/\sigma(G)$. Así

$$P_o(p, \sim q) + P(\sim p, q) = [\sigma(G) - \sigma(G - \widehat{p}q) - \sigma(G - \overline{p}q)]/\sigma(G).$$

Para este tipo de funciones de correlación también se observan dos casos específicos:

1. p y q ambos abiertos o ambos cerrados.

$$\Gamma'_o(p, q) = 2(\alpha_p\alpha_q - \sigma\alpha_{pq})/\sigma^2.$$

2. p abierto y q cerrado

$$\Gamma'_o(p, q) = \begin{cases} 2(\sigma\alpha_{pq} - \alpha_p\alpha_q)/\sigma^2, & \text{si } p \notin A_q; \\ -2\alpha_p\alpha_q/\sigma^2, & \text{si } p \in A_q. \end{cases}$$

En ambos casos $\Gamma'_o(p, q) = -2\Gamma_o(p, q)$.

Ejemplo 6.11. Para el espacio del cual su grafo es:

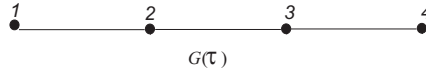


Figura 6.15:

los valores numéricos de la función de correlación para los cuatro diferentes tipos de conjuntos de dos puntos son:

p, q	$\Gamma_o(p, q)$	$\Gamma_{oc}(p, q)$	$\Gamma'_o(p, q)$
1, 2	3/32	1/16	-3/16
2, 3	1/16	0	-1/8
1, 3	1/32	1/16	-1/16
1, 4	1/64	0	-1/32

Capítulo 7

Topología de Enlace.

*El hombre nunca sabe de lo que
es capaz, hasta que lo intenta.
Charles Dickens.*

Comenzando con una estructura representando una molécula, buscamos construir un espacio topológico que represente esta estructura. Este problema no tiene matemáticamente una única solución, existen varias formas adecuadas de asociar un espacio topológico con una estructura dada y es en gran parte un asunto de la ingenuidad el construir un espacio que enfatice esos aspectos de la estructura considerados como importantes. Esto es un poco diferente de la situación usual encontrada en la aplicación de matemáticas a problemas químicos, en el cual hay usualmente solo una forma correcta de asociar. Así lejos en el estudio de la topología molecular no se han descubierto isomorfismos entre las construcciones matemáticas por una parte y los objetos u operaciones por la otra. Ya que el conjunto de operaciones de topología son muy diferentes en estructura al del álgebra usual encontrada en las teorías físicas.

Hasta ahora la búsqueda de métodos exitosos para la construcción de topologías moleculares sean concentrado en la adyacencia atómica como la característica clave de la estructura. Específicamente para un espacio topológico molecular (X, \mathcal{T}) el conjunto X es tomado para representar un conjunto de átomos de carbono en el caso de hidrocarburos saturados o un conjunto de orbitales de carbón p , en el caso de un conjugado, hidrocarburo no saturado, y es derivado de los lazos entre estos átomos u orbitales implicados por la fórmula estructural de la molécula.

Dado que los conjuntos abiertos son los bloques de construcción de un espacio topológico y los lazos son lo mismo para las estructuras moleculares, un paso natural es requerir que cada lazo sea un conjunto abierto; esto es si p y q son átomos conectados, entonces nos preguntamos si $\{p, q\} \in \mathcal{T}$. La topología más pequeña en X para la cual esto será cierto es la definida por la subbase consistente de la colección de lazos de dos conjuntos. La topología así definida sobre una molécula es llamada topología de enlace.

Es necesario aclarar que en lo temas que se analizarán a partir de ahora no importan las sustancias que forman a las moléculas, sólo nos interesará su estructura gráfica. Además que esta teoría sólo es aplicable a hidrocarburos saturados (derivados de carbón p).

7.1. Construcción de la Topología de Enlace

Definición 7.1. La *topología de enlace* es definida como la topología más pequeña en el conjunto X de átomos en el cual cada conjunto de un par de átomos adyacentes es abierto. En otras palabras, la topología de enlace es la generada por las subbases

$$E = \{\{p, q\} | p \text{ y } q \text{ adyacentes en } G\}.$$

Ejemplo 7.1. Las subbases para la topología de enlace del 2-metilpenteno

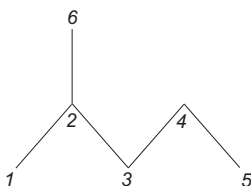


Figura 7.1:

consisten de los conjuntos

$$\{1, 2\}, \quad \{2, 6\}, \quad \{2, 3\}, \quad \{3, 4\}, \quad \text{y} \quad \{4, 5\}.$$

Los elementos de las bases en la topología de enlace están dados como en el capítulo 1

$$B_p = \bigcap_{q \in A_p} \{p, q\},$$

donde A_p es el conjunto de átomos adyacentes a p . De lo anterior podemos describir a B_p de forma más simple

Observación 7.1.

$$B_p = \begin{cases} p \cup A_p, & \text{si } p \text{ es de grado 1;} \\ p, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 7.2. Para el espacio del ejemplo 7.1 los elementos básicos son:

$$\begin{array}{ll} B_1 = \{1, 2\} & B_4 = \{4\} \\ B_2 = \{2\} & B_5 = \{4, 5\} \\ B_3 = \{3\} & B_6 = \{2, 6\} \end{array}$$

7.2. Estructura de la topología de enlace.

7.2.1. Estructura de grafo.

Definición 7.2. El dígrafo de la topología de enlace para un hidrocarburo general será disconexo, constan sólo de los siguientes cuatro tipos de *componentes estructurales*:

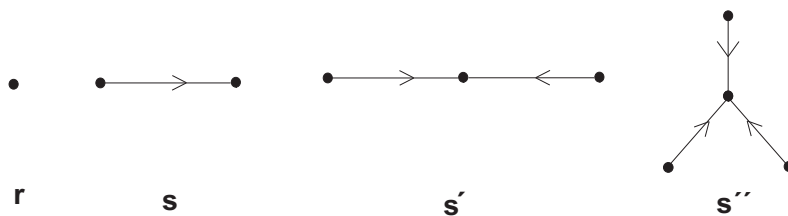


Figura 7.2:

Proposición 7.1. *Los espacios de la topología de enlace son espacios normales; ya que sus componentes estructurales constan solamente de un punto cerrado.*

Observación 7.2. De la estructura del carbón de eteno y del etileno se obtiene que su dígrafo asociado es (a) y para el neopenteno su dígrafo asociado es (b).

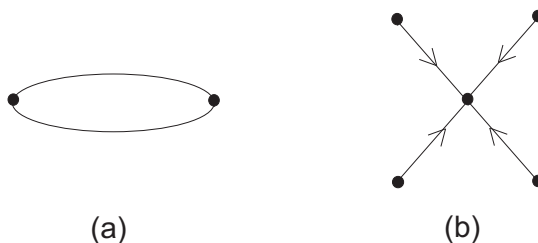


Figura 7.3:

Ejemplo 7.3. El dígrafo del espacio de los ejemplo 7.1 y 7.2

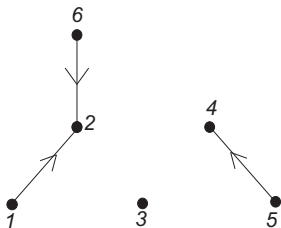


Figura 7.4:

En una topología de enlace se pueden hallar los siguientes tipos de componentes:

Componente	Dígrafo	Tipo Átomo	Tipo
r	\bullet r	r	abierto cerrado
s	$\bullet \longrightarrow \bullet$ $t \qquad s$	s t	abierto cerrado
s'	$\bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet$ $t' \qquad s' \qquad t'$	s' t'	abierto cerrado
s''	\bullet \downarrow \bullet $\nearrow \quad \nwarrow$ $\bullet \qquad \bullet$ $t'' \qquad s'' \qquad t''$	s'' t''	abierto cerrado

Figura 7.5:

Para un espacio general se denotara esta topología por

$$\mathbf{r}^r \mathbf{s}^s \mathbf{s}'^{s'} \mathbf{s}''^{s''},$$

donde $k = (r, s, s', s'')$ es el número de componentes de \mathbf{k} .

Proposición 7.2. *Los átomos de este tipo de espacios, son abiertos o cerrados (o ambos). Por tanto, estos espacios con topología de enlace son todos $T_{\frac{1}{2}}$.*

Proposición 7.3. Una cadena lineal de N átomos ($N > 3$) tiene una topología de enlace

$$r^{N-4} s^2.$$

Proposición 7.4. Una molécula cíclica de N átomos tiene asociada una topología discreta r^N .

Ejemplo 7.4. Para el naftaleno (a) y el ciclodecapentaeno (b), ambos tienen topología r^{10} .

7.2.2. Estructura de Latices.

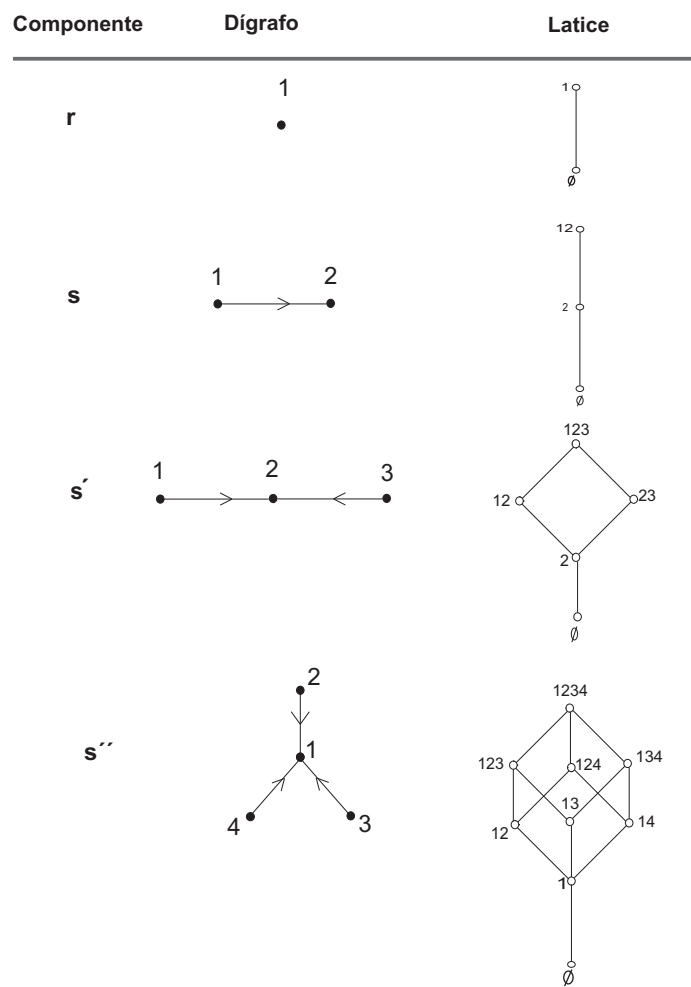


Figura 7.6:

El latice de la topología de enlace para una molécula general tiene la estructura de componentes

$$\mathbf{r}^r \mathbf{s}^s \mathbf{s}'^{s'} \mathbf{s}''^{s''},$$

así su latice es

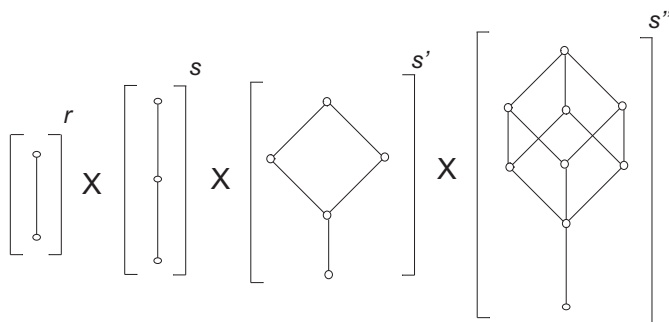


Figura 7.7:

Ejemplo 7.5. Para los ejemplos 7.1 y 7.2, el latice de la topología de enlace de

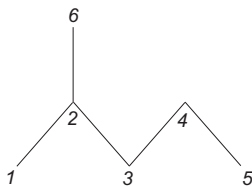


Figura 7.8:

para el cual su estructura de componentes es $\mathbf{r} \mathbf{s} \mathbf{s}'$, es

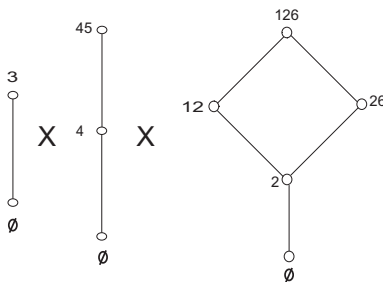


Figura 7.9:

7.2.3. Clases Homeomorfas.

Teorema 7.1. *Con la topología de enlace, si un par de moléculas tienen el mismo valor de sus componentes estructurales entonces son homeomorfas.*

Ejemplo 7.6. Las estructuras

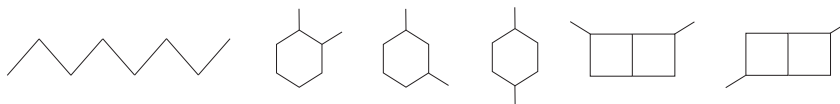


Figura 7.10:

todas tienen una topología de enlace de $\mathbf{r^4s^2}$.

7.3. Propiedades combinatorias de la topología de enlace.

7.3.1. Funciones Generadoras.

Definición 7.3. La función generadora para la totalidad de conjuntos abiertos es

$$F_o(r, s, s', s'') = \sum_{j=0}^{|X|} N_j^o z^j,$$

N_j^o es el número de conjuntos abiertos de la cardinalidad j .

Proposición 7.5. *La función generadora de cada componente del espacio está dada por:*

$$F_o(r, s, s', s'') = F_o(\mathbf{r}; z)^r F_o(\mathbf{s}; z)^s F_o(\mathbf{s}'; z)^{s'} F_o(\mathbf{s}''; z)^{s''},$$

donde $F_o(\mathbf{k}; z)$ es la función generadora de conjuntos abiertos para una componente del tipo \mathbf{k} .

Haciendo una inspección de los latices dadas en la sección anterior se observa que $F_o(\mathbf{k}; z)$ tiene la siguiente forma:

\mathbf{k}	$F_o(\mathbf{k}; z)$
\mathbf{r}	$1 + z,$
\mathbf{s}	$1 + z + z^2,$
\mathbf{s}'	$1 + z + 2z^2 + z^3,$
\mathbf{s}''	$1 + z + 3z^2 + 3z^3 + z^4.$

Ejemplo 7.7. Para las moléculas con la estructura observada en el ejemplo 7.6 y de las cuales su topología es $\mathbf{r}^4\mathbf{s}^2$, la función generadora de conjuntos abiertos es

$$\begin{aligned} F_o(4, 2, 0, 0; z) &= (1+z)^4(1+z+z^2)^2 \\ &= 1 + 6z + 17z^2 + 30z^3 + 36z^4 + 30z^5 + 17z^6 + 6z^7 + z^8. \end{aligned}$$

Haciendo $z = 1$, se obtiene $|\mathcal{T}| = 144$.

Ejemplo 7.8. La cardinalidad de la topología de enlace

$$\mathbf{r}^r \mathbf{s}^s \mathbf{s}'^{s'} \mathbf{s}''^{s''}$$

esta dada por

$$F_o(r, s, s', s''; 1) = 2^r 3^{s+2s''+5s'}.$$

La función generadora de conjuntos cerrados tiene la forma

$$F_c(r, s, s', s''; z) = z^n F_o(r, s, s', s''; z^{-1}),$$

donde $n = r + 2s + 3s' + 4s''$ es el número total de átomos en la estructura. Así los factores de conjuntos cerrados son:

\mathbf{k}	$F_o(\mathbf{k}; z)$
\mathbf{r}	$1 + z,$
\mathbf{s}	$1 + z + z^2,$
\mathbf{s}'	$1 + z + 2z^2 + z^3,$
\mathbf{s}''	$1 + 3z + 3z^2 + z^3 + z^4.$

Teorema 7.2. Sea un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , para la totalidad de conjuntos abiertos y cerrados, la función generadora:

1. para conjuntos abiertos que contienen un subconjunto $S \subset X$ esta dada por

$$z^{|\widehat{S}|} F_o(X - \widehat{S}; z).$$

2. para conjuntos abiertos que contienen un subconjunto $S \subset X$ esta dada por

$$z^{|\overline{S}|} F_c(X - \overline{S}; z).$$

Demostración. Para esta demostración solamente es necesario recordar que la colección de conjuntos abiertos que satisface este criterio (como en el Capítulo 1) es

$$\{\widehat{S} \cup A \mid A \in \mathcal{T}(X - \widehat{S})\},$$

y para los conjuntos cerrados

$$\{\overline{S} \cup A \mid A \in \mathcal{T}^*(X - \overline{S})\},$$

□

Observación 7.3. La función generadora para los conjuntos abiertos que contienen a un átomo del tipo \mathbf{r} es obtenida de la función del espacio completo reemplazando el factor z por el factor $1 + z$.

Ejemplo 7.9. Para la molécula

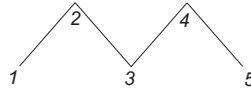


Figura 7.11:

de la cual el dígrafo de su topología de enlace es



Figura 7.12:

la topología de enlace es \mathbf{rs}^2 , de donde su función generadora es

$$F_o(\mathbf{rs}^2; z) = (1 + z)(1 + z + z^2)^2.$$

Así, la función generadora para los conjuntos abiertos que contienen al átomo 3 esta dada por

$$F_o(\mathbf{r}; z) = z(1 + z + z^2)^2.$$

Observación 7.4. La función generadora de un subconjunto, es obtenida de la función generadora del espacio completo: para cada componente \mathbf{k} ,

$$F_o(\mathbf{k}; z) \rightarrow z^{|\mathbf{k} \cap \widehat{S}|} F_o(\mathbf{k} - \widehat{S}; z)$$

$$F_c(\mathbf{k}; z) \rightarrow z^{|\mathbf{k} \cap \overline{S}|} F_o(\mathbf{k} - \overline{S}; z)$$

Para un subconjunto que consiste de un solo elemento y para subconjuntos de dos elementos que corresponden posiblemente a un par de átomos adyacentes, su función generadora puede ser expresada de la forma:

$$z^{\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta} F(\mathbf{r}; z)^{r-\alpha} F(\mathbf{s}; z)^{s-\beta} F(\mathbf{s}'; z)^{s'-\gamma} F(\mathbf{s}''; z)^{s''-\delta}$$

para conjuntos abiertos o cerrados. Los valores de los exponentes para los diversos tipos de subconjuntos que pueden existir se presentan en la siguiente tabla.

Exponentes para funciones
generadores de subconjuntos

Conjunto	Abierto				Cerrado			
	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
r	1	0	0	0	1	0	0	0
s	-1	1	0	0	0	1	0	0
t	0	1	0	0	-1	1	0	0
s'	-2	0	1	0	0	0	1	0
t'	-1	0	1	0	0	-1	1	0
s''	-3	0	0	1	0	0	0	1
t''	-2	0	0	1	0	0	-1	1
rr	2	0	0	0	2	0	0	0
rs	0	1	0	0	1	1	0	0
rs'	-1	0	1	0	1	0	1	0
rs''	-2	0	0	1	1	0	0	1
ss'	0	1	0	0	0	1	0	0
ss''	-3	1	1	0	0	1	1	0
st'	-4	1	0	0	0	1	1	1
$s't'$	-1	0	1	0	0	0	1	0
$s's''$	-5	0	1	1	0	0	1	1
$s''t''$	-2	0	0	1	0	0	0	1

Figura 7.13:

Ejemplo 7.10. Considérese el enlace (24) del espacio topológico para el cual su dígrafo es

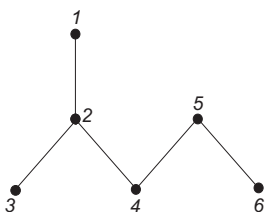


Figura 7.14:

del cual sus elementos básicos son:

$$B_1 = \{1, 2\}, \quad B_2 = \{2\} \quad B_3 = \{2, 3\} \quad B_4 = \{4\} \quad B_5 = \{5\} \quad B_6 = \{5, 6\}.$$

La topología de enlace para esta molécula es rss' , de la que el grafo asociado es

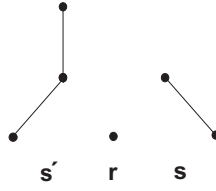


Figura 7.15:

con funciones generadoras

$$F_o(\mathbf{k}) = (1 + z)(1 + z + z^2)(1 + z + 2z^2 + z^3) \quad (7.1)$$

$$F_c(\mathbf{k}; z) = (1 + z)(1 + z + z^2)(1 + 2z + z^2 + zz^3) \quad (7.2)$$

El enlace (24) es del tipo $(\mathbf{rs})'$, y

$$\widehat{\{2, 4\}} = \{2, 4\}, \quad \overline{\{2, 4\}} = 1, 2, 3, 4.$$

La función generadora de los conjuntos abiertos para este enlace se obtiene reemplazando z por $1 + z$ en 7.1 y 7.2. Tenemos

$$1 + z \rightarrow z, \quad 1 + z + 2z^2 + z^3 \rightarrow z(1 + z)^2;$$

y

$$F_o(2, 4) = z^2(1 + z)^2(1 + z + z^2), \quad \text{donde } \alpha = -1, \quad \gamma = 1.$$

Similarmente, para los conjuntos cerrados

$$1 + z \rightarrow z, \quad 1 + 2z + z^2 + z^3 \rightarrow z^3;$$

y

$$F_c(2, 4) = z^4(1 + z + z^2), \quad \text{donde } \alpha = 1, \quad \gamma = 1.$$

7.3.2. Enlaces topológicos de pesos en un sistema π -electrón.

Ahora analicemos los patrones que siguen los enlaces en un sistema π -electrón.

Definición 7.4. El *orden de un enlace topológico*, es la contribución de un par de átomos adyacentes dados a el espacio, o bien la fracción de conjuntos abiertos (o cerrados) que contienen a este par de átomos y es por ello que su valor oscila entre 0 y 1 y su función esta dada por

$$\pi_k(ij) = n_k(ij)/|\mathcal{T}| \quad \text{con } k = o, c;$$

donde $n_k(ij)$ es el número de conjuntos del tipo k (abierto o cerrado) que contenga a $\{i, j\}$

Observación 7.5. Además $\pi_k(ij)$ puede ser expresado en términos de funciones generadoras, el total de conjuntos son obtenidos por asignar $z = 1$,

$$\pi_k(ij) = F_k(X, ij; 1)/F_k(X, 1).$$

Ejemplo 7.11. Para el polieno lineal $C_n H_{n+2}$,

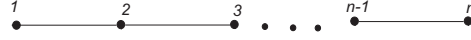


Figura 7.16:

y su topología de enlace esta dada por el dígrafo

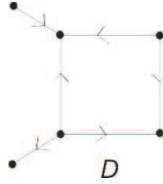


Figura 7.17:

que es $\mathbf{r}^{n-4}\mathbf{s}^2$. El enlace (12) es del tipo st , y

$$\pi_o(12) = \pi_c(12) = \frac{z^2(1+z)^{n-4}(1+z+z^2)}{(1+z)^{n-4}(1+z+z^2)^2} \Big|_{z=1}$$

el cual es independiente del valor de n .

Observación 7.6. $\pi_o(ij)$ puede ser interpretado como la probabilidad que un conjunto abierto, seleccionado aleatoriamente, contenga a $\{i, j\}$.

Definición 7.5. La probabilidad de seleccionar aleatoriamente un conjunto abierto que contenga al enlace (ij) es

$$p_o(ij) = \sum_{O_n \supset \{i,j\}} |O_n| / \sum_n |O_n|,$$

donde $\mathcal{T} = \{O_n | n = 1, 2, \dots, |\mathcal{T}|\}$.

Ahora bien La probabilidad de seleccionar aleatoriamente un conjunto cerrado que contenga al enlace (ij) es

$$p_c(ij) = \sum_{C_n \supset \{i,j\}} |C_n| / \sum_n |C_n|,$$

donde $\mathcal{T}^* = \{C_n | n = 1, 2, \dots, |\mathcal{T}^*|\}$.

Proposición 7.6. *Las probabilidades de cardinalidad de peso son calculadas a partir de las f funciones generadoras*

$$F_a(S; z) = \sum_{k=0}^{|X|} N_k^a(S) z^k \quad (a = o, c),$$

donde $N_k^a(S)$ es el número de conjuntos abiertos o cerrados de cardinalidad k que contienen a $S \subset X$.

Observación 7.7. $F_a(S; z) = F(\emptyset; z)$.

Por ejemplo,

$$\sum_{S \subset O_n} |O_n| = \left. \frac{d}{dz} F_o(S; z) \right|_{z=1} \quad y \quad \sum_n |O_n| = \left. \frac{d}{dz} F_o(z) \right|_{z=1}.$$

Ejemplo 7.12. Para los polienos de el ejemplo 7.11 teniendo las funciones generadoras,

$$F_o(z) = F_c(z) = (1 + z)^{n-4}(1 + z + z^2)^2,$$

$$F_o(12; z) = F_c(12; z) = z^2(1 + z)^{n-4}(1 + z + z^2),$$

para el cual

$$p(ij) = F'(ij; 1)/F'(1)$$

$$= (n + 2)/3n.$$

Ejemplo 7.13. La molécula

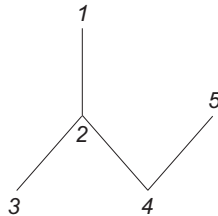


Figura 7.18:

tiene la topología de enlace ss' :

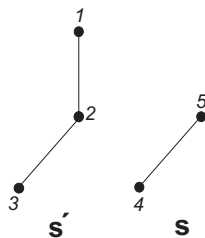


Figura 7.19:

Las funciones generadoras son: $F_o(z) = (1 + z + z^2)(1 + z + 2z^2 + z^3)$,
 $F_o(12; z) = z^2(1 + z)(1 + z + z^2)$ ($s't'$ enlace), $F_o(24; z) = z^2(1 + z)^3$ ($s's$
enlace), $F_o(45; z) = z^2(1 + z + 2z^2 + z^3)$ ($s't'$ enlace), $F_c(z) = (1 + z + z^2)(1 +$
 $2z + z^2 + z^3)$,
 $F_c(12; z) = z^3(1 + z + z^2)$, $F_c(24; z) = z^5$, $F_c(45; z) = z^2(1 + 2z + z^2 + z^3)$,
para lo cual

$$p_o(12) = ,538, \quad p_o(24) = ,718, \quad p_o(45) = ,462,$$

$$p_c(12) = ,333, \quad p_c(24) = ,139, \quad p_c(45) = ,472.$$

El orden de enlace de Hückel para la molécula es:

$$p(12) = ,653, \quad p(24) = ,383, \quad p(45) = ,924.$$

Notemos que el valor de $p(ij)$ es aproximadamente el doble del valor de $p_c(ij)$.

Capítulo 8

La topología gráfica.

Crear es tan fácil como ser libre.
Elsa Troilet.

En este capítulo haremos uso de los conceptos dados en el Capítulo 6 pero ahora para caracterizar a la topología de enlace.

Un segundo enfoque a la topología molecular se deriva de la conexión interna entre la topología finita y los grafos. Dado que existe una correspondencia uno a uno entre un grafo y su par $T_{\frac{1}{2}}$ topología-cotopología, cualquier miembro de este par puede ser considerado como una descripción topológica de la estructura representada por ese grafo. La topología así asociada con una molécula es llamada la topología de grafos.

8.1. La construcción de la topología gráfica.

En el capítulo 3 se estudio que para cada espacio topológico le corresponde un único dígrafo e inversamente, y también le corresponde un único grafo asociado con su dígrafo. Además, la cotopología del espacio produce el dígrafo inverso y el mismo grafo. La forma esquemática de esta característica es

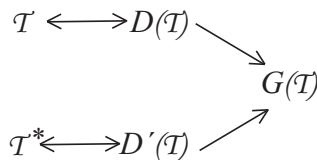


Figura 8.1:

Definición 8.1. La topología asociada con una molécula es llamada *topología gráfica*.

A partir de ahora el grafo de una topología representará la formula estructural de una molécula.

Definición 8.2. Dado un grafo G , si se le asignan direcciones a sus aristas, el resultado será un dígrafo transitivo, llamado *transitivamente orientable*.

Definición 8.3. La topología asociada con una molécula es llamada *topología gráfica*.

Ejemplo 8.1. El ciclo decapentaeno no es transitivamente orientable, como se puede observar en el siguiente gráfico.

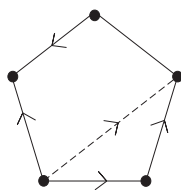


Figura 8.2:

Ejemplo 8.2. El metilenociclopropeno tiene cuatro orientaciones transitivas:

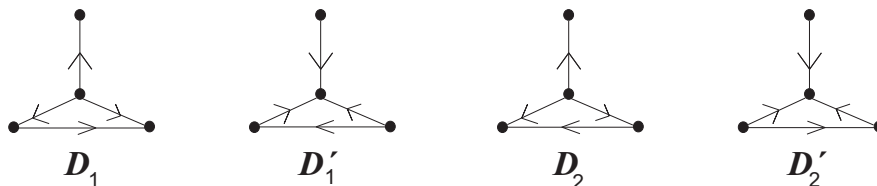


Figura 8.3:

Por otro lado 3-radieleno

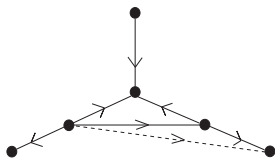


Figura 8.4:

no puede ser transitivamente orientable.

Proposición 8.1. *Para las moléculas con un grafo bipartito G tienen dos orientaciones transitivas.*

Demostración. Dado que G es un grafo bipartito, su forma esquemática es:

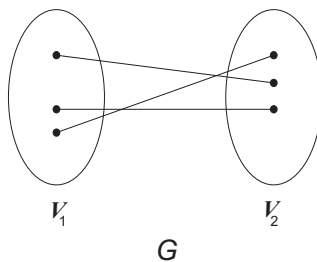


Figura 8.5:

Las dos orientaciones transitivas de G , se obtienen cuando se le asigna dirección a cada arista de V_1 a V_2 y viceversa son:

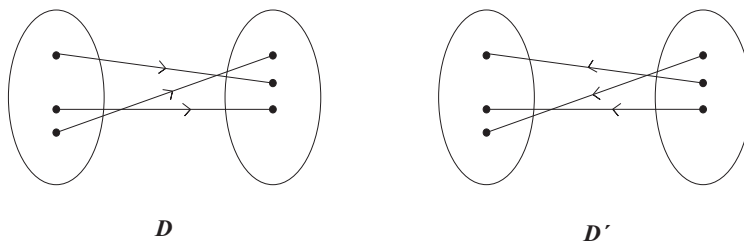


Figura 8.6:

Alguna otra orientación de G no será de ser transitivo, esto a que la orientación sería de la forma:

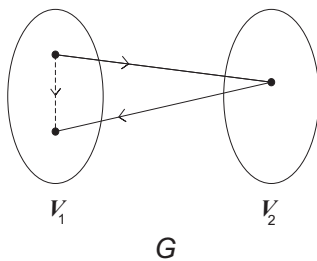


Figura 8.7:

que requerirá una arista asociada a dos vértices en V_1 ; lo cual contradecirá la hipótesis de que es bipartito. □

Para una molécula de la cual su grafo G es bipartito, se observa lo siguiente

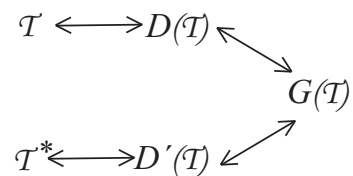


Figura 8.8:

Ejemplo 8.3. Para el butadieno y naftaleno, se tienen las siguientes representaciones grafos para sus dos orientaciones gráficas son:

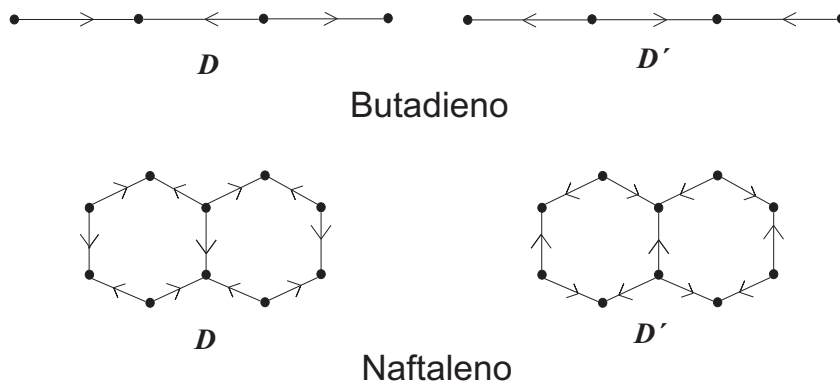


Figura 8.9:

Ejemplo 8.4. Las dos orientaciones transitivas para el butadieno



Figura 8.10:

de las cuales se tiene los elementos básicos siguientes

$$B_1 = \{1, 2\}, \quad B_2 = \{2\}, \quad B_3 = \{2, 3, 4\}, \quad B_4 = \{4\},$$

$$B_1^* = \{1\}, \quad B_2^* = \{1, 2, 3\}, \quad B_3^* = \{3\}, \quad B_4^* = \{3, 4\}.$$

Las latices de la topología y cotopología gráfica son

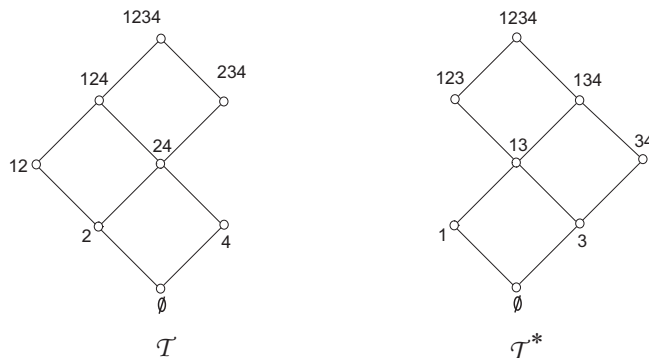


Figura 8.11:

Ejemplo 8.5. Consideremos la molécula para el cual su grafo es

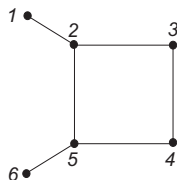


Figura 8.12:

así su dígrafo asociado para cada región cerrada adyacente a la región abierta:

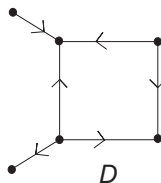


Figura 8.13:

8.2. Estructura de una topología gráfica

Proposición 8.2.

1. Para los grafos de una topología gráfica que son bipartitos, la topología gráfica es $T_{\frac{1}{2}}$.
2. Un espacio topológico y su grafo tienen el mismo número de componentes, al igual una molécula conexa tiene espacio grafo conexo.
3. El grafo de un topología es único, y sólo las moléculas homeomorfas tienen el mismo grafo.

Ejemplo 8.6. Para la topología-cotopología del butadieno, dadas en el ejemplo 8.4 tenemos el grafo

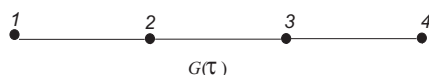


Figura 8.14:

los números de conjuntos abiertos y cerrados que contienen a los enlaces (12) y (34) son

$$n_o(12) = 3 \quad n_o(34) = 2,$$

$$n_c(12) = 2 \quad n_c(34) = 3,$$

Observación 8.1. Sea un espacio $T_{\frac{1}{2}}$ y sea G su grafo asociado. Los elementos básicos están dados por

$$\begin{aligned}
 p \text{ abierto: } B_p &= \{p\}, & B_p^* &= \{p\} \cup A_p, \\
 p \text{ cerrado: } B_p &= \{p\} \cup A_p, & B_p &= \{p\}; \\
 & & \text{donde } A_p &= A_p^+ - A_p^-.
 \end{aligned}$$

Demostración. Recordemos que $B_p = \{p\} \cup A_p^+$, $B_p^* = \{p\} \cup A_p^-$, ahora bien se observa que si p abierto $A_p^+ = \emptyset$ y si es cerrado $A_p^- = \emptyset$, haciendo las respectivas sustituciones se tiene el resultado. \square

Ejemplo 8.7. Para la topología gráfica de la molécula

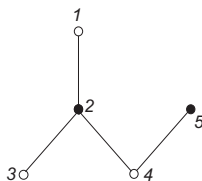


Figura 8.15:

los elementos básicos son

p	1	2	3	4	5
B_p	{1}	{1, 2, 3, 4}	{3}	{4}	{4, 5}
B_p^*	{1, 2}	{2}	{2, 3}	{2, 4, 5}	{5}

Definición 8.4. Sea $G(V, E)$ un grafo con $|V| = n$, si se enumeran arbitrariamente los vértices como $v_1, v_2 \dots v_n$. La *matriz de adyacencia* $A(G)$ con respecto a este listado de los vértices esta dada por $A(G)=[a_{ij}]$, entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de } G; \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Definición 8.5. Las bases pueden ser representadas como una matriz $M(\mathcal{B})$ donde

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in \mathcal{B}_i; \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Esto es, las columnas de M corresponden a los átomos y las filas a los elementos básicos.

Lema 8.1. Si $j \in \mathcal{B}_i$ luego existe una arista de i a j en $D(\mathcal{T})$. Entonces

$$M(\mathcal{B}) = I + A(D),$$

donde I es al matriz identidad de $n \times n$.

Lema 8.2. Si (X, \mathcal{T}^*) entonces

$$M(\mathcal{B}^*) = M^T(\mathcal{B}).$$

Demostración. Dado que $D(\mathcal{T}^*) = D'(\mathcal{T})$, luego $A(D') = A^T(D)$, entonces

$$\begin{aligned} M(\mathcal{B}^*) &= I + A^T(D) \\ &= M^T(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

□

Lema 8.3. *En un espacio topológico gráfico:*

$$M(\mathcal{B}) + M(\mathcal{B}^*) = 2I + A(G).$$

Demostración. La demostración es evidente al aplicar los dos lemas anteriores y el hecho de que

$$A(G) = A(D) + A(D').$$

□

Definición 8.6. La matriz $A(G) = M(\mathfrak{B}) + M(\mathfrak{B}^*) - 2I$ es llamada la *matriz Hamiltoniana de Hückel*.

Ejemplo 8.8. Para la molécula del ejemplo 8.7 las matrices básicas son

$$M(\mathfrak{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(\mathfrak{B}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto, la matriz Hamiltoniana de Hückel es

$$M(\mathfrak{B}) + M(\mathfrak{B}^*) - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.3. Propiedades Combinatorias de la Topología Gráfica

Lema 8.4. Si la estructura de una molécula se describe a través de un grafo G , entonces la cardinalidad de la topología gráfica es $|\mathcal{T}(G)| = \sigma(G)$, el número de conjuntos de vértices independientes de G .

Corolario 8.1. Para los siguientes caminos ciclos e isocaminos de los cuales sus grafos son:

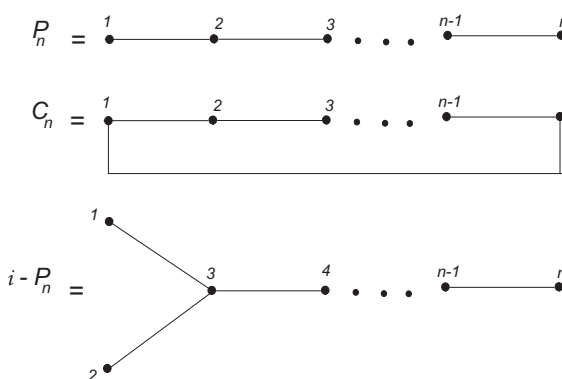


Figura 8.16:

el número de conjuntos vértices independientes de G son:

- i) $\sigma(P_n) = F_{n+1}$
- ii) $\sigma(C_n) = \sigma(P_n) - \sigma(P_{n-4})$
- iii) $\sigma(i - P_n) = \sigma(P_n) + \sigma(P_{n-5})$

donde los números de Fibonacci están dados por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Demostración. Primero se necesario recordar la forma recursiva de $\sigma(P_n)$

$$\sigma(P_n) = \sigma(P_{n-1}) + \sigma(P_{n-2}),$$

de donde se calcula

$$\begin{aligned}
\sigma(P_n) &= \sigma(P_{n-1} + \sigma(P_{n-2})), \\
\sigma(P_{n-1}) &= \sigma(P_{n-2} + \sigma(P_{n-3})), \\
\sigma(P_{n-2}) &= \sigma(P_{n-3} + \sigma(P_{n-4})), \\
\sigma(P_{n-3}) &= \sigma(P_{n-4} + \sigma(P_{n-5})), \\
\sigma(P_{n-4}) &= \sigma(P_{n-5} + \sigma(P_{n-6})), \\
\sigma(P_{n-5}) &= \sigma(P_{n-6} + \sigma(P_{n-7}));
\end{aligned}$$

y de manera muy importante

$$\sigma(G) = \sigma(G - p) + \sigma(G - p - A_p)$$

ya que será lo que inicialmente se ocupará en la prueba.

i) Esta prueba fue realizada en el Capítulo 6.

$$\begin{aligned}
ii) \quad \sigma(C_n) &= \sigma(P_{n-1}) + \sigma(P_{n-3}) \\
&= (\sigma(P_n) - \sigma(P_{n-2})) + \sigma(P_{n-3}) \\
&= \sigma(P_n) - (\sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_{n-4})) + \sigma(P_{n-3}) \\
&= \sigma(P_n) - \sigma(P_{n-4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iii) \quad \sigma(i - P_n) &= \sigma^2(1)\sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_{n-4}) \\
&= 4\sigma(P_{n-3}) + (\sigma(P_{n-2}) - \sigma(P_{n-3})) \\
&= 3\sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_{n-2}) \\
&= 3\sigma(P_{n-3}) + (\sigma(P_{n-1}) - \sigma(P_{n-3})) \\
&= 2\sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_{n-1}) \\
&= 2\sigma(P_{n-3}) + (\sigma(P_n) - \sigma(P_{n-2})) \\
&= 2\sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_n) - (\sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_{n-4})) \\
&= \sigma(P_{n-3}) + \sigma(P_n) - \sigma(P_{n-4}) \\
&= \sigma(P_n) + (\sigma(P_{n-3}) - \sigma(P_{n-4})) \\
&= \sigma(P_n) + \sigma(P_{n-5})
\end{aligned}$$

□

Observación 8.2. De las formulas anteriores se observa que $\sigma(C_n) < \sigma(P_n) < \sigma(i - P(n))$.

Lema 8.5. Dado un grafo G , al añadirle una nueva arista, el valor de $\sigma(G)$ decrece.

Demostración. Considerar el proceso de añadirle a un grafo G una arista e_{pq} (que une a los átomos p y q), la cual no es adyacente en G . Para esto es importante tener presente la forma recursiva de $\sigma(G)$ y se obtiene

$$\sigma(G + e_{pq}) = \sigma(G - p) + \sigma(G - p - q - A_p) \quad (8.1)$$

y

$$\begin{aligned}\sigma(G) &= \sigma(G - p) + \sigma(G - p - A_p) \\ &= \sigma(G - p) + \sigma(G - p - q - A_p) + \sigma(G - p - q - A_p - A_q).\end{aligned}\tag{8.2}$$

Combinando las ecuaciones 8.1 y 8.2 se tiene

$$\sigma(G + e_{pq}) = \sigma(G - p) + \sigma(G - p - q - A_p - A_q)$$

□

Conclusiones.

Existen diversas áreas de las matemáticas que han intentado crear modelos para estudiar las estructuras moleculares, entre los que destaca el *álgebra lineal*, *teoría de grupos*, *teoría de nudos*, entre otros. Aunque en este trabajo se introdujo una reciente forma del estudio de las estructuras moleculares a través de aplicar la teoría de grafos a los *espacios topológicos finitos* apoyados por estructuras llamadas *latices*. De manera más clara.

Se trataron diversos modelos para representar las estructuras moleculares de una manera formal a través de las matemáticas. Este trabajo, se enfocó en el estudio de ciertos conjuntos de los espacios topológicos y las formas de construir estos de modo que nos sean de utilidad en la representación de estructuras moleculares. Estas colecciones de conjuntos pudieron ser desarrolladas utilizando *latices*, los cuales nos permiten asociar un grafo al espacio topológico. A partir de este grafo se estudió las propiedades combinatorias de las topologías del espacio y se aplicó en la descripción de la estructura molecular usando diferentes topologías sobre la misma molécula y logrando obtener valores aproximados a los resultados obtenidos por métodos químicos.

Además se tiene como trabajo futuro el desarrollo de programas de computo para la determinación de las características topológicas estudiadas.

Bibliografía

- [1] Bishop, D. M.: *Group Theory and Chemistry*. Oxford Clarendon Press; 1973.
- [2] Bollobos, B.: *Random Graphs*. Cambridge University; 2001.
- [3] Davey B. A., Priestley H.A.: *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press; 1990.
- [4] Dugundji, J.: *Topology*. Allyn and Bacon, Boston; 1966.
- [5] Flapan, E.: *When Topology Meets Chemistry: A Topological Look At Molecular Chirality's*. USA: Cambridge University Press; 2000.
- [6] Grimaldi, R. P.: *Discrete And Combinatorial Mathematics. And Applied Introduction*. USA: Addison Wesley Longman; 2000.
- [7] Gross, J. L., Jay J.: *Graph Theory and its Applications*. CRC Press; 1999.
- [8] Harary, F., Norman, R. Z., y Cartwright, D.: *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs*. Wiley, New York; 1965.
- [9] Krishnamurthy, V.: *On the number of topologies on a finite set*. Amer. Math Monthly; 1966.
- [10] Merrifield R. E., Simmons H.E.: *Topological Methods in Chemistry*. John Wiley and Sons; 1989.
- [11] Munkres, J, R.: *Topología*. Prentice Hall; 1975.
- [12] Skornjakov L. A.: *Elements of lattice theory*. British Library Cataloguing in Publication Data; 1977.
- [13] Szász G.: *Introduction to Lattice*. Akadémiai Kiadó, Budapest; 1963.
- [14] <http://www.ua.es/cuantica/docencia/a-qc/otros/huckel.pdf>